Tablas de mortalidad de la población de España 1998-1999.

Metodología empleada

Resultados nacionales

Resultados por comunidades autónomas

Tablas de mortalidad de la población de España 1998-1999.

Metodología empleada

Resultados nacionales

Antecedentes históricos

En el año 1945 el Instituto Nacional de Estadística publicó unas tablas de mortalidad de la población española, por sexo, calculadas con las defunciones por edad de los años 1930 y 1931 y las poblaciones del Censo de 1930. Con ello se cubrió la laguna existente en la investigación estadística española hasta dicho año.

Seis años más tarde, estando ya disponibles los resultados del Censo de 1940, se elaboraron tablas para dicho año pero, además, las cifras de los Censos de 1900, 1910 y 1920 se emplearon (convenientemente tratadas) como denominador de las defunciones por sexo y edad del Movimiento Natural de la Población de los años correspondientes, para establecer las funciones biométricas que se publicaron conjuntamente con las de 1930 y 1940, disponiéndose así de las series para el período 1900-1940 que posibilitaron el examen de la evolución de la mortalidad general, por sexo, de la población española.

Con los datos del Censo de 1950, el Instituto confeccionó las tablas de mortalidad de ese año, siguiendo un método idéntico al que sirvió de base para la realización de las cinco primeras, completando, además, la información facilitada en las tablas abreviadas referidas al mismo año difundidas dos años antes.

Las poblaciones obtenidas en los Censos de 1960 y 1970 y las cifras de defunciones de esos años, hicieron posible el cálculo de nuevas tablas de mortalidad de la población española.

A partir de las mencionadas tablas de 1970, el Instituto Nacional de Estadística ha publicado tablas de mortalidad cada cinco años, utilizando como poblaciones por sexo y edad las provenientes de los correspondientes recuentos padronales, además de los censales. La metodología empleada permite, de nuevo, la comparación de los resultados para 1975, 1980, 1985 y 1990, siempre teniendo en cuenta los cambios en los conceptos manejados que, en todo caso, se indican en las publicaciones (tal es el caso del concepto de nacido vivo y, por tanto, del correlativo de fallecido, realizado en el año 1975).

Todo ello ha supuesto la difusión de cifras comparables ya que, si bien la metodología varía en lo que se refiere a los procedimientos de suavizado, que se adecuan a cada situación, las definiciones de las funciones biométricas básicas calculadas para el conjunto de la población son las mismas (no se mencionan, por tanto, los estudios correspondientes a tablas abreviadas, como tampoco los relativos a ámbitos poblacionales más reducidos, como son las comunidades autónomas y las provincias).

En otro orden de cosas, el cálculo de valores proyectados de las funciones biométricas de la población de España, constituye un proyecto relativamente reciente, que se aplicó para la obtención de supervivientes futuros con ocasión de las proyecciones de población calculadas a partir del Censo de Población de 1970, y en las últimas proyecciones, elaboradas a partir del Censo de Población de 1991.

Por último, hay que mencionar que las funciones de las tablas de mortalidad de la población de España 1998-1999, objeto de la presente publicación, se han calculado empleando como denominadores cifras de población proyectadas, y no observadas (como lo son las censales)[1]. Con ello, se tiene la ventaja de reflejar de forma continuada los cambios en la intensidad de la mortalidad, cada vez que se dispone de nuevas cifras de defunciones. Sin embargo, es preciso advertir que las tablas obtenidas deberán ser revisadas en la medida en que las poblaciones empleadas para su cálculo sean corregidas, bien a la vista de los efectivos por sexo y edad resultantes en un posterior recuento poblacional exhaustivo, bien como consecuencia de los errores en las hipótesis realizadas respecto a los componentes demográficos en el momento de establecer las correspondientes proyecciones.

En la página siguiente se recoge la evolución de la esperanza de vida al nacimiento, de la población total y de cada sexo, a lo largo el siglo.

[1] Las cifras de población proyectadas ya se utilizaron con ocasión del cálculo de las tablas 1994-1995 y 1996-1997.

Esperanza de vida al nacimiento

Años	Total	Varones	Mujeres	Diferencia
1900	34,76	33,85	35,70	1,85
1910	41,73	40,92	42,56	1,64
1920	41,15	40,26	42,05	1,79
1930	49,97	48,38	51,60	3,22
1940	50,10	47,12	53,24	6,12
1950	62,10	59,81	64,32	4,51
1960	69,85	67,40	72,16	4,76
1970	72,36	69,57	75,06	5,49
1970*	71,98	69,17	74,69	5,52
1975	73,34	70,40	76,19	5,79
1980	75,62	72,52	78,61	6,09
1985	76,52	73,27	79,69	6,42
1990	76,94	73,40	80,49	7,09
1994	77,93	74,35	81,51	7,16
1996	78,31	74,74	81,88	7,14
1998	78,71	75,25	82,16	6,91

* Dado que las cifras de defunciones anteriores al año 1975 no incluyen a los fallecidos durante el primer día de vida, ha sido preciso calcular la esperanza de vida para el año 1970 añadiendo dichos fallecidos, siendo así comparable con la obtenida para fechas posteriores.

