ESTADISTICA ESPAÑOLA
núm. 116, 1988 págs. 5 a 34

Estadística de Valores Extremos. Distribuciones Asintóticas

por
ENRIQUE CASTILLO RON
Catedrático de Matemática Aplicada
Universidad de Cantabria

RESUMEN

Se trata de un artículo que analiza el estado del conocimiento sobre el problema de la distribución, aislada y conjunta, de los estadísticos de orden de muestras aleatorias simples o dependientes, así como de las distribuciones asintóticas de los extremos (máximo y mínimo), los dominios de atracción y la distribución penúltima. También se analizan las distribuciones límites de los estadísticos de orden alto o bajo, moderadamente alto o bajo y centrales, tanto para el caso de independencia como para el de dependencia.

Palabras clave: estadísticos de orden, distribuciones asintóticas, dominios de atracción, dependencia.

Clasificación AMS: 62G30, 62E20, 62H10.

INDICE

1. ORIGENES, INTRODUCCION Y MOTIVACION

Resulta difícil, si no imposible, dar con precisión el origen de la Estadística de los valores extremos, ya que son muchas las referencias en la literatura existente de temas que tocan o bordean el tema tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Así, Chapplin (1880, 1882) se plantea ya el problema del efecto del tamaño en la resistencia de materiales, que es un problema de valores extremos (mínimos), Dodd (1923) estudia el problema de las distribuciones del máximo y del mínimo de una muestra, y Tippett (1925) analiza el mismo problema para poblaciones normales. Sin embargo, no puede asegurarse que estos problemas no fueran tomados o inspirados en otros trabajos, o sugeridos por otros investigadores. No obstante, lo que sí puede decirse es que uno de los resultados centrales, que más influencia ha tenido sobre su desarrollo, fue la demostración, por Fréchet (1927) y Fisher y Tippett (1928), de que sólo son posibles tres familias paramétricas de distribuciones límites para máximos y sus equivalentes para mínimos. A partir de ese momento empiezan a proliferar los trabajos en este área que no deja de crecer hasta nuestros días.

Es entonces cuando resurge el problema de la influencia del tamaño en la resistencia y se pone de moda, dando lugar a trabajos muy interesantes como los de Peirce (1926), Peterson (1930), Weibull (1939), Afanas'ev (1940), Kontorova (1940, 1943), Gillet (1940), Tucker (1941, 1945), Gurney (1945, 1947), Fowler (1945), Gurney y Pearson (1947), Daniels (1945), Epstein (1948) y Epstein and Hamilton (1948), entre otros.

De gran interés en el inicio de esta especialidad fueron también los trabajos de Finetti (1932), Gumbel (1934, 1935a, b), Mises (1936) y Rice (1939), que abordaron el problema de la distribución de los extremos: máximo y mínimo de una muestra, y que culminaron con la prueba en forma general, por Gnedenko (1943), del teorema de los tipos de extremos. A partir de entonces se publican multitud de trabajos, la mayor parte relacionados con aplicaciones, hasta que aparece el libro "Statistics of extremes" de Gumbel (1958), que supone otro de los hitos más importantes en la historia de la Estadística de los valores extremos.

Las contribuciones más importantes de los 25 años siguientes, entre las que destacan las contribuciones al caso de dependencia y los resultados referentes al caso multivariado, han sido recogidas por Galambos (1978) y Leadbetter (1983). De ahí al momento actual surgen infinidad de contribuciones al tema de extremos cuya descripción exhaustiva sale fuera del objeto de este trabajo. Para referencias bibliográficas sobre el tema consultar Galambos (1978, 1987), Harter (1978a, b), Leadbetter et al. (1983) o Castillo (1988).

Una de las razones fundamentales del éxito y desarrollo logrado por la Estadística de valores extremos es su relación con el diseño y proyecto en Ingeniería. En esta especialidad, el diseño viene casi siempre condicionado por los extremos (máximos, mínimos o estadísticos de orden próximo). Así, una estructura de edificación debe diseñarse para resistir las máximas cargas, los máximos vientos, los máximos gradientes de temperatura y los máximos terremotos, una obra de protección contra riadas se proyecta para soportar los máximos caudales, un embalse para abastecimiento de agua a un núcleo urbano se diseña para dar servicio bajo las condiciones peores de sequía, un dique se proyecta para resistir las olas mayores, etc. Por ello, algunas especialidades ingenieriles, como la Meteorología, la Ingeniería Estructural, la Ingeniería Oceanográfica, la Ingeniería Hidraúlica, la Resistencia de Materiales, la Ingeniería Eléctrica, la Ingeniería de Tráfico, etc. dependen inevitablemente de la Estadística de valores extremos.

La Estadística de los valores medios, que rindió culto supremo a la ley normal, no es válida para resolver el problema de extremos y, por tanto, se necesita una herramienta diferente. Algunas de las preguntas que deben resolverse en este área son:

a) ¿Cómo se distribuyen el máximo y el mínimo de una muestra?

b) ¿Cómo se distribuye un estadístico de orden cualquiera?

c) ¿Cuáles son las distribuciones asintóticas de estos estadísticos, en especial las del máximo y el mínimo?, es decir, ¿qué pasa cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito?

d) ¿qué influencia tiene la dependencia de los valores de la muestra en los resultados anteriores?

El objeto del presente artículo es dar una panorámica general y muy resumida de los principales problemas y resultados prácticos de la Estadística de valores extremos. Por ello, son muchas las omisiones, en contenido y referencias, impuestas por su objetivo y por la limitación de espacio. Se comienza con un apartado dedicado a los estadísticos de orden en el que se dan las distribuciones conjuntas de varios estadísticos de orden, no sólo en el caso de muestras aleatorias simples sino también en el de dependencia. A continuación, se analiza el problema de las distribuciones asintóticas de los extremos y el de la determinación del dominio de atracción cuando la función de distribución de la población es conocida y cuando sólo se conoce una muestra de la misma. Seguidamente, se plantea y da solución al problema de las distribuciones asintóticas de los estadísticos de orden k. Finalmente, se estudian los problemas anteriores en el caso de muestras dependientes, analizando en particular el caso de las sucesiones m-dependientes, los modelos de media-móvil y las gausianas.

2. ESTADISTICOS DE ORDEN

No cabe concebir un entendimiento completo de las distribuciones asintóticas de extremos sin un conocimiento previo de las de los estadísticos de orden. Por ello, se comienza este apartado dando las funciones de densidad y distribución de un estadístico de orden aislado y las conjuntas de varios de ellos. Seguidamente se analiza el caso de muestras no aleatorias simples o dependientes.

Definición 1. *(Estadístico de orden).-* Sea $(X_1, X_2,..., X_n)$ una muestra procedente de una población. Si los valores de la secuencia $X_1, X_2,..., X_n$ se ordenan en orden creciente, $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq ... \leq X_{n:n}$, de magnitud, entonces el miembro r-ésimo de esta nueva secuencia se denomina estadístico de orden r de la muestra dada.

Entre los estadísticos de orden destacan el primero y el último, que son el mínimo, $X_{1:n} = \mathrm{Min}(X_1, X_2,..., X_n)$, y el máximo, $X_{n:n} = \mathrm{Max}(X_1, X_2,..., X_n)$ de la muestra, respectivamente, y que juegan un papel preponderante en las aplicaciones.

2.1. *Estadísticos de orden procedentes de muestras aleatorias simples*

En esta sección se supone que $X_1, X_2,..., X_n$ son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $F(x)$.

2.1.1. Distribución de un estadístico de orden

La función de distribución, $F_{X_{r:n}}(x)$, del estadístico de orden k es (ver David (1981))

$$F_{X_{r:n}}(x) = P\,[\,X_{r:n} \leq x\,] = 1 - F_{m_n(x)}\,(r-1) = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} F^k(x)\,[\,1 - F(x)\,]^{n-k} =$$

$$= r\binom{n}{r} \int_0^{F(x)} u^{r-1}(1-u)^{n-r}\,du = I_{F(x)}\,(r,n-r+1) \tag{1}$$

donde $F_{X_{r:n}}(x)$ es la función de distribución de $X_{r:n}$ y $I_p(a,b)$ es la función beta incompleta.

Si la población es absolutamente continua, entonces $X_{r:n}$ tiene una función de densidad dada por la derivada de (1) con respecto a x

$$f_{X_{r:n}}(x) = r\binom{n}{r} F^{r-1}(x)\,[\,1 - F(x)\,]^{n-r} f(x) =$$

$$= F^{r-1}(x)\,[\,1 - F(x)\,]^{n-r} f(x) \,/\, B(r,n-r+1) \tag{2}$$

donde $B(a,b)$ es la función Beta.

2.1.2. Distribución conjunta de varios estadísticos de orden

Sean $X_{r_1:n}, X_{r_2:n},..., X_{r_k:n}$, con $r_1 < r_2 < ... < r_k$ k estadísticos de orden de una muestra aleatoria simple de tamaño n procedente de una población con función de densidad $f(x)$ y función de distribución $F(x)$. Con objeto de obtener la distribución conjunta de este conjunto de estadísticos de orden, considérese el suceso $\{\, x_j \leq X_{r_j:n} < x_j+\Delta x_j;\ 1 \leq j \leq k \,\}$ para valores pequeños de Δx_j, $1 \leq j \leq k$ (ver figura 1). Es decir, k de los elementos de la muestra pertenecen a los intervalos $(x_j, x_j+\Delta x_j)$ para $1 \leq j \leq k$ y el resto están distribuidos de manera que exáctamente $r_j - r_{j-1} - 1$ pertenecen al intervalo (x_{j-1}, x_j) para $1 \leq j \leq k$, donde $r_0=0$, $r_{k+1}=n+1$, $x_0=-\infty$ y $x_{k+1}=\infty$.

