Métodos spline aplicados a la estimación de la densidad espectral

por

EVA FERREIRA GARCÍA (*)

Departamento de Econometría y Estadística Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales Universidad del País Vasco Avda. Lehendakari Aguirre 83 48015 Bilbao Tíno: (94) 479.74.39

RESUMEN

Un problema típico en series temporales es la estimación de la densidad espectral o espectro de un proceso estacionario. Este problema ha sido ampliamente estudiado desde un enfoque paramétrico. Sin embargo, en los últimos años, los métodos no paramétricos han crecido en importancia como métodos de estimación de funciones, y en particular para estimar la densidad espectral. En este trabajo proponemos utilizar un *M-spline* como estimador del espectro. Estudiaremos, en un contexto general, la forma óptima de selección del M-spline y aplicaremos los resultados teóricos obtenidos a la estimación del espectro. Por último, los estudios de Monte Carlo muestran en la práctica la mejora producida por esta forma de estimación frente a otras, tanto paramétricas como no paramétricas.

^(*) Este trabajo es parte de la tesis doctoral de la autora, quien quisiera expresar su más sincera gratitud a su director de tesis Fernando Tusell, y a sus compañeros Vicente Núñez y Juan Rodríguez por sus útiles comentarios. Agradezco así mismo la financiación del proyecto Dirección General de Enseñanza Superior del Ministerio de Educación y Ciencia PB95-0346.

Palabras clave: M-Splines, Densidad espectral, Parámetro de suavizado, procesos estacionarios.

Clasificación AMS: 62M15, 62G05.

1. INTRODUCCIÓN

En el contexto paramétrico de procesos estacionarios, bajo modelos ARMA (autorregresivos y de medias móviles), hay estimadores consistentes del espectro que maximizan, con respecto a θ , la parte principal de la verosimilitud, definida como:

$$-\frac{N}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\log f_{\theta}(\lambda)-\frac{I(\lambda)}{f(\lambda)}\right\}d\lambda$$
[1]

donde θ es un vector de parámetros, $f_{\theta}(\bullet)$ es la densidad espectral, $I(\bullet)$ es el periodograma, y $\lambda \in [-1,1]$, (Dzhaparidze, 1986).

Como forma de evitar la inconveniencia de la especificación paramétrica, los estimadores no paramétricos, basados en la suavización del periodograma, aparecen como una solución razonable. El problema con los primeros métodos que aparecieron (ventanas espectrales, estimador de Daniell), surgía al decidir cuánto suavizar el periodograma. Para los dos principales métodos no paramétricos existentes, splines y kernels, este problema se traduce en la elección del parámetro de suavizado, y se puede resolver mediante el uso de distintos criterios objetivos. En particular, Wahba and Wold (1975) proponen un spline periódico como estimador del logaritmo del espectro, donde la elección del parámetro de suavizado se realiza mediante el método de validación cruzada mínimo-cuadrática. Beltrão y Bloomfield (1987) y Hurvich and Beltrão (1990) usan estimadores kernel, usando un criterio de validación cruzada de la verosimilitud para elegir el parámetro de suavizado, basado en la parte principal de la verosimilitud del proceso estacionario de partida.

Nuestro objetivo es utilizar un criterio de máxima verosimilitud en la estimación mediante splines, lo que básicamente significa realizar máxima verosimilitud penalizada. El origen de esta idea lo encontramos aplicado a estimación de funciones de densidad (Good and Gaskins, 1971). En el contexto espectral, Chow y Grenander (1985) proponen un método "sieve" para estimar la densidad espectral. Aquí proponemos un M-spline (Huber, 1979) como estimador del espectro. Pawitan y O'Sullivan (1994) han usado este tipo de estimación pero no demuestran las propiedades teóricas que aquí se derivan. En la Sección 2, utilizamos un modelo de regresión general para derivar algunas propiedades básicas de estos estimadores, y basándonos en la verosimilitud de los errores del modelo, presentamos una forma natural de seleccionar el M-spline *óptimo* en un sentido asintótico. Además, adaptaremos el criterio de validación cruzada a un concepto más general.

En la Sección 3, analizamos la adecuación del M-spline al modelo de regresión derivado para el logaritmo de la densidad espectral. Veremos además como este método mejora los resultados teóricos obtenidos con los splines clásicos.

En la Sección 4, presentamos varios estudios de Monte Carlo y finalmente, en la Sección 5 se realizan las conclusiones. Todas demostraciones aparecen en el Apéndice.