Fuentes:

Tablas de Mortalidad de la Población Española 1930-1931. INE. 1945.
Tablas de Mortalidad de la Población Española. Años 1900 a 1940. INE. 1952.
Tablas de Mortalidad de la Población Española. Año 1950. INE. 1960.
Tablas de Mortalidad de la Población Española. Años 1960-70. INE. 1977.
Tablas de Mortalidad de la Población Española. Años 1975-1976. INE. 1981.
Tablas de Mortalidad de la Población Española 1980-1981. INE. 1988.
Tablas de Mortalidad de la Población Española 1985-1986. INE. 1991.
Tablas de Mortalidad de la Población Española 1990-91. INE. 1993.
Tablas de Mortalidad de la Población Española 1994-1995. INE. 1998.
Tablas de Mortalidad de la Población Española 1996-1997. INE. 1999.

1 Introducción

Las tablas de mortalidad se construyen con el fin de medir la incidencia de este fenómeno en la población que se estudia, con independencia de la estructura por edades que la misma presente.

El tipo de tabla habitualmente elaborado es el que surge del análisis transversal de la mortalidad, que estudia cómo incide dicho fenómeno en los efectivos de población clasificados por edades o grupos de edades, en un momento dado.

Dada la evolución que generalmente experimenta la mortalidad, sin cambios bruscos, estas tablas constituyen una descripción del fenómeno aceptable para períodos cortos de tiempo, próximos al momento para el que se construyen.

Para el cálculo de las funciones de una tabla completa de mortalidad corriente o de período, es preciso disponer de la información sobre fallecidos y población clasificados ambos por edades y referidos a un mismo período de tiempo.

Dado que las cifras de defunciones clasificadas por edad son de pequeña magnitud (a excepción de las edades más altas), no sólo en las provincias y las comunidades autónomas, sino también a nivel nacional, sobre ellas repercuten de forma notable tanto los errores de recuento, como las posibles perturbaciones que, en un año dado y de forma excepcional, afectan al fenómeno de la mortalidad. Por ello, se hace necesario eliminar estas anomalías que, de permanecer en los datos, darían una imagen falsa del fenómeno estudiado. Esto se lleva a cabo en una primera etapa, considerando, para el cálculo de la tabla de mortalidad referida a un momento dado, y en cada grupo de edad, la media de las defunciones correspondientes a un cierto número de años (generalmente dos o cuatro), centrada en dicho momento.

En una segunda etapa, se hace preciso eliminar las perturbaciones que, tanto en las cifras de fallecidos como en las de población, son consecuencia de errores en la declaración de la edad, y que producen un aumento de los valores observados a ciertas edades en detrimento de las contiguas, ocasionando distorsiones en la serie de probabilidades de muerte de la tabla de mortalidad. Habitualmente, se soslaya este problema mediante la aplicación de algún procedimiento de suavizado a las cifras originales.

2 Obtención de la serie de probabilidades de muerte

La probabilidad de muerte a la edad x, q_x, se define como la probabilidad que tiene un individuo perteneciente a una generación dada, con edad exacta x, de morir antes de alcanzar la edad x+1. Se han de considerar, por tanto, los casos posibles de muerte, es decir, los individuos expuestos a morir, así como los hechos reales de la misma, es decir, las muertes ocurridas en estas condiciones de edad y generación. Los casos posibles son los individuos que llegan a cumplir x años, que se calculan como suma de los habitantes que a final de año tienen esa edad y la mitad de los fallecidos con edad x durante el año considerado, ya que se supone que las muertes se distribuyen uniformemente a través del mismo. Admitida la hipótesis de que las muertes de una generación con edad x ocurren la mitad en un año y la otra mitad en el siguiente, la probabilidad de muerte vendría expresada por:

$$q_x = \frac{1/2\,(D_x^z + D_x^{z+1})}{P_x^z + 1/2\,(D_x^z)}$$

donde:

D_x^z representa las defunciones ocurridas en el año z a la edad x.

D_x^{z+1} representa las defunciones ocurridas en el año z+1 a la edad x.

P_x^z es la población a 31 de diciembre del año z con edad x.

La anterior expresión se ha utilizado para el cálculo de las q_x correspondientes a las edades de dos a noventa años, ambas inclusive.

Dado que las defunciones de menores de un año de edad se concentran en las primeras semanas de vida, no es posible aplicar la hipótesis de distribución uniforme a través del año, por lo cual se ha calculado la probabilidad de muerte mediante la expresión:

$$q_0 = \frac{D^z_{0,g(z)} + D^{z+1}_{0,g(z)}}{P^z_0 + D^z_{0,g(z)}}$$

siendo:

$D^z_{0,g(z)}$ las defunciones ocurridas en el año z, con 0 años, de la generación de ese año.

$D^{z+1}_{0,g(z)}$ las defunciones ocurridas en el año z+1, con 0 años, de la generación nacida el año anterior.

P^z_0 es la población a 31 de diciembre del año z con edad 0.

Por la misma razón, a la edad uno, q_1 se ha calculado mediante:

$$q_1 = \frac{D^z_{1,g(z-1)} + D^{z+1}_{1,g(z-1)}}{P^z_1 + D^z_{1,g(z-1)}}$$

siendo:

$D^z_{1,g(z-1)}$ las defunciones ocurridas en el año z, con 1 año, de la generación z-1.