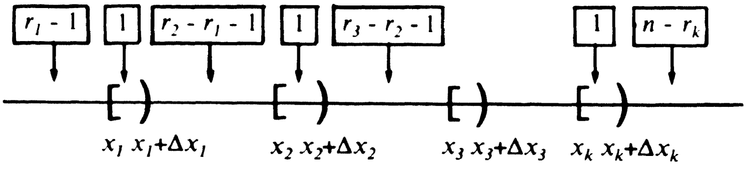

Figura 1.– Ilustración del experimento multinomial

Considérese el siguiente experimento multinomial con $2k+1$ sucesos posibles: Obténgase, al azar, n elementos de la población y determínese a cual de los $2k+1$ intervalos de la figura 1 pertenecen. Puesto que se considera independencia y reemplazamiento, el conjunto de los números de elementos en los diferentes intervalos constituye una variable multinomial:

$$M\,\{\, n; f(x_1)\Delta x_1, f(x_2)\Delta x_2, \ldots, f(x_k)\Delta x_k, [F(x_1) - F(x_0)], [F(x_2) - F(x_1)], \ldots, [F(x_{k+1}) - F(x_k)]\,\}$$

donde los parámetros son n (el tamaño de la muestra) y las probabilidades asociadas con los $2k+1$ intervalos. En consecuencia, las propiedades de la variable aleatoria multinomial pueden ser utilizadas y la función de densidad conjunta de los k estadísticos de orden anteriores resulta ser

$$f_{r_1,r_2,\ldots,r_k:n}(x_1,x_2,\ldots,x_k) = n\,!\ \prod_{i=1}^{k} f(x_i) \prod_{j=1}^{k+1} \{\, [F(x_j) - F(x_{j-1})]^{r_j - r_{j-1} - 1} \,/\, (r_j - r_{j-1} - 1)\,!\,\}$$

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \tag{3}$$

2.1.3. Otras distribuciones de interés

A partir de la distribución (3) pueden obtenerse facilmente las de otros estadísticos de interés como la del rango de una muestra, la diferencia de dos estadísticos de orden cualesquiera o distribuciones condicionales. De éstas últimas tienen mucho interés, por su aplicación en simulación, las distribuciones condicionadas de dos estadísticos de orden consecutivos. Así, la función de densidad de $X_{i:n}$ condicionada por $X_{i+1:n} = x_2$, resulta (ver Castillo (1988)).

$$f_{X_{i:n} / X_{i+1:n}}(x_1/x_2) = f_{i,i+1:n}(x_1,x_2) \,/\, f_{i+1:n}(x_2) = i f(x_1)\, F^{i-1}(x_1) \,/\, F^{i}(x_2) \tag{4}$$

y su función de distribución

$$F_{X_{i:n} / X_{i+1:n}}(x_1/x_2) = [\ F(x_1) \,/\, F(x_2)\ ]^{i} \tag{5}$$

X (X > 0), es una variable aleatoria con función de distribución H(x). Entonces, la intensidad del terremoto de máxima intensidad durante un periodo de duración t tiene por función de distribución

$$F_{X_{max}}(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} exp\{-\mu t\}(\mu t)^n H^n(x)/n! = exp\{-\mu t(1-H(x))\}\ ;\ x \geq 0 \\ 0 \qquad \text{en otro caso} \end{cases} \tag{12}$$

Δ

2.2. *Estadísticos de orden procedentes de muestras dependientes*

En esta sección se analiza el caso de dependencia y se obtienen fórmulas que son válidas para obtener las funciones de distribución, exactas o aproximadas, de los estadísticos de orden en el caso general.

Sean $C_1, C_2, ..., C_n$ n sucesos arbitrarios. Entonces, se verifica la siguiente fórmula de inclusión-exclusión:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(C_{i_1} \cap C_{i_2}) + \\ + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap C_{i_3}) - ... + (-1)^{n+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_n \leq n} P(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap ... \cap C_{i_n}) \tag{13}$$

Llamando ahora

$$S_{k,n} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} P(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap ... \cap C_{i_k}) \tag{14}$$

la expresión (13) puede escribirse

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} \underline{C}_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i S_{i,n} \tag{15}$$

donde $\underline{C}_i$ es el complemento de C_i, y

$$S_{0,n} = 1 \tag{16}$$

Por el carácter alternante de los signos más y menos en (13) y la definición de $S_{i,n}$, las sumas truncadas dan límites superiores e inferiores a los valores de los miembros de la izquierda. Más precisamente

$$\sum_{i=0}^{2s+1} (-1)^i S_{i,n} \leq P(m_n=0) = P(\bigcap_{i=1}^{n} \underline{C}_i) \leq \sum_{i=0}^{2s} (-1)^i S_{i,n}\ ;\ 0 \leq s \leq int\,[\,(n-1)/2] \tag{17}$$

donde m_n es el número de C_i que ocurren y int [x] es la parte entera de x.

Análogamente, las funciones de densidad y distribución de $X_{i+1:n}$ condicionadas por $X_{i:n} = x_1$ son

$$f_{X_{i+1:n}/X_{i:n}}(x_2/x_1) = (n-i)\, f(x_2)\, [\,1-F(x_2)\,]^{n-i-1} \,/\, [\,1-F(x_1)\,]^{n-i} \qquad x_2 \geq x_1 \tag{6}$$

y

$$F_{X_{i+1:n}/X_{i:n}}(x_2/x_1) = 1 - \{\,[\,1-F(x_2)\,] \,/\, [\,1-F(x_1)\,]\,\}^{n-i}\,;\; x_2 \geq x_1 \tag{7}$$

que para el caso de una población uniforme resultan

$$F_{X_{i:n}/X_{i+1:n}}(x_1/x_2) = (x_1/x_2)^i\,;\; x_2 \geq x_1 \tag{8}$$

$$F_{X_{i+1:n}/X_{i:n}}(x_2/x_1) = 1 - [\,(1-x_2) \,/\, (1-x_1)\,]^{n-i}\,;\; x_2 \geq x_1 \tag{9}$$

Estas dos últimas expresiones son fundamentales para la simulación directa de los estadísticos de orden, y constituyen la base de los algoritmos para su simulación (ver Castillo (1988)). Esta simulación directa evita tener que ordenar la muestra, lo cual consume mucho tiempo de ordenador.

2.1.4. Estadísticos de orden procedentes de muestras de tamaño aleatorio

Hasta ahora se ha considerado el caso de muestras de tamaño fijo. Sin embargo, hay muchos casos prácticos en los que el tamaño de la muestra es claramente aleatorio. En ellos las expresiones dadas no son válidas.

Si la función de probabilidad del tamaño de muestra es p_N = P[n=N], y el estadístico en estudio, X, (estadístico de orden, diferencia de dos estadísticos de orden, etc.) tiene, para tamaño de muestra fijo N, una función de densidad $f_X(x;N)$ y una función de distribución $F_X(x;N)$, entonces el teorema de la probabilidad total permite escribir que las funciones de densidad y de distribución del estadístico X vienen dadas por

$$g_X(x) = \sum_N p_N\, f_X(x;N) \tag{10}$$

$$G_X(x) = \sum_N p_N\, F_X(x;N) \tag{11}$$

donde el signo sumatorio se extiende a todos los valores posibles de N.

Ejemplo 1. *(Intensidades de terremotos).*– La ocurrencia de terremotos en una región dada es un proceso de Poisson de intensidad μ terremotos/año, y su intensidad

La probabilidad del suceso $\{ m_n=t \}$ puede ser escrita en función de $S_{i,n}(i=t,t+1,..., n)$ mediante (ver Galambos (1978) p. 19).

$$P(m_n=t) = \sum_{i=0}^{n-t} (-1)^i \binom{i+t}{t} S_{i+t,n} \tag{18}$$

La aplicación ahora de las fórmulas anteriores a los sucesos

$$C_i(x) = \{ X_i \leq x \} \tag{19}$$

$$\underline{C}_i(x) = \{ X_i > x \} \tag{20}$$

conduce a la obtención de las funciones de distribución de los estadísticos de orden $X_{r:n}$ y $X_{n-r+1:n}$

$$F_{X_{r:n}}(x) = P[X_{r:n} \leq x] = P[m_n(x) \geq r] = P[\underline{m}_n(x) \leq n - r] \tag{21}$$

$$F_{X_{n-r+1:n}}(x) = P[X_{n-r+1:n} \leq x] = P[\underline{m}_n(x) < r] \tag{22}$$

donde $m_n(x)$ y $\underline{m}_n(x)$ son el número de C_i y $\underline{C}_i$ $(i=1,2,..., n)$ que ocurren en la muestra, respectivamente y que satisfacen la relación

$$m_n(x) + \underline{m}_n(x) = n \tag{23}$$

Puesto que ahora $C_i(x)$ y $\underline{C}_i(x)$ dependen de x, los valores asociados de $S_{i,n}$ y $\underline{S}_{i,n}$ serán denotados por $S_{i,n}(x)$ y $\underline{S}_{i,n}(x)$, respectivamente.

Ejemplo 2.– *(Distribución del máximo).–* Para $r=1$, la expresión (22) da

$$F_{X_{n:n}}(x) = P[X_{n:n} \leq x] = P[\underline{m}_n(x) < 1] = P[\underline{m}_n(x) = 0]$$

resultando

$$\sum_{i=0}^{2s+1} (-1)^i \underline{S}_{i,n}(x) \leq F_{X_{n:n}}(x) \leq \sum_{i=0}^{2s} (-1)^i \underline{S}_{i,n}(x) \tag{24}$$

donde $\underline{S}_{i,n}(x)$ son los valores de (14) cuando C_i es sustituido por $\underline{C}_i$.

Las dos desigualdades de la expresión anterior se convierten en igualdades para $2s=n$ ó $2s+1=n$. En este caso dan la función de distribución para el máximo en el caso general. Δ

Ejemplo 3.– *(Distribución del mínimo).*– Para r=1, la expresión (21) conduce a

$$F_{X_{1:n}}(x) = P [X_{1:n} \leq x] = P [m_n(x) \geq 1] = 1 - P [m_n(x) = 0]$$

y entonces resulta

$$\sum_{i=0}^{2s+1} (-1)^i S_{i,n}(x) \leq 1 - F_{X_{1:n}}(x) \leq \sum_{i=0}^{2s} (-1)^i S_{i,n}(x) \tag{25}$$

que da las cotas o los valores exactos para la función de distribución del mínimo. Δ

Para más información sobre estadísticos de orden ver David (1983).

3. DISTRIBUCIONES ASINTOTICAS DE LOS ESTADISTICOS DE ORDEN

3.1. *Caso de muestras aleatorias simples*

En el apartado 2, se han dado las funciones de densidad y distribución de un estadístico de orden y las conjuntas de k de ellos. Aunque un análisis superficial pudiera conducir a la idea de que ello resuelve el problema, lo cierto es que no es así, ya que se dan muchos casos en la práctica en los que ello no es suficiente, e incluso las expresiones dadas resultan completamente inútiles. Esto ocurre en los casos siguientes:

(i) Cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito.

(ii) Cuando la función de distribución, F(x), de la población es desconocida.

(iii) Cuando el tamaño de la muestra es desconocido.

En este apartado se aborda alguno de estos problemas y se muestra el resultado más importante (teorema de los tipos) de la Estadística de los valores extremos. En lo que sigue se supone que se trabaja con distribuciones continuas, por lo que la convergencia en ley (convergencia débil) será sustituida por la convergencia puntual.