2. M-SPLINES

2.1. Primeros resultados

Consideremos de forma general el modelo de regresión lineal

$$\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\mu}(t_i) + \boldsymbol{\varepsilon}_i \,, \tag{2}$$

donde $0 \le t_1 < t_2 < ... < t_n \le 1$ son nodos equiespaciados y los errores aleatorios ε_i se suponen independientes e idénticamente distribuidos (iid), con función de densidad denotada por p y varianza $0 < \sigma^2 < \infty$.

La estimación clásica mediante splines implica resolver el problema variacional en el espacio $W_2^m = \{g \in C^{n-1}[0,1] \text{ tal que } g^{(m-1)}, (m-1 \text{ derivada de } g), \text{ es absolutamente continua y } g^{(m)} \in L^2[0,1]\},$

$$\min_{g} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - g(t_i))^2 + h[g,g]$$
[3]

donde $[g,g] = \int (g^{(m)}(t))^2 dt$, *h* es el parámetro de suavizado y $m \ge 2$.

Este tipo de estimación tiene su origen en Whittaker (1923). Nos referiremos a la solución de [3] como al *spline clásico* y lo denotaremos por g_{cy} . Después de más de medio siglo, Huber (1979) propuso los llamados M-splines o splines tipo M, que denotaremos por g_M , definidos como los minimizadores sobre W_2^m del funcional

$$w(g) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(y_i - g(t_i)) + h[g,g], \qquad [4]$$

donde $\rho(\bullet)$ generalmente representa una función convexa y simétrica en torno al cero. La idea, en principio, de esta generalización era el obtener una función menos sensible a la existencia de outliers que $(y_i - g(t_i))^2$.

En este trabajo, relajamos la condición de simetría de $\rho(\bullet)$ y establecemos en el Teorema 2 las condiciones generales que garantizan la existencia y unicidad del minimizador de w(g).

Para comenzar, veamos que la denominación de M-spline a g_M es acorde con el significado estándar de funciones spline como funciones polinómicas a trozos, (Eubank, 1988).

Teorema 1. Sean las funciones ei definidas como,

$$e_i(t) = c_0 + c_1t + \ldots + c_{m-1}t^{m-1} + (-1)^m \frac{(t_i - t)^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

para i = 1,...,n. Entonces, el minimizador g_M del funcional [4] pertenece al subespacio $S_n \subset W_2^m$, donde $S_n = S_0 + \{e_i\}_{i=1}^n$ y $S_0 = \{f \text{ tal que } f^{(m)} = 0 \text{ para casi todo } t\}$. Es decir, g_M es una función polinómica a trozos, de grado 2m-1.

Teorema 2. Sea $\rho(\bullet)$ una función estrictamente convexa, con al menos dos derivadas continuas, de forma que para cualquier u, $\rho''(u) \ge K > 0$. Entonces, existe un único minimizador de w(g) en el espacio W_2^m .

Nótese que la condición $\rho''(\bullet) \ge K > 0$ es más fuerte que la convexidad estricta de $\rho(\bullet)$. De hecho, si sólo imponemos que ρ sea estrictamente convexa, garantizaríamos la unicidad pero no la existencia.

2.2. Relación entre los splines clásicos y los M-splines

Para comparar ambos tipos de spline, utilizaremos el siguiente modelo

$$z_i = \mu(t_i) + \frac{\psi(\varepsilon_i)}{E\psi'} = \mu(t_i) + v_i$$
[5]

donde $v_i = \psi(\varepsilon_i)/E\psi'$ y $\psi = \rho'$. Los valores Z_i no corresponden a datos reales, por lo que denominaremos a este modelo, *modelo de pseudo-datos*.

Denotemos por g_{cz} al spline clásico asociado a este modelo de pseudo-datos; es decir, g_{cz} minimiza $n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (z_i - g(t_i))^2 + h[g,g]$. Todos los splines dependen de *h* y *n*, dependencia que omitimos en la notación por simplicidad.

Supuestos. Consideremos $\psi \in C^2$, tal que:

- (i) $M = \sup |\psi'| < \infty$, $E\psi' \neq 0$, $E\psi = 0$, $Var(\psi') < \infty$, $Var(\psi) < \infty$,
- (ii) $nh^{1/m} \to \infty$, cuando $n \to \infty$ y $h \to \infty$.