$D^{z+1}_{1,g(z-1)}$ las defunciones ocurridas en el año z+1, con 1 año, de la generación z-1.

P^z_1 es la población a 31 de diciembre del año z con edad 1.

El bajo número de fallecidos registrado en cada una de las edades superiores a los noventa años y una mayor repercusión de los errores en la declaración de la edad, provocan distorsiones en la serie de probabilidades de muerte a las mencionadas edades; por ello, estas últimas se han estimado mediante el ajuste de una parábola de tercer grado, por mínimos cuadrados, a partir de las q_x calculadas mediante la expresión anterior, para

x = 90, 91, 92, 93 y 94.

Para efectuar el mencionado ajuste se establecieron las siguientes condiciones: a) La parábola cúbica pasa por el punto q_{90}, lo que conlleva la continuidad de las q_x ajustadas con las calculadas a edades inferiores a los 90 años, b) el valor $q_{110}=1$, truncándose la parábola a partir de ese punto, lo que supone, a priori, que no existen supervivientes mayores de ciento diez años, y c) la cúbica tiene tangente paralela al eje de las x en el punto x=110, lo que supone un crecimiento acelerado de la mortalidad a partir del punto de inflexión de la cúbica, con objeto de tener altas mortalidades en las edades cercanas a ciento diez.

3 Obtención de las series derivadas

A partir de la serie de probabilidades de muerte pueden deducirse las funciones de las tablas de mortalidad que se describen seguidamente.

PROBABILIDAD DE VIDA O SUPERVIVENCIA A LA EDAD x, p_x

Es la probabilidad de supervivencia entre dos edades exactas. Por tanto, para cada edad x,

$$p_x = 1 - q_x$$

SUPERVIVIENTES CON x AÑOS, l_x

Es el número de individuos que alcanzan la edad exacta x de entre l_0 de partida de la tabla de mortalidad. Por tanto, a cada edad x,

$$l_x = l_{x-1} p_{x-1}$$

Habitualmente se toma l_0 = 100.000.

DEFUNCIONES TEÓRICAS CON x AÑOS, d_x

Son las defunciones ocurridas entre dos edades exactas x y x+1, deducidas de la tabla de mortalidad.

Por tanto, a cada edad x,

$$d_x = l_x q_x = l_x - l_{x+1}$$

ESPERANZA DE VIDA A LA EDAD x, e_x

Es el número medio de años de vida futura a cada edad exacta x, para los supervivientes que alcanzan dicha edad, bajo el supuesto de que los años vividos por todos ellos se reparten por igual entre los mismos.

Bajo la hipótesis de que los individuos que fallecen a una cierta edad viven, por término medio, la mitad del año en que se produce la muerte, la esperanza de vida se calcula como

$$e_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x} \sum_{i=x+1}^{\infty} l_i$$

representando ∞ la edad más alta, en la cual se considera que no hay supervivientes.

4 Obtención de las series perspectivas

Además de las anteriores series o funciones biométricas clásicas de las tablas de mortalidad, se ha considerado de sumo interés la inclusión de las dos series perspectivas que se especifican a continuación.

SUPERVIVIENTES CON x AÑOS CUMPLIDOS, L_x

Representa el número de supervivientes de la tabla de mortalidad con x años cumplidos. La estimación de esta función se ha realizado mediante la siguiente fórmula (ver Introduction to the Mathematics of Population. Keyfitz. Addison-Wesley):

$$L_x = \frac{13}{24}(l_x + l_{x+1}) - \frac{1}{24}(l_{x-1} + l_{x+2})$$

para x = 1, 2, ..., 98.

Para las restantes edades

$$L_0 = a_0 l_0 + a_1 l_1 \text{, con } a_0 + a_1 = 1$$

siendo

$$a_0 = \frac{D^{z+1}_{0,g(z)}}{D^{z+1}_{0,g(z)} + D^{z+1}_{0,g(z+1)}}$$

donde

$D^{z+1}_{0,g(z)}$ representa las defunciones de menores de un año ocurridas en el año z+1 entre los nacidos de la generación g(z).

Para x = 99 y x = 100

$$L_{99} = e_{99}\, l_{99} - e_{100}\, l_{100}$$

$$L_{100} = e_{100}\, l_{100}$$

donde L_{100} son los supervivientes con 100 y más años cumplidos.

PROBABILIDAD DE SUPERVIVENCIA CON x AÑOS CUMPLIDOS, T_x

Es la probabilidad de sobrevivir entre las edades x y x+1, para los individuos con x años cumplidos. Por tanto, se deduce fácilmente de la anterior mediante

$$T_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}$$

y, para el efectivo de población con 99 y más años, la probabilidad de alcanzar 100 y más años es

$$T_{99} = \frac{L_{100}}{L_{99} + L_{100}}$$

5 Síntesis del procedimiento de suavizado empleado

Tanto los stocks de población obtenidos a partir de los censos de población y renovaciones padronales, como los datos sobre defunciones provenientes del Movimiento

Natural de la Población, adolecen, en ciertas ocasiones, de defectos en la declaración de las edades, aumentando los valores en algunas de ellas en detrimento de los correspondientes a edades próximas; ello ocasiona distorsiones en las series de probabilidades de muerte calculadas. Para evitarlo, se hace preciso un suavizado de los datos originales previa a su utilización.