3.1.1. Distribuciones asintóticas de máximos y mínimos

3.1.1.1. Planteamiento del problema

Tal como se ha mostrado en el apartado 2, las funciones de distribución del máximo, Z_n, y del mínimo, W_n, de una muestra de tamaño n procedente de una población con función de distribución F(x) son

$$H_n(x) = \text{Prob } [Z_n \leq x] = F^n(x) \tag{26}$$

y

$$L_n(x) = \text{Prob } [W_n \leq x] = 1 - [1 - F(x)]^n \tag{27}$$

Cuando n tiende a infinito se tiene

$$\lim_{n \to \infty} F^n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } F(x) = 1 \\ 0 & \text{si } F(x) < 1 \end{cases} \tag{28}$$

$$\lim_{n \to \infty} 1 - [1 - F(x)]^n = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) = 0 \\ 1 & \text{si } F(x) \leq 1 \end{cases} \tag{29}$$

lo que significa que las distribuciones límites son degeneradas.

Con objeto de evitar la degeneración se buscan transformaciones lineales $Y = a_n + b_n.x$ donde a_n y b_n son constantes, que dependen de n, y tales que las distribuciones límites

$$\lim_{n \to \infty} H_n(a_n+b_n.x) = \lim_{n \to \infty} F^n(a_n+b_n.x) = H(x) \ ; \ \text{para todo } x \tag{30}$$

$$\lim_{n \to \infty} L_n(c_n+d_n.x) = \lim_{n \to \infty} 1 - [1 - F(c_n+d_n.x)\ ]^n = L(x) \ ; \ \text{para todo } x \tag{31}$$

no degeneren.

Nótese que se supone que $H(x)$ y $L(x)$ son continuas y por ello, (30) y (31) son equivalentes a la convergencia débil.

Definición 2.– *(Dominio de atracción de una distribución).–* De una distribución, $F(x)$, se dice que pertenece al dominio de atracción para máximos de una distribución dada, $H(x)$, cuando satisface (30) para algunas sucesiones $\{a_n\}$ and $\{b_n > 0\}$. Análogamente, cuando $F(x)$ satisface (31) se dice que pertenece al dominio de atracción para mínimos de $L(x)$. Δ

El problema de las distribuciones asintóticas de extremos puede entonces plantearse así:

(*a*) Encontrar condiciones bajo las cuales se verifican (30) y (31).

(*b*) Dar reglas para construir las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

(*c*) Encontrar qué distribuciones pueden ocurrir como $H(x)$ y $L(x)$.

3.1.1.2. Distribuciones límites y dominios de atracción

La respuesta al tercer problema la da el siguiente teorema (ver Fisher y Tippett (1928), Tiago de Oliveira (1958, 1959) ó Galambos (1978)).

Teorema 1.– *(Distribuciones límites admisibles para máximos).–* Los únicos tres tipos de distribuciones límites no degeneradas, $H(x)$, que satisfacen (30) son

$$\text{FRECHET: } H_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} exp(-x^{-\gamma}) \; if \; x > 0 \\ 0 \quad \text{en otro caso} \end{cases} \tag{32}$$

$$\text{WEIBULL: } H_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 \quad if \; x \geq 0 \\ exp(-(-x)^{\gamma}) \quad \text{en otro caso} \end{cases} \tag{33}$$

$$\text{GUMBEL: } H_{3,0}(x) = \quad exp\,[-\,exp\,(-x)\,]\;;\; -\infty < x < \infty \tag{34}$$

Teorema 2.– *(Distribuciones límites admisibles para mínimos).*– Los únicos tres tipos de distribuciones límites no degeneradas, L(x), que satisfacen (31) son

$$\text{FRECHET: } L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - exp[-(-x)^{-\gamma}] \; if \; x < 0 \\ 1 \quad \text{en otro caso} \end{cases} \tag{35}$$

$$\text{WEIBULL: } L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^{\gamma}) \; if \; x > .0 \\ 0 \quad \text{en otro caso} \end{cases} \tag{36}$$

$$\text{GUMBEL: } L_{3,0}(x) = \quad 1 - exp\,[-\,exp\,(x)\,]\;;\; -\infty < x < \infty \tag{37}$$

Con objeto de conocer los dominios de atracción de una distribución dada y las sucesiones $\{a_n\}$ ó $\{c_n\}$ y $\{b_n > 0\}$ ó $\{d_n > 0\}$ asociadas, tienen interés los siguientes teoremas (ver Galambos (1978)).

Teorema 3.– *(Dominio de atracción para máximos de una distribución dada).*– La distribución F(x) pertenece al dominio de atracción para máximos de

(i) $H_{1,\gamma}(x)$ si, y sólo si, $\omega(F) = \infty$ y

$$\lim_{t \to \infty} [1 - F(tx)\,] \,/\, [1 - F(t)\,] = x^{-\gamma}\;;\; \gamma > 0 \tag{38}$$

donde $\omega(F)$ es el límite superior de la distribución F(x).

(ii) $H_{2,\gamma}(x)$ si, y solamente si, $\omega(F) < \infty$ y la función

$$F^*(x) = F\,[\omega(F) - 1/x]\;;\; x > 0 \tag{39}$$

satisface (38).

(iii) $H_{3,0}(x)$ si, y solamente si,

$$\lim_{n \to \infty} n\,\{\,1 - F[X_{1-1/n} + x(X_{1-1/(ne)} - X_{1-1/n})\,]\,\} = exp(-x) \tag{40}$$

donde X_{α} es el percentil 100α de F(x).

Las constantes de normalización a_n y b_n pueden ser elegidas como

(i) $a_n = 0$; $b_n = inf\{ x: 1\text{-F}(x) \leq 1/n \}$ (41)

(ii) $a_n = \omega(\text{F})$; $b_n = \omega(\text{F}) - inf\{ x: 1 - \text{F}(x) \leq 1/n \}$ (42)

(iii) $a_n = inf\{ x: 1 - \text{F}(x) \leq 1/n \}$; $b_n = [1 - \text{F}(a_n)]^{-1} \int_{a_n}^{\omega(F)} [1 - \text{F}(y)]\, dy$ (43)

ó $b_n = inf\{ x: 1 - \text{F}(x) \leq 1/(ne) \} - a_n$ (44)

Δ

Teorema 4.– *(Dominio de atracción para mínimos de una distribución dada).–* La distribución F(x) pertenece al dominio de atracción para mínimos de

(i) $\text{L}_{1,\gamma}(x)$ si, y solamente si, $\alpha(\text{F}) = -\infty$ y

$$\lim_{t \to -\infty} \text{F}(tx) / \text{F}(t) = x^{-\gamma} \ ; \ \gamma > 0 \qquad (45)$$

donde α(F) es el límite inferior de la distribución F(x).

(ii) $\text{L}_{2,\gamma}(x)$ si, y solamente si, $\alpha(\text{F}) > -\infty$ y la función

$$\text{F}^*(x) = \text{F}[\alpha(\text{F}) - 1/x] \ ; \ x < 0 \qquad (46)$$

satisface (45).

(iii) $\text{L}_{3,0}(x)$ si, y solamente si,

$$\lim_{n \to \infty} n \{ \text{F}[\text{X}_{1/n} + x(\text{X}_{1/(ne)} - \text{X}_{1/n})] \} = exp(-x) \qquad (47)$$

Las constantes de normalización c_n y d_n pueden ser elegidas como

(i) $c_n = 0$; $d_n = sup\{ x: \text{F}(x) \leq 1/n \}$ (48)

(ii) $c_n = \alpha(\text{F})$; $d_n = sup\{ x: \text{F}(x) \leq 1/n \} - \alpha(\text{F})$ (49)

(iii) $c_n = sup\{ x: \text{F}(x) \leq 1/n \}$; $d_n = \text{F}(c_n)^{-1} \int_{\alpha(\text{F})}^{c_n} \text{F}(y)\, dy$ (50)

ó $d_n = sup\{ x: \text{F}(x) \leq 1/(ne) \} - c_n$ (51) Δ

Algunas implicaciones prácticas de los teoremas anteriores son:

(*a*) Sólo tres distribuciones (Frechet, Weibull y Gumbel) pueden ocurrir como distribuciones límites de máximos y mínimos.

(*b*) Se dan reglas para determinar si una distribución dada $F(x)$ pertenece al dominio de atracción de estas tres distribuciones.

(*c*) Se dan reglas para determinar secuencias $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ ó $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$ que verifican esas condiciones.

(*d*) Una distribución con límite no finito en la cola de interés no puede pertenecer a un dominio de atracción de Weibull.

(*e*) Una distribución con límite finito en la cola de interés no puede pertenecer a un dominio de atracción de Frechet.

Las Expresiones (30) y (31) junto con los teoremas anteriores permiten, para valores suficientemente grandes de n, la sustitución de $F^n(a_n+b_nx)$ por $H(x)$ ó $F^n(x)$ por $H((x-a_n)/b_n)$ o, lo que es equivalente, para valores grandes de x, la sustitución de $F(x)$ por $H^{1/n}[(x-a_n)/b_n]$. La importancia práctica de esta sustitución es que para cualquier distribución continua con función de distribución, $F(x)$, sólo son posibles tres familias. Por ello, para extremos, los infinitos grados de libertad que se tienen con la distribución de la población se reducen a tres familias paramétricas con parámetros asociados a a_n y b_n.

3.1.1.3. Formas de Von–Mises

Las tres distribuciones límites (32)-(34) cuando los parámetros, a_n y b_n, se pasan al miembro de la derecha pueden incluirse simultáneamente en la siguiente expresión analítica

$$H_c(x,\lambda,\delta) = exp\,\{ - \{ 1+c[\,(x-\lambda)/\delta\,]\}^{-1/c} \} \;;\; 1+c[\,(x-\lambda)/\delta\,] \geq 0 \qquad (52)$$

que se denomina forma de Von Mises.

Para $c>0$, $c<0$ y $c=0$ se obtienen las familias de Frechet, Weibull y Gumbel, respectivamente.

Nótese que para $c=0$ (52) debe interpretarse en un sentido límite, es decir, para $c=0$

$$H_0(x;\lambda,\delta) = exp\,\{ - exp\,[\,-(x-\lambda)/\delta\,]\} \qquad (53)$$

Similarmente, las tres distribuciones límites (35)-(37) pueden ser incluídas en la forma de Von–Mises

$$L_c(x;\lambda,\delta) = 1-exp\,\{ - \{ 1+c[\,(\lambda-x)/\delta\,]\}^{-1/c} \} \;;\; 1+c[\,(\lambda-x)/\delta\,] \geq 0 \qquad (54)$$

donde para $c>0$, $c<0$ y $c=0$ se obtienen las familias de Frechet, Weibull y Gumbel, respectivamente.

Para $c=0$ se tiene

$$L_0(x;\lambda,\delta) = 1 - exp\,\{ - exp\,[- (\lambda - x)/\delta] \} \tag{55}$$

En lo que sigue se utilizarán $H_c(x)$ y $L_c(x)$ en vez de $H_c(x;\lambda,\delta)$ y $L_c(x;\lambda,\delta)$, por simplicidad.

3.1.1.4. Dominio de atracción de una distribución dada

Los teoremas 3 y 4 permiten determinar el dominio de atracción para máximos y mínimos, respectivamente, de una distribución dada, $F(x)$.

En esta sección se dan dos teoremas (Castillo y Galambos (1986), Castillo (1988)) que dan un criterio diferente para identificar el dominio de atracción de una distribución. La ventaja principal de estos nuevos teoremas es que se utiliza una única regla en vez de las tres reglas diferentes que aparecen en los teoremas anteriores.

Teorema 5.– *(Dominio de atracción para máximos de una distribución dada).–* Una condición necesaria y suficiente para que una distribución continua, $F(x)$, pertenezca al dominio de atracción para máximos de $H_c(x)$ es que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F^{-1}[\,1-\varepsilon\,] - F^{-1}[\,1-2\varepsilon\,]}{F^{-1}[\,1-2\varepsilon\,] - F^{-1}[\,1-4\varepsilon\,]} = 2^c \tag{56}$$

Esto implica que

si $c < 0$, $F(x)$ pertenece a un dominio de atracción tipo Weibull,
si $c=0$, $F(x)$ pertenece a un dominio de atracción tipo Gumbel,
y si $c > 0$, $F(x)$ pertenece a un dominio de atracción tipo Frechet. Δ

Teorema 6.– *(Dominio de atracción para mínimos de una distribución dada).–* Una condición necesaria y suficiente para que una distribución continua, $F(x)$, pertenezca al dominio de atracción para mínimos de $L_c(x)$ es que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F^{-1}[\,\varepsilon\,] - F^{-1}[\,2\varepsilon\,]}{F^{-1}[\,2\varepsilon\,] - F^{-1}[\,4\varepsilon\,]} = 2^c \tag{57}$$

La tabla 1 da los dominios de atracción de algunas distribuciones comunes.

DOMINIO DE ATRACCION		
DISTRIBUCION	**PARA MAXIMOS**	**PARA MINIMOS**
Normal	Gumbel	Gumbel
Exponencial	Gumbel	Weibull
Log-normal	Gumbel	Gumbel
Gamma	Gumbel	Weibull
Gumbel_M	Gumbel	Gumbel
Gumbel_m	Gumbel	Gumbel
Rayleigh	Gumbel	Weibull
Uniforme	Weibull	Weibull
Weibull_M	Weibull	Gumbel
Weibull_m	Gumbel	Weibull
Cauchy	Frechet	Frechet
Pareto	Frechet	Weibull
Frechet_M	Frechet	Gumbel
Frechet_m	Gumbel	Frechet

M = Para máximos m = Para mínimos

TABLA 1.– DOMINIOS DE ATRACCION PARA ALGUNAS DISTRIBUCIONES COMUNES

3.1.1.5. Aproximación penúltima de extremos

Uno de los problemas que se presenta en la práctica es la baja velocidad de convergencia de la sucesión $F^n(a_n+b_nx)$ a la distribución límite $H(x)$. Ya Fisher y Tippett (1928) mencionan que la convergencia de $\Phi^n(a_n+b_nx)$ ($\Phi(x)$ es la función de distribución de la ley normal N(0,1)) a $H_3(x)$ es muy lenta e indican que $\Phi^n(a_n+b_nx)$ se aproxima más a una distribución de Weibull.

Gomes (1984) demuestra que una aproximación penúltima de Weibull o Frechet a distribuciones de tipo Gumbel es más próxima que la última misma. Para variables normales, Cohen (1982) prueba que el error en la aproximación de $\Phi^n(a_n+b_nx)$ mediante una sucesión de distribuciones de Weibull es uniformemente de orden $(logn)^{-2}$ en vez de orden $(logn)^{-1}$ cuando se utilizan sucesiones de Gumbel.

Nótese que en la aproximación clásica (última), la distribución de máximos $H_n(x)$ se aproxima por $H_0((x-a_n)/b_n)$, y en la aproximación penúltima por $H_{c_n}((x-a_n)/b_n)$, es decir que incluye una sucesión más $\{c_n\}$. Este nuevo grado de libertad explica la mejor calidad de la aproximación. Para otros ejemplos ver Gomes (1984) y Castillo (1988).

La implicación práctica más importante de todo lo anterior es que está justificado utilizar las distribuciones de Weibull y Frechet para aproximar distribuciones pertenecientes al dominio de atracción de Gumbel.

3.1.1.6. Selección de distribuciones límites a partir de la muestra

Una de las primeras etapas cuando se trabaja con un problema de extremos es la determinación el dominio de atracción de una distribución (Tiago de Oliveira (1981)). Los métodos descritos en el apartado 3 sólo son válidos cuando se conoce la distribución $F(x)$. Sin embargo, el problema más común se presenta en la práctica de muy diferente manera: sólo se conoce una muestra de la población y no, $F(x)$. Por tanto, los teoremas del apartado 3 no son aplicables directamente y son necesarias otras alternativas. Este problema es diferente del problema de contrastar que una muestra procede de una distribución de Von-Mises, ya que se trata de una propiedad asintótica y no exacta.

Puesto que el dominio de atracción de una distribución es conocido tan pronto como se conoce el parámetro c de la distribución de Von-Mises y éste sólo depende de la cola de interés, el problema de identificar este dominio de atracción puede hacerse equivalente al de estimar el parámetro c con valores de dicha cola. Por tanto cualquier método de estimación basado en estos principios puede ser válido. Varios de estos métodos han sido descritos por Castillo (1988), como los de Galambos (1980) y Pickands III (1975). A continuación se describe el método del cociente de pendientes en la cola (Castillo y Galambos (1986)).

El método consiste en ajustar, por mínimos cuadrados, dos rectas a la función de distribución empírica, representada en papel probabilístico de Gumbel, en dos zonas de la cola de interés y utilizar el cociente de sus pendientes. Más precisamente se utiliza el estadístico

$$S = S_{n_1,n_2} / S_{n_3,n_4} \tag{58}$$

donde $S_{i,j}$ es la pendiente de la recta ajustada por mínimos cuadrados a los r estadísticos de orden tales que $i \geq r \geq j$. Por tanto resulta

$$s = \frac{m\,\Sigma_{11} - \Sigma_{10}\,\Sigma_{01}}{m\,\Sigma_{20} - \Sigma_{10}\,\Sigma_{10}} \tag{59}$$

donde

$$m = n_j - n_i + 1 \tag{60}$$

$$\Sigma_{10} = \sum_{k=n_i}^{n_j} - \log\{-\log[(k\text{-}0.5)/n]\} \tag{61}$$

$$\Sigma_{01} = \sum_{k=n_i}^{n_j} x_k \tag{62}$$

$$\Sigma_{11} = \sum_{k=n_i}^{n_j} - x_k \log\{-\log[(k\text{-}0.5)/n]\} \tag{63}$$

$$\Sigma_{20} = \sum_{k=n_i}^{n_j} \{-\log\{-\log[(k\text{-}0.5)/n]\}\}^2 \tag{64}$$

y n es el tamaño de la muestra.

Nótese que $S_{i,j}$ es una combinación lineal de estadísticos de orden con coeficientes que suman cero, por lo que S es invariante frente a traslaciones y cambios de escala.

Los valores de n_1, n_2, n_3 y n_4 deben seleccionarse de forma que los datos estén en la cola de interés.

Si S es muy superior a 1 se puede decidir que el dominio de atracción es de tipo Weibull. Si, por el contrario, es muy inferior a 1, se decidirá en favor de Frechet. Para conocer el nivel de significación del test ver Castillo y Galambos (1986) o Castillo (1988).

3.1.2. Distribuciones límites de los estadísticos de orden k

En el apartado 3.1.1. se han estudiado las distribuciones límites del máximo y el mínimo. En éste se analizará el mismo problema para el estadístico de orden k.

3.1.2.1. Planteamiento del problema y definiciones previas

El problema se plantea de forma análoga al caso de máximos y mínimos, es decir, se trata de encontrar sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$ tales que las distribuciones límites

$$\lim_{n \to \infty} H_{n-r+1:n}(a_n+b_nx) = H_r(x) \tag{65}$$

$$\lim_{n \to \infty} L_{r:n}(c_n+d_nx) = L_r(x) \tag{66}$$

donde $H_{n-r+1:n}(x)$ y $L_{r:n}(x)$ son las funciones de distribución de los estadísticos de orden $(n-r+1)$ y r, respectivamente, sean no degeneradas.

En este caso estudiaremos algo más complejo, pues r será función de n. Por ello, se analizarán las distribuciones límites de $H_{r(n):n}(x)$ en tres casos que corresponden a las definiciones que siguen.

Definición 3.– *(Estadísticos de orden alto y bajo)*.– El estadístico de orden $X_{r:n}$ se dice de orden bajo y el estadístico de orden $X_{n-r+1:n}$, de orden alto si, cuando n tiende a infinito, $\lim r(n)=k < \infty$, donde k es un entero. Δ

Definición 4.– *(Estadísticos de orden moderadamente alto o bajo)*.– El estadístico de orden $X_{r:n}$ se dice de orden moderadamente bajo y el $X_{n-r+1:n}$, de orden moderadamente alto si, cuando n tiende a infinito, $\lim r(n) = \infty$ and $\lim r(n)/n = 0$. Δ

Definición 5.– *(Estadísticos de orden central)*.– $X_{r:n}$ y $X_{n-r+1:n}$ son estadísticos de orden central si, cuando n tiende a infinito, $\lim r(n)/n = p$ con $0 < p < 1$. Δ

3.1.2.2. Distribuciones límites para estadísticos de orden alto o bajo

Para estadísticos de orden alto o bajo se tiene el siguiente resultado. (Galambos (1978)).

Teorema 7.– *(Distribución asintótica de estadísticos de orden alto)*.– Si existen sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que

$$\lim_{n \to \infty} F^n(a_n+b_nx) = H_c(x) \tag{67}$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} H_{n-r+1:n}(a_n+b_nx) = \begin{cases} H_c(x) \sum_{i=0}^{r-1} (-\log H_c(x))^i / i\,! \,; & H_c(x) > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{68}$$

Δ

Este teorema tiene implicaciones prácticas muy importantes, porque:

(i) Garantiza la existencia de distribuciones límites de estadísticos de orden alto si existe distribución límite para el máximo,

(ii) asegura que pueden utilizarse las mismas sucesiones de constantes, *y*

(iii) da las distribuciones límites como una función de la distribución límite para máximos.