El procedimiento empleado para el suavizado de las cifras originales ha sido el Método de las Diferencias Variantes. Dicho método ha sido empleado por el Instituto Nacional de Estadística en la elaboración de las tablas completas de mortalidad anteriores. Una exposición completa de su aplicación, con abundante bibliografía sobre el tema, puede encontrarse en el libro de G. Tintner, The Variate Difference Method, 1940, de la colección de la Cowles Comission. En los párrafos siguientes se expone brevemente su fundamento.

La hipótesis básica de partida para la aplicación del método es que la serie observada es la superposición aditiva de otras dos series, una que expresaría el valor correcto o esperado en cada edad x, y otra que sería una perturbación aleatoria que distorsiona el valor observado. Esta última sería, en este caso, la suma de todas aquellas causas y circunstancias que provocan declaraciones erróneas de la edad.

El modelo es, por tanto, del tipo:

$$y_x = u_x + e_x$$

donde a cada edad x:

y_x es el valor observado.

u_x es el valor esperado o correcto.

e_x es el error o perturbación aleatoria.

En la presente aplicación se ha supuesto que los valores u_x siguen una tendencia suave, sin bruscos zigzags, y que los errores aleatorios son independientes entre sí, hipótesis que podría suavizarse por la de incorrelación de los errores aleatorios.

Una segunda hipótesis fundamental, que ha permitido aplicar el Método de las Diferencias Variantes, consiste en suponer que la esperanza matemática u_x no es sino una polinomial de grado n, con n desconocido. El método de las diferencias variantes determina precisamente cuál es el valor de n. Posteriormente, una vez obtenido n, se ajusta una polinomial de dicho grado a los datos observados y_x. A este respecto hay que mencionar la existencia de una estrecha relación entre el método de las medias móviles y el de las diferencias variantes. Concretamente, M.G. Kendall (A Theorem in Trend Analysis, Biometrika, vol. 48, 1.961. Advanced Theory of Statistics) ha demostrado que los cálculos de medias móviles provienen de la aplicación del método de las diferencias variantes sobre una combinación lineal de algunos términos sucesivos de los valores observados y_x. Con más precisión, toda fórmula de medias móviles se traduce en el ajuste de 2K+1 términos sucesivos de un polinomio de grado p-1, existiendo 2K-p+1 números b_i (con p-K<i<K), tales que

$$\hat{u}_x = y_x - \Delta^p \left(\sum_{i=p-k}^{k} b_i y_{x+i} \right)$$

siendo,

Δ^p la diferencia de orden p.

$\hat{u}_x$ el valor estimado de u_x.

b_i los coeficientes de la fórmula de suavización de Sheppard.

Supuesto que la esperanza matemática u_x sigue una polinomial de grado n, se trata de determinar este último. Para ello, se aplica un proceso iterativo en el cual se calculan las sucesivas diferencias finitas. Evidentemente, llegará un momento en dicho proceso en que la esperanza matemática u_x desaparecerá, al anularse el polinomio de grado n; es decir, en cierto momento, la correspondiente diferencia será constante, anulándose, por consiguiente, las siguientes diferencias. Sin embargo, dado que los cálculos se realizan con valores observados y_x, es preciso saber en qué momento puede suponerse que la esperanza matemática se ha eliminado en este proceso de sucesivas diferencias finitas, quedando sólo un residuo proveniente de la existencia de errores aleatorios e_x. La respuesta a esta pregunta se realiza por la siguiente consideración: si se tiene una serie temporal que consiste solamente en el elemento aleatorio, entonces las varianzas de las series sucesivas de diferencias finitas son iguales, una vez corregidas por la multiplicación de un coeficiente binomial debido a que la serie, al ser aleatoria, no está ordenada en el tiempo. De aquí que la varianza de la primera y segunda diferencias sea la misma que la de la serie original.

De lo expresado anteriormente se obtiene un criterio para determinar cuándo ha desaparecido la esperanza matemática u_x. Si se calcula una cierta diferencia k tal que su varianza sea igual a la de la k+1 diferencia, e igual a la de la k+2, ..., entonces se puede afirmar que se ha eliminado la esperanza matemática u_x, tomando la k-ésima diferencia. Sin embargo, la igualdad entre varianzas nunca llega a alcanzarse, puesto que siempre queda un residuo de variación aleatoria pero, dado que se trabaja en un modelo de probabilidad, está demostrado que solamente se requiere que la diferencia entre las varianzas de dos series sucesivas de diferencias finitas sea más pequeña que tres veces el error estándar de la diferencia más baja.