El teorema correspondiente para mínimos dice

Teorema 8. *(Distribución asintótica de estadísticos de orden bajo).–* Si existen sucesiones $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$ tales que

$$\lim_{n \to \infty} 1 - [1 - F(c_n+d_n x)]^n = L_c(x) \tag{69}$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} L_{r:n}(c_n+d_n x) = \begin{cases} 1 - [1-L_c(x)] \sum_{i=0}^{r-1} \{ -\log [1-L_c(x)] \}^i / i! \; ; \; L_c(x) < 1 \\ 1 \qquad \text{en otro caso} \end{cases} \tag{70}$$

Δ

3.1.2.3. Distribuciones límites para estadísticos de orden central

Para estadísticos de orden central se tiene el siguiente resultado (ver Galambos (1978).

Teorema 9. *(Normalidad asintótica de los estadísticos de orden centrales).–* Sea $F(x)$ una función de distribución continua con función de densidad continua asociada, $f(x)$. Sea $p_1, p_2, \ldots, p_k$ un conjunto de números reales en el intervalo (0,1) tales que $f(F^{-1}(p_j)) \neq 0$; $1 \leq j \leq k$. Si $r_j(n)$ son tales que

$$\lim_{n \to \infty} n^{1/2}[r_j(n)/n - p_j] = 0 \;\; ; \;\; 1 \leq j \leq k \tag{71}$$

entonces el vector

$$\sqrt{n}\,[X_{r_j:n} - F^{-1}(p_j)] \;\; ; \;\; 1 \leq j \leq k \tag{72}$$

es asintóticamente un vector normal k-dimensional con media cero y matriz de varianzas-covarianzas

$$p_i(1-p_j) / \{ f(F^{-1}(p_i)) f(F^{-1}(p_j)) \} \;\; ; \;\; p_i \leq p_j \tag{73}$$

Δ

El caso particular $k=1$ garantiza la normalidad asintótica de cualquier estadístico de orden central siempre que se verifique la condición (71).

Si la condición (71) se relaja son posibles muchas más distribuciones límites (ver Balkema y de Haan (1978a, 1978b)).

3.1.2.4. Distribuciones límites para otros estadísticos de orden

Otro resultado interesante es el dado por el siguiente teorema (ver Leadbetter et al. (1983)).

Teorema 10. Supóngase que para ciertas sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n > 0\}$, se verifica que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r(n) - n\,[\,1 - F(a_n + b_n x)\,]}{\{\,r(n)\,[\,1 - r(n)/n\,]\,\}^{1/2}} = \tau(x) \qquad (74)$$

con

$$\lim_{n \to \infty} [\,n - r(n)\,] = \infty \qquad (75)$$

Entonces, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} P[X_{n-r(n)+1:n} \leq a_n + b_n x] = H(x) \qquad (76)$$

donde

$$H(x) = \Phi(\tau\,(x)\,) \qquad (77)$$

Reciprocamente, si se verifica (76) para H(x) no-degenerada, entonces también se verifican (74) y (75). Δ

3.2. *Caso de muestras aleatorias dependientes*

3.2.1. Introducción

En muchos casos prácticos, la hipótesis de independencia de los elementos de la muestra no se verifica ni exacta ni aproximadamente, por lo que resulta necesario analizar casos más generales. En este contexto tienen sentido preguntas como: ¿son válidos los resultados del caso de independencia para este caso? ¿En qué condiciones? o, si no lo son, ¿cuáles son entonces las distribuciones límites? En este apartado se analiza este problema.

Antes de comenzar diremos que mientras que en el caso de independencia sólo son posibles tres familias de distribuciones límites, en el de dependencia cualquier distribución es posible. Por ello, es necesario añadir restricciones para evitar soluciones triviales y obtener un conjunto limitado de soluciones. En particular es interesante analizar las condiciones mínimas que conducen a la misma solución del caso de independencia.

3.2.2. Condiciones de dependencia

En este apartado se incluyen algunas condiciones de dependencia que juegan un papel importante en el comportamiento límite del caso de dependencia.

Definición 6.- *(Sucesión SM).-* Una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias se dice que satisface la condición SM (strong mixing) si

$$\phi(j) = | P(A \cap B) - P(A)P(B) |, \tag{78}$$

donde A es cualquier suceso generado por $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ y B es cualquier suceso generado por $(X_{n+j}, X_{n+j+1}, \ldots)$, tiende a cero cuando $j \to \infty$, verificándose esto para cualquier valor de n. Δ

La condición (78) es difícil de comprobar en la práctica. Chernick (1981) da el siguiente teorema para procesos de Markov de orden p.

Teorema 11. *(Condición SM para sucesiones de Markov).-* Sea $\{X_n\}$ una sucesión estacionaria de Markov de orden p. Si

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |dF(x_{m+1-p}, \ldots, x_m, x_{m+j+1}, \ldots, x_{m+j+p}) -$$

$$- dF(x_{m+1-p}, \ldots, x_m)\, dF(x_{m+j+1}, \ldots, x_{m+j+p}) | = 0 \tag{79}$$

donde las funciones F son las funciones de distribución conjuntas, entonces se satisface la condición SM. Δ

Definición 7. *(Condición D).-* Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias y sea $F_{i_1, i_2, \ldots, i_r}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ la función de distribución conjunta de $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_r}$. Se dice que se satisface la condición D si para cualquier conjunto de enteros $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ y $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$ tales que $j_1 - i_p \geq s$, y cualquier número real u se tiene

$$| F_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q}(u, \ldots, u) - F_{i_1 \ldots i_p}(u, \ldots, u)\, F_{j_1 \ldots j_p}(u, \ldots, u) | \leq g(s) \tag{80}$$

con

$$\lim_{s \to \infty} g(s) = 0 \tag{81}$$

Δ

Nótese que esta condición implica sólo sucesos definidos como intersecciones de sucesos del tipo $C_i = \{ X_i \leq u \}$, que son los únicos que influyen en el comportamiento de las distribuciones límites de los estadísticos de orden. Nótese también que la condición SM implica la condición D.

Definición 8.– *(Condición $D(u_n)$).–* Se dice que se verifica la condición $D(u_n)$ si para cualesquiera enteros que satisfacen la condición anterior, se tiene

$$| F_{i_1,\ldots,i_p\, j_1,\ldots,j_q}(u_n) - F_{i_1,\ldots,i_p}(u_n)\, F_{j_1,\ldots,j_p}(u_n) | \leq \alpha_{n,s} \tag{82}$$

donde $\alpha_{n,s}$ es no creciente en s y

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_{n,[n\delta]} = 0 \quad \text{Para cada } \delta > 0 \tag{83}$$

Δ

Nótese que la condición D implica la condición $D(u_n)$ para cualquier sucesión $\{u_n\}$.

El teorema siguiente muestra que la condición $D(u_n)$ se satisface para sucesiones de Markov de orden 1 (Chernick (1981b)).

Teorema 12. *(Condición $D(u_n)$ para sucesiones de Markov de orden 1).–* Sea $\{X_n\}$ una sucesión estacionaria de Markov de orden 1. Sea $F(x)$ la función de distribución de X_n. Entonces, se satisface $D(u_n)$ para cualquier sucesión $\{u_n\}$ tal que $\lim_{n \to \infty} F(u_n) = 1$. Δ

Definición 9. *(Condición $D'(u_n)$).–* Se dice que se verifica la condición $D'(u_n)$ para la sucesión estacionaria $\{X_n\}$ de variables aleatorias y la sucesión $\{u_n\}$ de constantes si

$$\lim_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} n \sum_{j=2}^{[n/k]} P[X_1 > u_n, X_j > u_n] = 0 \tag{84}$$

Δ

3.2.3. Distribuciones límites de máximos y mínimos

3.2.3.1. Sucesiones estacionarias

Se analiza en esta sección el caso de las sucesiones estacionarias. Comenzamos por la definición de éstas y de las sucesiones m-dependientes.

Definición 10. *(Sucesiones estacionarias).–* Una sucesión $X_1, X_2,\ldots$ de variables aleatorias se dice estacionaria si

$$F_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k) = F_{i_1+s,i_2+s,\ldots,i_k+s}(x_1,x_2,\ldots,x_k) \tag{85}$$

para cualquier conjunto de enteros k y s. Δ

Teorema 13. *(Condiciones suficientes para la coincidencia con el caso de independencia).–* Sea $\{X_n\}$ una sucesión estacionaria y sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales tales que

$$\lim_{n \to \infty} P[X_{n:n} \leq a_n + b_n x] = G(x) \tag{86}$$

Si la sucesión $\{u_n = a_n + b_n x\}$ satisface la condición $D(u_n)$ para cada x, entonces $G(x)$ es una de las tres distribuciones límites del caso de independencia. Δ

Teorema 14. *(Condiciones suficientes para distribución límite asociada).–* Sea $\{X_n\}$ una sucesión estacionaria de variables aleatorias y sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales. Supóngase que se verifican las condiciones $D(u_n)$ y $D'(u_n)$ con $u_n = a_n + b_n x$. Supóngase también que $\{\underline{X}_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que tienen la misma función de distribución que cada miembro de $\{X_n\}$. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} P[X_{n:n} \leq a_n + b_n x] = G(x) \tag{87}$$

si, y solamente si,

$$\lim_{n \to \infty} P[\underline{X}_{n:n} \leq a_n + b_n x] = G(x) \tag{88}$$

Δ

Nótese que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n > 0\}$ coinciden.

3.2.3.1.1. Sucesiones m-dependientes

Definición 11.– *(sucesión m-dependiente).–* Una sucesión $X_1, X_2, \ldots$ de variables aleatorias se dice m-dependiente si los vectores aleatorios $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})$ y $(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_k})$ donde

$$min(j_1, j_2, \ldots j_k) - min(i_1, i_2, \ldots, i_k) \geq m$$

son independientes. Δ

Nótese que X_i y X_j pueden ser dependientes si están próximas ($|i-j| < m$) pero son independientes si están lejanas.

Para sucesiones m-dependientes estacionarias se tiene el siguiente resultado (Galambos (1978))

Teorema 15.– *(Distribución asintótica de los máximos de sucesiones estacionarias m-dependientes).–* Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión estacionaria m-dependiente con función de distribución común $F(x)$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} n[1 - F(a_n + b_n x)] = u(x) \; ; \; 0 < u(x) < \infty \tag{89}$$

Entonces

$$\lim_{n \to \infty} P[Z_n < a_n + b_n x] = exp\,(-u(x)) \tag{90}$$

si, y solamente si

$$\lim_{u \to \omega(F)} \frac{P[\,X_1 \geq u,\, X_i \geq u\,]}{1 - F(u)} = 0 \; ; \; 1 \leq i < m \tag{91}$$

Δ

3.2.3.1.2. Modelos de media móvil

En esta sección se incluye un teorema que da la distribución límite de sucesiones que siguen modelos de media móvil (ver Leadbetter et al. (1983)).

Teorema 16. *(Distribución asintótica de los máximos para modelos de media móvil de distribuciones estables).–* Supóngase el siguiente modelo de media móvil

$$Y_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i X_{t-i} \; ; \; t \geq 1 \tag{92}$$

donde los X_t para $t > 1$ son variables aleatorias estables, es decir con función característica de la forma

$$\phi(t) = exp\,\{\, -\gamma^{\alpha} \,|t|^{\alpha}\, [\, 1 - i\,\beta\, h(t,\alpha)\, t \,/\, |t|\,]\,\} \tag{93}$$

donde

$$h(t,\alpha) = \begin{cases} 2\, log\,|t|\,/\,\pi & \text{si } \alpha = 1 \\ tan(\pi\alpha/2) & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{94}$$

y

$$\gamma \geq 0 \; ; \; 0 < \alpha \leq 2 \; ; \; |\beta| \leq 1 \tag{95}$$

Supóngase también que las constantes $C_i(-\infty < i < \infty)$ satisfacen

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |C_i|^{\alpha} < \infty \tag{96}$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i \, log \, |C_i| < \infty \text{ ; si } \alpha=1 \text{ , } \beta \neq 0 \tag{97}$$

Entonces, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} P[X_{n,n} \leq n^{1/\alpha} x] = \begin{cases} exp\{-K_{\alpha}(C_{+}^{\alpha}(1-\beta)+C_{-}^{\alpha}(1-\beta)\,]\, x^{-\alpha}\} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \tag{98}$$

donde

$$c_{+} = \max_{-\infty < i < \infty} max(0,C_i) \tag{99}$$

$$c_{-} = \max_{-\infty < i < \infty} max(0,-C_i) \tag{100}$$

$$K_{\alpha} = \Gamma(\alpha) \sin (\alpha \pi / 2) / \pi \tag{101}$$

Para el caso de modelos de media móvil de variables que pertenecen al dominio de atracción de Frechet ver Davis y Resnick (1985).

3.2.3.1.3. Sucesiones gausianas

Un caso muy importante de sucesiones estacionarias es el de las sucesiones normales o gausianas para el que se tienen los siguientes resultados (Galambos (1978)).

Teorema 17. *(Distribuciones asintóticas de sucesiones normales estacionarias).*– Si X_1, X_2,... es una sucesión estacionaria de variables normales N(0,1) con función de correlación r_m=E[$X_j X_{j+m}$] se tiene

(i) Si

$$\lim_{m \to \infty} r_m \, logm = 0 \tag{102}$$

ó

$$r_m = r \text{ (constante)} \tag{103}$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} P[Z_n < a_n + b_n x] = H_{3,0}(x) \tag{104}$$

(ii) si

$$\lim_{m \to \infty} r_m \log m = \tau \,;\, 0 < \tau < \infty \tag{105}$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} P[Z_n < a_n + b_n x] = H(x) \tag{106}$$

donde $H(x)$ es la convolución de $H_{3,0}(x+\tau)$ y $\Phi\,[x(2\tau)^{-1/2}]$

(iii) si

$$\lim_{m \to \infty} r_m \log m = \infty \tag{107}$$

$$\lim_{m \to \infty} r_m (\log m)^{1/3} = 0 \tag{108}$$

y r_m es decreciente, entonces

$$\lim_{n \to \infty} P[Z_n < (1 - r_n)^{1/2}\, a_n + x\, r_n^{\ 1/2}] = \Phi(x) \tag{109}$$

donde a_n y b_n vienen dados por

$$a_n = 1/b_n - b_n[\log\log n + \log (4\pi)\,] / 2 \tag{110}$$

$$b_n = (2\log n)^{-1/2} \tag{111}$$

Δ

Leadbetter et al. (1983) han demostrado para sucesiones normales que si

$$\lim_{m \to \infty} r_m \log m = 0$$

y $n[1-\Phi(u_n)\,]$ está acotado, entonces se verifican las condiciones $D(u_n)$ y $D'(u_n)$. Esto implica que los modelos estacionarios e invertibles ARMA(p,q) de Box-Jenkins satisfacen estas condiciones para $u_n=a_n+b_n x$.

3.2.4. Distribuciones asintóticas de los estadísticos de orden k

Para este caso se verifican los dos teoremas siguientes (Galambos (1978)).

Teorema 18. *(Distribuciones asintóticas de los estadísticos de orden k).*– Supóngase que existen límites finitos de

$$\lim_{n \to \infty} \underline{S}_{i,n}(a_n + b_n x) = u_i(x) \ , \tag{112}$$

en algún intervalo (a,b).

Si la serie

$$U_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+t}{\tau} u_{k+t}(x) \ ; \ a < x < b \tag{113}$$

converge, entonces se tiene

$$\lim_{n \to \infty} P[X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x] = \sum_{t=0}^{k-1} U_t(x) \ ; \ a < x < b \tag{114}$$

Δ

Teorema 19.– *(Condiciones suficientes para distribuciones límites del caso de independencia).*– Supóngase que $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias y que $\{a_n\}$ y $\{b_n > 0\}$ son sucesiones de números reales tales que $D(u_n)$ y $D'(u_n)$ se satisfacen para $u_n = a_n + b_n x$ y todo x. Si

$$\lim_{n \to \infty} P[X_{n:n} \leq a_n + b_n x] = G(x) \tag{115}$$

entonces, para cada r=1,2,... se tiene

$$\lim_{n \to \infty} P[X_{n-r+1:n} \leq a_n + b_n x] = G(x) \sum_{i=0}^{r-1} [-log\, G(x)]^i / i\,! \tag{116}$$

Δ

Este teorema da las condiciones bajo las cuales el teorema 7 permanece cierto para sucesiones dependientes.

4. CONCLUSIONES

Como Conclusión de este trabajo se podría decir que la teoría de los estadísticos de orden, de las distribuciones asintóticas de los extremos y de algunos tipos de estadísticos de orden en el caso de muestras aleatorias simples están ya muy avanzadas, y son hoy capaces de resolver una gran parte de los problemas prácticos planteados. No sucede lo mismo en el caso de muestras dependientes, en los que hay muchos resultados aislados, pero se echa en falta una teoría unificada y general que analice exhaustivamente el gran abanico de posibilidades que pueden presentarse. Sin embargo, el rápido desarrollo de esta rama de la Estadística logrado en los últimos años hace prever interesantes resultados en un futuro próximo.

5. REFERENCIAS

Afanas'ev, N. N. (1940). Statistical theory of the fatigue strength of metals. *J. Tech. Phys.*, 10, 1553-1568.

Balkema, A. A. and Haan, L. (1978a). Limit distributions for order statistics, I. Theory Probab. Appl. 23, 77-92.

Balkema, A. A. and Haan, L. (1978b). Limit distributions for order statistics, II. Theory Probab. Appl. 23, 341-358.

Castillo, E. and Galambos, J. (1986). Determining the domain of attraction of an extreme value distribution. Technical Report, Temple University.

Castillo, E. (1988). Extreme value theory in Engineering. Academic Press.

Cohen, J. P. (1982a). The penultimate form of approximation to normal extremes. Adv. Appl. Prob. 14, 324-339.

Cohen, J. P. (1982b). Convergence rates for the ultimate and penultimate approximations in extreme-value theory. Adv. Appl. Prob. 14, 833-854.

Chaplin, W. S. (1880). The relation between the tensile strengths of long and short bars. Van Nostrand's Engineering Magazine 23, 441-444.

Chaplin, W. S. (1882). On the relative tensile strengths of long and short bars. Proc. Engineer's Club, Philadelphia 3, 15-28.

Daniels, H. E. (1945). The statistical theory of the strength of bundles of threads. *Proc. Royal Soc.* A 183, 405-435.

David, H. A. (1981). Order Statistics. John Wiley and Sons, New York.

Davis, R. and Resnick, S. (1985). Limit theory for moving averages of random variables with regularly varying tail probabilities. Ann. Probab. 13, 179-195.

Dodd, E. L. (1923). The greatest and the least variate under general laws of error. *Trans. Amer. Math. Soc.* 25, 525-539.

Epstein, B. (1948). Applications of the theory of extreme values in fracture problems. *J. Amer. Statist. Assoc.* 43, 403-412.

Epstein, B. and Hamilton, B. (1948). The theory of extreme values and its implications in the study of the dielectric strength of paper capacitors. *J. Appl. Phys. 19, 544-550.*

Finetti, B. De (1932). Sulla legge di probabilità degli estremi. *Metron.* 9, 127-138.

Fisher, R. A. and Tippett, L. H. C. (1928) Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 24, 180-190.

Fowler, F. H. (1945). On fatigue testing under triaxial static and fluctuating stresses and a statistical explanation of size effect. *Trans. Amer. Soc. Mech. Eng.* 67, 213-216.

Frechet, M. (1927). Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Ann. Soc. Polon. Math*, Cracow, 6, 93.

Galambos, J. (1978). The asymptotic theory of extreme order statistics. John Wiley and Sons. (la traducción rusa fue publicada en 1984 por Nauka, Moscú), (segunda edición en 1987 por Krieger).

GALAMBOS, J. (1980). A statistical test for extreme value distributions. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 221-229.

GALAMBOS, J. (1984). Order Statistics. Handbook of statistics 4, 359-382.

GILLET, H. W. (1940). The size effect in fatigue. *Metals and Alloys* A 11, 19-94.

GNEDENKO, B. V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.* 44, 423-453.

GOMES, M. I. (1984). Penultimate limiting forms in extreme value theory. Ann. Inst. Statist. Math. 36, 71-85.

GUMBEL, E. J. (1934). Les moments des distributions finales de la première et de la dernière valeur. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris,* 198, 141-143.

GUMBEL, E. J. (1935). Les valeurs extremes des distributions statistiques. *Annales de l'institut Henri Poincaré,* 5, 115-158.

GUMBEL, E. J. (1935). La plus grande valeur. *Aktuárské Vedy* 5, 83-39, 133-143 and 145-160.