Una vez determinado el grado de la polinomial a ajustar, sólo resta aplicar la correspondiente media ponderada con los coeficientes de la fórmula de suavización de Sheppard. El tipo de media móvil a utilizar se determina de la siguiente manera: si el elemento no aleatorio o esperanza matemática u_x queda más o menos eliminado en la primera o segunda diferencia, tomamos n=1, o una media móvil que es equivalente a ajustar una línea recta a un cierto número (sin determinar por el método) de valores observados y_x consecutivos. Si la esperanza matemática queda eliminada tan sólo en la tercera o cuarta de las diferencias finitas, tendremos n=2, y elegiremos una media móvil equivalente a ajustar una parábola de segundo grado a un cierto número de valores observados consecutivos. Si el elemento no aleatorio se elimina en la quinta o sexta diferencias, n=3, realizaremos una media ponderada equivalente a ajustar una polinomial de tercer grado (cúbica) a un número seleccionado de valores observados consecutivos, ... Si el elemento no aleatorio se elimina en la k-ésima diferencia finita, entonces n=k/2, cuando k es par, o n=(k+1)/2, cuando k es impar.

Según se ha indicado anteriormente, las medias móviles se aplican sobre un número determinado de valores observados y consecutivos, convenientemente centrados. Sin embargo, este número queda indeterminado. El criterio a seguir queda abierto a la experiencia y a la naturaleza concreta del problema a resolver. No obstante, el número de valores incluido en cada media debe tomarse respetando la longitud del ciclo principal que trata de eliminarse. En nuestro caso, se han tomado medias móviles sobre cada conjunto de cinco valores observados y_x consecutivos.

Para la aplicación a la construcción de las tablas de mortalidad, la serie de valores esperados siempre ha desaparecido en la primera o segunda diferencias, lo cual implica aplicar siempre unas simples medias móviles para la suavización de las series originales.

6 Información de base utilizada

Las defunciones empleadas en el cálculo de cada una de las tablas (de varones, de mujeres y del total), se han obtenido como promedio de las cifras por edad registradas en el Movimiento Natural de la Población de los años 1998 y 1999.

Las irregularidades que estas cifras originales de defunciones conllevan, como consecuencia de los posibles errores en su clasificación por edad, se han eliminado mediante el procedimiento de suavizado descrito en el punto anterior.

Las poblaciones por sexo y edades simples a 31 de diciembre de 1998 utilizadas, son las correspondientes a la revisión de las proyecciones de población calculadas a partir de los resultados del Censo de Población de 1991[1], a excepción de la de 100 y más años.

En cuanto al colectivo con 100 y más años de edad, de cada sexo, la cifra utilizada es la obtenida por interpolación lineal entre las poblaciones con 100 y más años deducidas del Censo de Población de 1991 y de la Renovación Padronal de 1996.

Las cifras empleadas se recogen, junto con las funciones biométricas de las tablas de mortalidad calculadas para el año 1998, en sus dos primeras columnas.

[1] *Proyecciones de la población de España calculadas a partir del Censo de Población de 1991. Evaluación y revisión.* INE 2001

Tablas de mortalidad de la población de España 1998-1999.

Metodología empleada

Resultados por comunidades autónomas

Introducción

Se han elaborado, para el conjunto nacional, cada una de las comunidades autónomas y el total de Ceuta y Melilla, tres tablas de mortalidad, correspondientes en los respectivos ámbitos geográficos a las poblaciones de varones, de mujeres y al total de ambas.

Las funciones biométricas se han calculado para el conjunto de generaciones y fallecidos comprendidos en un cierto período de tiempo, por lo que se trata de tablas del momento o transversales.

El nivel geográfico considerado y la desagregación por sexo, han aconsejado una distribución de los fallecidos en grupos de cinco edades diferenciándose, por sus características especiales, la mortalidad de los menores de un año.

Los resultados se han obtenido mediante la aplicación del programa LIFE, de Keyfitz y Flieger, utilizado con anterioridad por el INE para el cálculo de tablas de mortalidad autonómicas[1].

Conviene mencionar que las cifras de población utilizadas para el cálculo de las funciones biométricas de la presente monografía son *proyectadas*, y no *observadas* (como lo son las censales), al igual que se hizo con las anteriores tablas de mortalidad por comunidades autónomas publicadas. Ello tiene la ventaja de disponer de información más actualizada, ya que sólo depende del conocimiento de las cifras de defunciones. Sin embargo, es necesario advertir que las tablas obtenidas deberán ser revisadas en la medida en que las poblaciones empleadas para su cálculo sean corregidas, bien a la vista de los efectivos por sexo y edad resultantes en un posterior recuento poblacional exhaustivo[2], bien como consecuencia de los errores en las hipótesis realizadas respecto a los componentes demográficos en el momento de establecer las correspondientes proyecciones.

[1] *Tablas de mortalidad de la población española. Resultados por comunidades autónomas. Años 1970, 1975 y 1980.* INE 1988.
Tablas de mortalidad de la población española. Años 1985 y 1990. INE 1997.
*Tablas de mortalidad de la población española 1994-1995.*INE 1998.

[2] En la presente ocasión, los del Censo de Población de 2001.

1 Conceptos fundamentales

El modelo de las tablas de mortalidad se presenta bajo la forma de un conjunto de funciones biométricas, definidas con el objeto de medir los niveles de la mortalidad de una determinada población. Dichas funciones tienen como característica fundamental la de ser independientes de la estructura por edades existente en la fecha de referencia.

Las tablas pueden referirse a conjuntos poblacionales amplios o bien a ciertos subconjuntos definidos de acuerdo con alguna característica como el sexo, el estado civil, o la pertenencia a un cierto grupo étnico.

Para su elaboración, pueden recogerse las muertes acaecidas en una determinada generación a lo largo del tiempo, hasta el término de la misma, o bien, pueden llevarse a cabo contabilizando los fallecimientos ocurridos durante un período corto de tiempo (muy generalmente de dos o cuatro años) en el conjunto de generaciones presentes en dicho período. En el primer caso se está ante tablas longitudinales o por generación y en el segundo ante tablas transversales o del momento.

Las funciones de las tablas pueden calcularse edad a edad o para grupos de edades, en general grupos quinquenales, hablándose, respectivamente, de tablas completas o de tablas abreviadas. En todo caso, suelen calcularse por separado los valores correspondientes a los menores de un año, por las características especiales que conlleva la mortalidad a esa edad.

Las funciones básicas, así como las relaciones entre las mismas, se presentan a continuación.

El concepto básico es el de **probabilidad de supervivencia**, o su complementario, **probabilidad de muerte**, en un período dado.

A partir de un conjunto de nacidos vivos l_o, se construye la **serie de supervivientes** a cada edad exacta x, l_x, procedentes de dicho conjunto inicial.

La relación entre dos términos de la serie de supervivientes para valores x y x+n, l_{x+n}/l_x, representa la **probabilidad de supervivencia** a la edad exacta x+n para los supervivientes a la edad x, probabilidad que se designará por $p_{x,n}$.

El complemento a 1 de $p_{x,n}$, que se representa por $q_{x,n}$, es la probabilidad de que una persona que ha alcanzado los x años muera en los siguientes n años, es decir, antes de la edad x+n.

La **serie de fallecidos** entre cada dos edades exactas x y x+n, $d_{x,n}$, se obtiene fácilmente a partir de l_x sin más que calcular,

$$d_{x,n} = l_x - l_{x+n}$$

Es evidente que,

$$q_{x,n} = 1 - p_{x,n} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{d_{x,n}}{l_x}$$

Un índice que resume la tabla de mortalidad es la **esperanza de vida,** a la cual se dedican los renglones siguientes.

La **esperanza de vida a la edad x**, e_x, se define como el número medio de años de vida futura a cada edad exacta x, para los supervivientes que alcanzan dicha edad, bajo el supuesto de que los años vividos por todos ellos se reparten por igual entre los mismos.

Se tendrá, en particular, la **esperanza de vida al nacer** cuando x=0.

Se puede pensar en los años vividos por las personas en el intervalo de edades entre x y x+n divididos en dos partes: los vividos por la parte $d_{x,n}$ de la cohorte que fallece en ese intervalo, y los vividos por aquellos que estaban vivos al término del mismo. Si se supone que los $d_{x,n}$ viven en el intervalo un número medio de años $a_{x,n}$, es evidente que el número total de años-persona vividos entre x y x+n por los miembros de la cohorte inicial que llegaron a la edad x será,

$$L_{x,n} = d_{x,n}\, a_{x,n} + n l_{x+n}$$

Para n=∞ (edad más alta, a partir de la cual se considera que no hay supervivientes), se tendrá el total de años-persona que vivirán a partir de la edad exacta x los individuos de la cohorte inicial que alcanzaron dicha edad.

Por tanto, el número medio de años por persona que vivirán a partir de la edad exacta x, o esperanza de vida a esta edad, será $L_{x,\infty}/l_x$.

Las funciones así establecidas proporcionan el número de personas vivas, para cada edad o grupo, procedentes de una determinada cohorte inicial, pero resulta de gran interés la obtención del **stock de la población estacionaria,** de cada edad o grupo, que corresponde a aquellas funciones. La presentación en las tablas de esta última serie, cuyo cálculo se describe en los puntos siguientes, así como la que se deduce por cociente entre cada dos de sus términos, conocida como **serie de probabilidades de paso**, tiene una utilidad inmediata en el cálculo de proyecciones de población.

2 Cálculo de las funciones de la tabla de mortalidad: la ecuación fundamental

El cálculo de la serie $l_{x,n}$ se lleva a cabo por el método iterativo. Partiendo de las fórmulas en el modelo estacionario se obtienen, con objeto de adaptarse mejor a la realidad, los valores correspondientes a un modelo localmente estable.

Para el establecimiento del correspondiente modelo teórico se supondrá que la variable x es continua y toma valores reales positivos. En este caso, las funciones continuas de la tabla se representarán mediante l(x), p(x), q(x) y d(x).

La función l(x), que evidentemente es monótona no creciente, se supondrá no sólo continúa, sino también derivable en el intervalo de definición.

Bajo ese supuesto, si se consideran intervalos diferenciales dx, los vivientes entre x y x+dx habrán vivido un número de años l(x)dx. El número de años-persona que vivirán entre las edades exactas x y x+n las personas provenientes del colectivo inicial, sujetos a las condiciones de mortalidad de la tabla, $L_{x,n}$, será,

$$L_{x,n} = \int_0^n l(x+ y)\, dy$$

Para una mayor sencillez en los desarrollos que se exponen a continuación se introduce una variable que representa la mortalidad en un intervalo diferencial de edad dx.