GUMBEL, E. J. (1958). Statistics of extremes. Columbia Univ. Press., New York.

GURNEY, C. (1945). Effect of length on tensile strength. *Nature* 155, 273-274.

GURNEY, C. (1947). The statistical estimation of the effect of size on the breaking strength of rods. *Aeronautical Research Council,* London, Report Memorandum No. 2157.

GURNEY, C. and PEARSON, S. (1947). The effect of length on the strength of a steel wire. *Aeronautical Research Council,* London, Report Memorandum No. 2158.

HARTER, H. L. (1978a). A cronological annotated bibliography on order statistics. Volume: Pre-1950. U.S. Government Printing Office, Washington.

HARTER, H. L. (1978b). A bibliography of extreme value theory. Intern. Statist. Rev. 46, 279-306.

KONTOROVA, T. A. (1940). Statistical theory of strength. *J. Techn. Phys. 10, 886-890.*

KONTOROVA, T. A. (1943). Concerning one of the applications of the statistical theory of the scale factor. *J. Techn. Physics* 13, 296-308.

LEADBETTER, M. R., LINDGREN, G. and ROOTZEN, H. (1983). Extremes and related properties of random sequences and processes. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.

MISES, R. von (1936). La distribution de la plus grande de *n* valeurs. *Revue Mathématique de l'Union Interbalkanique (Athens)* 1, 141-160.

PEIRCE, F. T. (1926). Tensile strength for cotton yarns. v.– "The weakest link" - theorems on the strength of long and of composite specimens. *Text. Inst.* 17, T355-368.

PETERSON, R. E. (1930). Fatigue tests of small specimens with particular reference to size effects. *Trans. Amer. Soc. Steel Treat.* 18, 1041-1056.

PICKANDS, J. III (1975). Statistical inference using extreme order statistics. Ann. Statist. 3, 119-131.

RICE, S. O. (1939). The distribution of the maxima of a random curve. *Amer. J. Math.* 61, 409-416.

TIAGO de OLIVEIRA, J. (1958). Extremal distributions. Rev. Fac. Cienc. Lisboa A 7, 215-227.

TIAGO de OLIVEIRA, J. (1959). Distribuiçoes de extremos. Curso de Matemáticas superiores Prof. Mira Fernandes, Vol. 2, Instituto Superior de Ciencias Económicas e Financeiras, Lisboa, 133-159.

TIAGO de OLIVEIRA, J. (1981). Statistical choice of univariate extreme models. Statistical distributions in Scientific Work 6, 367-387.

TIPPETT, L. H. C. (1925). On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population. *Biometrika* 17, 364-387.

TUCKER, J. (1941). Statistical theory of the effect of dimensions and of method of loading upon the modulus of rupture of beams. *Proc. ASTM* 41, 1072-1094.

TUCKER, J. (1945). Effect of dimensions of specimens upon the precision of strength data. *Proc. ASTM* 45, 952-960.

WEIBULL, W. (1939). A statistical theory of the strength of materials. Ingeniörs Vetenskaps Akademien Handlingar, No. 151. *Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag, Stockholm.*

SUMMARY

The paper is an state of the art report that analizes the isolated and joint distribution of order statistics, assuming both independence and dependence in samples, the asymptotic distributions, domains of attraction and the penultimate approximation of extremes. In addition, limit distributions of upper or lower, moderately upper or lower and central order statistics, for dependence and independence, are analyzed too.

Key words: order statistics, asymptotic distributions, domains of attraction, dependence.

ESTADISTICA ESPAÑOLA
núm. 116, 1988 págs. 36 a 42

COMENTARIOS

J. GALAMBOS
(Temple University, USA)

Debo felicitar a los editores de esta revista por invitar al Profesor Castillo a escribir un estado del conocimiento sobre el desarrollo de la teoría de valores extremos. El trabajo del Profesor Castillo, incluyendo su próximo libro sobre el tema, trae la adición que necesitaba la teoría de valores extremos: ver y desarrollar esta teoría desde el punto de vista de un matemático ingeniero. La introducción de este trabajo y la selección de las referencias reflejan este punto de vista. Me satisface también que el trabajo sea en español por lo que nuestra teoría, como es de esperar, animará a muchos y nuevos investigadores.

El trabajo representa bien el estado del conocimiento de la teoría de valores extremos univariados. Quizás debería haberse mencionado algo sobre la velocidad de convergencia. El Profesor Castillo incluye también los métodos estadísticos existentes para seleccionar los dominios de atracción en un modelo clásico. La discusión de otros métodos estadísticos tales como estimación en las colas, estimación del punto extremo de una función de distribución, o la estimación de los parámetros de las distribuciones de valores extremos requeriría un estudio aparte.

El único punto en el que discrepo con el Profesor Castillo se refiere a una nota hecha en las conclusiones. Se dice que los resultados sobre dependencia son dispersos y que falta una teoría unificada. Hay dos métodos que unifican y cubren la mayor parte de los resultados existentes. Uno es por medio de una transformación a intercambiabilidad, y el otro es el modelo del gráfico de dependencia, que yo llamé de las sucesiones E_n en mi libro (para enfatizar los papeles de las aristas del grafo en la dependencia). La transformación a intercambiabilidad tiene un obstáculo serio de naturaleza matemática: se tiene que ser capaz de decidir para una sucesión finita de sucesos intercambiables si éstos pueden ser extendidos a un conjunto mayor sin violar la intercambiabilidad. Esto parece ser un problema difícil (ver la discusión de este tema en Koch y Spizzichino

(1982), páginas 75-86, 207-216 y 313-320). Sin embargo, el desarrollo estadístico de modelos intercambiables propios sería un avance de la teoría de extremos que sería bien recibida por los estadísticos bayesianos. Aquí podemos suponer que tratamos con segmentos finitos de sucesiones infinitas intercambiables, así que el problema de la extensibilidad no se plantea. La otra via de unificación, por medio del gráfico de dependencia o sucesiones E_n, es muy fructífera y parece cubrir la mayor parte de los modelos de dependencia. No deseo emplear mucho espacio en esto; por el contrario les refiero a mi intento reciente de revivir este modelo (Galambos 1988)). Sin embargo, debo coincidir con el Profesor Castillo en la necesidad de un modelo general de dependencia para el que los resultados finales difieran de los de los modelos clásicos. Ningún ingeniero creerá en la aplicabilidad de nuestra teoría a fiabilidad (distribuciones de vida de componentes) hasta que un modelo de dependencia suministre una familia rica de distribuciones límites como distribuciones de vida. El modelo del gráfico de dependencia da un buen primer paso (ver la discusión en la página 233 de Galambos (1987) referida a riesgo). El entusiasmo del Profesor Castillo en este campo es una garantía de que el desarrollo de la teoría de extremos irá en la dirección adecuada desde el punto de vista de las aplicaciones.

REFERENCIAS

GALAMBOS, J. (1987). The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, 2nd edition, Krieger, Melbourne, Florida.

GALAMBOS, J. (1988). Variants of the Graph Dependent Model in Extreme Value Theory. Communications in Statistics. Theory and Methods. To appear.

KOCH, G. and SPIZZICHINO, F. (1982). Exchangeability in Probability and Statistics. North Holland, Amsterdam.

J. TIAGO DE OLIVEIRA
(Facultad de Ciencias de Lisboa (Portugal))

Este artículo es una exposición muy buena de la teoría probabilística de extremos univariados con algunas referencias a aspectos estadísticos.

En vez de recorrer el índice del artículo y decir que no hay incorrecciones, parece más natural y útil al lector destacar los aspectos "novedosos" con algunas notas críticas de menor importancia.

El estudio de los casos con tamaño de muestra fijo y aleatoria es muy claro y la necesidad de una distribución asintótica está, también, bien planteada. Como notas laterales podemos indicar que la sección 3.1.2. (estadísticos de orden central) está fuera del contexto general del artículo y no es utilizado en lo que sigue y que la forma de von-Mises (3.1.1.3) debe ser realmente la forma de von-Mises-Jenkinson. La condición que aparece en 3.1.1.4, en la que el autor ha colaborado, es muy útil y simple de utilización y no debe pasar inadvertida.

El uso, si fuera necesario, de las distribuciones penúltimas (3.1.1.5) podría haberse desarrollado un poco más y quizás clarificado con ejemplos numéricos.

En 3.1.1.6 - la elección estadística de modelos - aunque utilizando un método práctico, parece que el método óptimo desarrollado por el discusor (ver referencia de 1981) y los artículos que le siguen, así como la utilización del, muy práctico, estadístico de Gumbel deberían haberse citado. Una comparación de las "funciones de potencia" sería útil.

El estudio de los estadísticos de orden m está bien expuesto y toda la sección 3.2 - referente a la dependencia - es correcta y útil, explicando el uso extendido de las distribuciones asintóticas no sólo para independencia sino también para algunos casos de (relativamente débil) dependencia.

En conclusión, el artículo es bueno y el autor debe ser felicitado por ello.

ALBERTO LUCEÑO VAZQUEZ
(Universidad de Cantabria. Santander)

Deseo en primer lugar felicitar al Profesor Castillo por la publicación de este magnífico artículo sobre Estadística de valores extremos en el que nos ofrece un resumen de las publicaciones más transcendentales que han aparecido sobre el tema en los últimos años y, en particular, de una parte importante de su libro "Extreme value theory in Engineering" de próxima aparición bajo los auspicios de la editorial Academic Press. Asimismo felicitar al director de la revista Estadística Española por la oportunidad que nos ha brindado para discutir este tema, cuya importancia es vital para las aplicaciones de la Estadística a un buen número de problemas prácticos.

Me propongo a continuación hacer algunas consideraciones sobre las dificultades que aparecen en la estadística de valores extremos para, posteriormente, referirme a algunos puntos concretos del artículo y, finalmente, plantear algunos problemas que podrían ser objeto de futuras publicaciones.

Es bien sabido que una gran parte de los resultados más ampliamente divulgados y, en consecuencia, más frecuentemente usados de los que ofrece la Estadística se refieren a lo que podríamos llamar estadística de valores centrales. En efecto, la normalidad asintótica de la media muestral bajo condiciones muy generales, debida al teorema central de límite, así como el hecho de que la desviación típica de dicha media muestral tienda a cero como lo hace $n^{-1/2}$ cuando el tamaño de la muestra, n, tiende a infinito, son resultados transcendentales.