Si l(x) son los individuos de la cohorte que sobreviven hasta la edad exacta x y $l(x+\Delta x)$ los que llegan hasta la edad $x+\Delta x$, el número de muertes durante el intervalo Δx será $l(x)-l(x+\Delta x)$, que dividido por Δx representará la tasa media. Cuando $\Delta x \to o$, se puede suponer que el efectivo que vive en todo el intervalo entre x y x+dx es l(x), por lo que el cociente anterior por l(x), proporcionará, en el límite, una tasa específica que se denominará tasa instantánea de mortalidad y se designará por $\mu(x)$. Por tanto,

$$\mu(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{l(x) - l(x + \Delta x)}{l(x)\Delta x} =$$

$$= \frac{l}{l(x)} \lim_{\Delta x \to o} \frac{l(x) - l(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Dado que se ha supuesto l(x) derivable, se puede escribir,

$$\mu(x) = - \frac{d \ln l(x)}{dx}$$

La confección de la tabla de mortalidad parte de la tasa de mortalidad específica por edades observada $M_{x,n}$, estableciendo una relación con el parámetro del modelo l_x, sobrevivientes a la edad x entre los l_o nacimientos.

Si se supone que la distribución por edades observada es una función continua P(x), siendo P(x) la población con x años, el número de personas con edades entre x+t y x+t+dt expuestas al riesgo de muerte será P(x+t)dt.

Aplicando la tasa de mortalidad instantánea $\mu(x+t)$ se obtendrá en el intervalo entre x+t y x+t+dt un número de defunciones igual a $P(x+t)\mu(x+t)dt$.

Para el intervalo entre x y x+n la tasa de mortalidad observada será,

$$M_{x,n} = \frac{\int_o^n P(x+t)\mu(x+t)\,dt}{\int_o^n P(x+t)\,dt} =$$

$$= -\frac{\int_o^n P(x+t)\frac{l'(x+t)}{l(x+t)}\,dt}{\int_o^n P(x+t)\,dt}$$

Esta ecuación en l(x) constituye la **ecuación fundamental** y pone en relación las tasas observadas con los parámetros l(x).

La resolución de la anterior ecuación puede llevarse a cabo bajo distintos supuestos sobre la población P(x) y sobre la forma de l(x).

En los puntos siguientes se obtendrán las funciones de la tabla bajo la hipótesis de población estacionaria primeramente y de población localmente estable a continuación. En ambos casos se hace preciso interpolar una función entre los valores de l(x) con objeto de poder integrar el sistema de ecuaciones resultante.

3 El modelo estacionario

Si se supone que cada año nace una cohorte de 100.000 niños, constante durante un período largo de n años y que la proporción de individuos de cada cohorte que fallecen en cada intervalo de edad a lo largo de toda la duración de la vida de las cohortes es fija y corresponde a los valores de las $q_{x,n}$, los sobrevivientes de estas cohortes sucesivas constituyen entonces lo que puede llamarse una **población estacionaria**. Se emplea el término *estacionaria* porque el número de personas vivas en un grupo de edad dado para un año dado, es constante; el número de personas que entran en un cierto grupo de edad es igual al número de personas que abandonan el mismo. El número de fallecidos cada año es igual al de nacidos.

Bajo este supuesto, la distribución de P(x+t) por grupos de edades es la misma que la de la tabla de mortalidad l(x+t), es decir, P(x+t)= K l(x+t). Entonces, sustituyendo en la ecuación fundamental e integrando en el numerador se obtiene,

$$M_{x,n} = -\frac{\int_o^n l'(x+t)\,dt}{\int_o^n l(x+t)\,dt} =$$

$$= \frac{l_x - l_{x+n}}{\int_o^n l(x+t)\,dt} = \frac{l_x - l_{x+n}}{L_{x,n}}$$

Como $L_{x,n} = nl_{x+n} + a_{x,n}\, d_{x,n}$, $d_{x,n} = l_x - l_{x+n}$ se obtiene,

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{1 - M_{x,n} \cdot a_{x,n}}{1 + M_{x,n}(n - a_{x,n})}$$

El complemento a la unidad de los valores l_{x+n}/l_x calculados proporciona las $q_{x,n}$,

$$q_{x,n} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{n \cdot M_{x,n}}{1 + M_{x,n}(n - a_{x,n})}$$

para cuyo cálculo a partir de unos ciertos valores de las $M_{x,n}$ se suponen,

$a_{0,1} = 0{,}07 + 1{,}7M_{0,1}$

$a_{1,4} = 1{,}5$

$a_{x,5} = 2{,}5$ para $x \geq 5$

El anterior supuesto de distribución de los fallecidos equivale al de una línea recta uniendo los puntos l_x y l_{x+n}.

Si se mantiene que P(x+t)=l(x+t), pero se considera otra forma más satisfactoria que una recta para l(x+t), como puede ser una curva cúbica, entonces es preciso interpolar la misma entre valores de l(x) con objeto de integrar y obtener $L_{x,n}$.

Para la obtención de la correspondiente función polinómica basta con interpolar, mediante la fórmula de Newton, un polinomio entre los puntos con abcisas x-5, x, x+5 y x+10, resultando entonces, para n=5,

$$L_{x,5} = \int_o^5 l(x+t)\,dt =$$

$$= \frac{65}{24}(l_x + l_{x+5}) - \frac{5}{24}(l_{x-5} + l_{x+10}) \quad [1]$$

Si se sustituye este valor de $L_{x,5}$ en la ecuación fundamental, se obtiene un resultado que, a diferencia de la situación anterior de interpolación lineal, no permite una solución para cada intervalo de edad por separado, sino que todas las l_x constituyen las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales; las l_x se determinarían conjuntamente una vez elegida la l_o arbitraria.

Sin embargo, en lugar de resolver el sistema de ecuaciones lineales, se pueden obtener los valores de las l_x mediante aproximaciones sucesivas.

Así, sustituyendo el valor obtenido para $L_{x,5}$ en la ecuación fundamental y despejando l_{x+5}/l_x se obtiene,

$$\frac{l_{x+5}}{l_x} = \frac{1 - \frac{65}{24} M_{x,5} + \frac{5}{24} M_{x,5} \frac{l_{x-5} + l_{x+10}}{l_x}}{1 + \frac{65}{24} M_{x,5}}$$

Por tanto, el valor mejorado de l_{x+5}, obtenido en una cierta iteración, que se designará por l^*_{x+5}, será,

$$l^*_{x+5} = l^*_x \frac{1 - \frac{65}{24} M_{x,5} + \frac{5}{24} M_{x,5} \frac{l^*_{x-5} + l_{x+10}}{l^*_x}}{1 + \frac{65}{24} M_{x,5}}$$

La anterior expresión permite obtener valores mejorados a partir de un conjunto arbitrario inicial de l_x, trabajando desde las edades menores hacia las mayores. Estos valores mejorados pueden serlo aún más en una segunda serie de aplicaciones de la misma expresión. En general, después de unas cuatro aplicaciones no aparecen cambios en los valores enteros de las l_x con $l_o=10^5$.

4 El modelo localmente estable

El modelo estacionario supone un flujo constante de nacimientos a través del tiempo, pero si de hecho este supuesto no se cumple, entonces la distribución por edades de la población observada diferirá de la estructura de la población estacionaria. Como consecuencia, las tasas de mortalidad de la tabla diferirán de las tasas de mortalidad observadas.

Por ello, se hace preciso introducir alguna hipótesis que tenga en cuenta la variación en el número de nacimientos, para lo cual se considera un modelo de población estable dentro de cada grupo de edades.

En una población estable el número de nacimientos varía con el tiempo según una función exponencial de la forma,

$$B_t = B_o e^{rt}$$

donde,

B_o son los nacimientos ocurridos en un cierto año que se toma como origen.

B_t son los nacimientos ocurridos t años después.

r es la tasa intrínseca de crecimiento del número de nacidos.

En el caso de que la tasa intrínseca de nacimientos sea variable de un grupo de edades a otro, se está ante una población **localmente estable**, también llamada seccionablemente estable, ya que dentro de cada grupo r es constante y el modelo responde al de población estable.

Las fórmulas del modelo localmente estable se obtienen sin más que sustituir esta nueva hipótesis sobre P(x) en la ecuación fundamental.

Así, si se supone que los que tienen x años eran inicialmente l_o, los que ahora tienen x+t años, reducidos por la misma mortalidad, serán actualmente $l(x+t)e^{-rt}$ que, introducido en la ecuación fundamental proporciona,

$$M_{x,5} = \frac{\int_o^5 e^{-r_x t}\, l(x+t)\,\mu(x+t)\, dt}{\int_o^5 e^{-r_x t}\, l(x+t)\, dt}$$

donde r_x es la tasa intrínseca de crecimiento de los nacimientos del grupo de edad.

Integrando por partes en el numerador y reordenando se obtiene,

$$l_{x+5} = e^{5r_x}\left(l_x - (M_{x,5} + r_x)\int_o^5 e^{-r_x t} l(x+t)dt\right)$$

El proceso iterativo se acelera si el valor de $L_{x,5}$ deducido en [1] a partir de un l_{x+5} obtenido en la pasada anterior se sustituye por el que se obtendrá del l_{x+5} actual que sería,

$$L^{*}_{x,5} + \frac{65}{24} e^{-5r_x} (l_{x+5} - l^{*}_{x+5})$$

Efectuada la sustitución, volviendo a despejar l_{x+5}, se obtiene,

$$l_{x+5} = \frac{e^{5r_x}\left(l_x - (M_{x,5} + r_x)(L^{*}_{x,5} - \frac{65}{24} e^{5r_x} l^{*}_{x+5})\right)}{1 + \frac{65}{24}(M_{x,5} + r_x)}$$

5 Información de base utilizada

La información utilizada en la elaboración de las tablas abreviadas de mortalidad para el año 1998, contenidas en el presente volumen, puede resumirse en:

A. Los flujos de defunciones clasificadas por comunidad autónoma de residencia, sexo y grupo de edad del fallecido, del Movimiento Natural de la Población de los años 1998 y 1999.

B. Los efectivos de población por comunidades autónomas, sexo y grupos de edad, a 31 de diciembre de 1998, correspondientes a la revisión de las proyecciones de población elaboradas por el INE a partir del Censo de Población de 1991[1].

[1] *Proyecciones de la población de España calculadas a partir del Censo de Población 1991. Evaluación y revisión.* INE 2001.