En contraste, la dificultad inherente a los problemas de valores extremos debe ser resaltada en su justa medida. No es lo peor que, en el caso más sencillo de muestra aleatoria simple, aparezcan tres distribuciones límites (Weibull, Gumbel y Fréchet) en lugar de una (Normal) que aparece en el teorema central de límite bajo condiciones muy generales. Es más grave el hecho de que cuando existe la varianza de Z_n/b_n, donde Z_n es el máximo muestral, su valor tienda a una constante dada por la respectiva distribución asintótica, o lo que es igual, que para n grande la desviación típica de Z_n sea proporcional a b_n ya que, desgraciadamente, b_n decrece mucho más lentamente que $n^{-1/2}$ para muchas distribuciones poblacionales e incluso para algunas de ellas crece al aumentar n. Por ejemplo, a una variable aleatoria normal le corresponde $b_n = (2 \cdot ln\,(n))^{-1/2}$ y a una log-normal le corresponde:

$$b_n = (2\; ln\,(n))^{-1/2} \, exp\left[(2\; ln\,(n))^{1/2} - \frac{(ln\,(ln\,(n)) + ln\,(4\pi))\,/\,2}{(2\; ln\,(n))^{1/2}} \right]$$

Una excepción es la distribución uniforme para la que $b_n = n^{-1}$. Por tanto, cualquier intervalo de probabilidad que se calcule para el máximo de una muestra de tamaño grande tendrá una amplitud muy grande para muchas de estas distribuciones, incluso aunque no hubiera ninguna incertidumbre sobre la distribución poblacional. (Nótese que aunque la convergencia débil no implica en general la convergencia de los momentos, el razonamiento es válido. Véase por ejemplo la sección 2c del capítulo 2 de Rao 1973).

Este hecho guarda un cierto paralelismo con los problemas de interpolación y extrapolación tratados en el Análisis Numérico. Es claro que los problemas de la estadística de valores centrales se asemejan a los de interpolación y que los problemas de valores extremos se parecen más a los de extrapolación. Tanto en el terreno de la Estadística como en el del Análisis Numérico, cualquier extrapolación basada en un modelo inexacto puede producir resultados catastróficos. Como resumen, si el acierto de una decisión depende del valor que tome la media de una muestra de tamaño grande, en general, será necesario hacer frente a un riesgo mucho menor que si el acierto depende del valor que tome el máximo de dicha muestra. Y esto incluso aunque la información disponible fuera la mayor posible, esto es, que la distribución poblacional fuera conocida.

En el artículo que comentamos, el Profesor Castillo, después de una breve reseña histórica, introduce el tema de una manera muy sugerente y plantea las preguntas fundamentales que deben resolverse. A lo largo del mismo se encuentran muchos puntos que merecen ser resaltados; por ejemplo, el 2.1.2. en el que se obtiene de una forma clara e intuitiva la distribución conjunta de varios estadísticos de orden, el 2.1.3. en el que se da un método de simulación directa de estadísticos de orden, los puntos 3.1.1.2. y 3.1.1.4. en los que se presentan los resultados fundamentales sobre distribuciones límites y dominios de atracción, algunos del mismo autor, y el 3.1.2. referido a los estadísticos de orden k, por citar algunos de los más importantes.

Un punto que tal vez podría haber sido más ampliamente resaltado en la exposición es el de la relación existente entre el límite superior, $\omega(F)$, de la distribución $F(x)$ y los momentos respecto del origen de su cola superior, por una parte, y la distribución límite admisible para máximos, por otra. La siguiente es una regla sencilla para el caso de muestra aleatoria simple: si $\omega(F)$ es finito (lo que implica que los momentos de la cola superior son finitos), la distribución límite, si existe, puede ser solamente Weibull o Gumbel; si $\omega(F)$ es infinito pero los momentos de la cola superior son finitos para cualquier orden dado, la distribución límite sólo puede ser Gumbel; si los momentos de la cola superior son finitos solamente cuando su orden está en un intervalo abierto finito $(0,\gamma)$ (lo que implica que $\omega(F)$ es infinito), la distribución límite sólo puede ser Fréchet y, finalmente, si los momentos de la cola superior de $F(x)$ divergen para cualquier orden dado $\gamma > 0$ (lo que implica que $\omega(F)=\infty$) puede asegurarse que no existe distribución límite. El caso con $\omega(F)$ finito puede subdividirse en sus diferentes posibilidades, de manera análoga al caso en que $\omega(F)$ es infinito, sin más que utilizar la función $F^*(x)=F(\omega(F)-1/x)$, para $x>0$, en lugar de $F(x)$. De igual manera puede hablarse de mínimos con tal de cambiar $\omega(F)$ por $\alpha(F)$ y la cola superior por la cola inferior. Para una discusión más detallada véase Galambos 1978.

Finalmente me gustaría exhortar al Profesor Castillo, o tal vez a la propia revista Estadística Española, a realizar una publicación similar a la que comentamos, en la que el énfasis estuviera en los problemas de Inferencia Estadística que aparecen al tratar con los valores extremos. Algunos puntos a considerar, por su interés en las aplicaciones, podrían ser: la estimación puntual y por intervalos de confianza de los parámetros y de los cuantiles de las distribuciones de extremos, los contrastes de bondad de ajuste de estas distribuciones, la utilidad de las transformaciones para mejorar la velocidad de convergencia a las distribuciones asintóticas, el estudio de la economía de parámetros en el modelo o, lo que es análogo, el análisis de hasta qué punto es preferible un modelo que ajusta mejor que otro pero que tiene más parámetros a estimar, como ocurre en la aproximación penúltima de extremos. Por ejemplo, discutiendo el uso de transformaciones, es claro que la función:

$$Y = - ln \{ -ln [\Phi ((X-\mu) / \sigma)] \}$$

que se comporta como $Z^2/2+ln(Z)+ln(2\pi)/2$ cuando $Z=(X-\mu)/\sigma$ es grande, permite obtener una variable aleatoria, Y, de Gumbel a partir de una variable aleatoria, X, normal $N(\mu,\sigma^2)$ optimizando con ello la convergencia; ahora bien, en las aplicaciones no suele ser conocido el valor de μ ni el de σ y, lo que es peor, el uso de la función de distribución normal no suele estar justificado más que como una aproximación cuya validez en la cola es especialmente dudosa. Análogamente, la transformación:

$$Y = - ln \{ - ln [1 - exp(-Z^2)] \}$$

que se comporta como Z^{γ}-$exp(-Z^{\gamma})/2$ cuando $Z=(X-\alpha)/\beta$ es grande, permite obtener una variable aleatoria de Gumbel a partir de una Weibull_m de parámetros (α, β, γ). Destaca el hecho de que aparezca de nuevo la transformación potencial como primera aproximación a la cola de interés.

Deseo por último reiterar mis felicitaciones al Profesor Castillo y al director de la revista Estadística Española por la publicación de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

RAO, C. R. (1973). Linear Statistical Inference And Its Applications. Wiley.

ESTADISTICA ESPAÑOLA
núm. 116, 1988, págs. 42 a 43

Contestación

Agradezco, en primer lugar, a los Profesores Galambos, Luceño y Tiago de Oliveira por sus estimulantes discusiones al artículo, que sirven para aclarar y completar algunos aspectos del mismo.

Parte de los comentarios se refieren a la conveniencia de incluir o ampliar aspectos tales como la velocidad de convergencia, la aproximación penúltima de extremos, la selección estadística de modelos para extremos, la relación existente entre los límites superior $\omega(F)$ o inferior $\alpha(F)$ de una distribución y los momentos, etc. J. Galambos y A. Luceño reconocen, sin embargo, la imposibilidad de cubrir otros aspectos tales como estimación (de los límites superior o inferior de una distribución, los cuantiles, los parámetros de las distribuciones de extremos), contrastes de hipótesis, la utilidad de las transformaciones para mejorar la velocidad de convergencia o la aproximación penúltima de extremos. Ni que decir tiene que comparto con ellos la opinión de que todos los temas mencionados son de gran relevancia para el problema de extremos y de que hubiera sido conveniente su inclusión. Sin embargo, las limitaciones impuestas por el objetivo y la limitación de espacio, ampliamente rebasada, han hecho imposible su tratamiento en este trabajo.

Por el contrario, el Profesor Tiago de Oliveira comenta que el apartado referente a los estadísticos de ordenes centrales está fuera de contexto. Aún coincidiendo con él en que no se trata de un tema de extremos, su inclusión está motivada con objeto de destacar la diferencia que existe entre éstos y los estadísticos de ordenes altos o bajos o los moderadamente altos o bajos y llamar la atención sobre los errores que, con bastante frecuencia, se cometen en aplicaciones prácticas.

La preocupación manifestada por el Profesor Luceño sobre la varianza de los extremos y, en especial, por el desmesurado crecimiento con el tamaño de la muestra está justificada. Esa es, sin embargo, la dificultad, la grandeza y el reto de la Estadística de valores extremos y lo que la diferencia de la Estadística de valores centrales. De ahí la importancia que tiene una selección correcta del modelo evitando esos errores catastróficos a los que él mismo hace mención. No obstante, este problema se ve muy aliviado en la práctica, pues, normalmente, las variables que se utilizan son limitadas (ω(F) finito) por lo que sólo son posibles distribuciones límites de tipo Weibull o Gumbel. Este es el caso de la ley uniforme y de muchas más. De hecho son rarísimos los casos prácticos en los que se recomienda una distribución de Frechet para aproximar extremos e incluso en algunos su selección es bastante dudosa y polémica.

Con respecto a la sugerencia del Profesor Tiago de Oliviera de que la forma de vonMises debería ser denominada de vonMises-Jenkinson no tengo inconveniente alguno en aceptar su corrección. También es justo reconocerle como pionero en el planteamiento de los métodos de selección de modelos para extremos.

La aparición de sólo tres distribuciones límites o de la unificada de vonMises-Jenkinson en el caso de independencia clásico no sólo no es considerado por los Estadísticos de extremos como un aspecto negativo sino que se valora como positivo y su importancia se compara a la de la aparición de la ley normal para el caso de valores centrales.

Finalmente, comparto con el Profesor Galambos la opinión de que se han dado pasos importantes hacia un tratamiento unificado y sistemático para el caso de dependencia, bien mediante una transformación a intercambiabilidad o, muy especialmente, mediante el modelo del grafo de dependencia, al que él ha contribuido muy notablemente. Sin embargo, algunas contribuciones son muy recientes y conocidas sólo en ambientes muy restringidos y, si bien cubren casi todos los casos resueltos, no parecen cubrir de momento otros casos ya planteados. Incluso el Profesor Galambos reconoce las enormes dificultades del primero de los métodos y la necesidad de un modelo general de dependencia con comportamiento para extremos básicamente diferente del clásico.

Agradecimiento.– Quisiera, finalmente, agradecer a la Revista Estadística Española y, muy especialmente, a su Director la invitación para escribir este artículo.