Consideremos la norma II·II_n inducida por la distancia usual

$$d_n^2(g_1,g_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{g_1(t_i) - g_2(t_i)\}^2$$

Teorema (Cox, 1983). Bajo los supuestos (i) y (ii), se sigue que, para cualquier $\delta > 0$, existe un número natural n₀ tal que, para cada n $\ge n_0$,

$$\mathsf{P}\{\exists g_{\mathsf{M}} \text{ solución de } [4] \text{ y } \|g_{\mathsf{M}} - g_{\mathsf{cz}}\|_{n}^{2} \leq \delta \operatorname{\mathsf{Ellg}}_{\mathsf{cz}} - \mu \|_{n}^{2}\} \geq 1 - \delta$$
[6]

Nótese que el supuesto 2 en Cox (1983) se cumple aquí bajo el supuesto (ii). Este teorema establece que, con alta probabilidad, g_M y g_{cz} comparten las mismas propiedades asintóticas. Está claro que el modelo de pseudo-datos no es útil en la práctica, pero nos permite estudiar fácilmente las propiedades asintóticas del estimador M-spline. De hecho, podemos comparar M-splines con splines clásicos para un mismo modelo a través del análisis de dos splines clásicos, tales que sus modelos asociados sólo se diferencian en el término de error. Mientras en [2] los errores son ε_i , con función de densidad p, en el modelo de pseudo-datos los errores son $v_i = \psi(\varepsilon_i)/E\psi'$, y, por tanto, en general con diferente función de densidad.

Por otra parte, también es claro que si $\rho(u) = u^2$, el spline clásico y el M-spline coinciden. En este caso $\psi(u) = 2u$ y $\psi' = 2$, por lo que $v_i = 2\epsilon/2 = \epsilon_i$ y los modelos [2] y [5] son equivalentes, como era de esperar.

Sin embargo, en general, las diferentes elecciones de la función $\rho(\bullet)$ proporcionarán diferentes distribuciones de los errores en el modelo equivalente de pseudodatos.

Este hecho nos conducirá al criterio propuesto de elección de ρ , de la forma enunciada en el siguiente teorema.

Teorema 4. Consideremos el modelo general [2], y supongamos que se conoce la función de densidad p del término de error p, y es tal que $p(\infty)=p(-\infty)=p(\infty)=p(-\infty)=0$. Entonces, si elegimos como función $p(\bullet) = -\log p(\bullet)$ en [4] y bajo los supuestos (i) y (ii), el modelo asociado de pseudo-datos tiene los errores v_i con la menor varianza posible, en el sentido de que cualquier otra elección de ρ , proporcionaría errores de varianza mayor o igual, en el modelo equivalente de pseudo-datos.

Orden asintótico del MISE para M-splines. Para cada estimador spline $\hat{g} = g_{cy}, g_{cz}, g_{M},$

$$MISE(h) = \int E(\mu(t) - \hat{g}(t))^{2} dt$$
[7]

Observemos que

$$MISE(h) = \int (\mu(t) - E(\hat{g}(t)))^{2} dt + \int Var(\hat{g}(t))^{2} dt = B_{n}^{2}(h) + V_{n}(h)$$
[8]

 $B_n^2(h)$ corresponde al cuadrado del sesgo y $V_n(h)$ a la varianza.

Si consideramos el spline clásico g_{cy} bajo el modelo [2], sabemos que el sesgo no depende del término de error. De hecho, este término corresponde al error producido en el caso en que no hubiera errores en los datos, y su orden asintótico es $O(h^2)$. Para el término de varianza, se obtiene la cota (Eubank, 1988)

$$V_n(h) \le \frac{K_m \sigma^2}{n h^{1/(2m)}},$$
 [9]

donde K_m es una constante que únicamente depende de *m*, y σ^2 es la varianza del término de error.

Combinando estos resultados se obtiene,

$$MISE(h) = O(h^{2}) + O(n^{-1}h^{-1/(2m)})$$
[10]

Tomando $h = O(n^{-2m/(4m+1)})$, $MISE(h) = O(n^{-4m/(4m+1)})$, orden óptimo en estimación no paramétrica, (véase p.ej, Speckman, 1985 ó Stone, 1980).

El hecho que deseamos puntualizar aquí es que la elección de un M-spline no mejorar el orden del MISE en este sentido, ya que éste es óptimo cualquiera que sea ρ (cumpliendo, obviamente, las condiciones impuestas en el Teorema 2). La elección de ρ como se indica en el Teorema 4, afectar a la constante de la cota del término de varianza, haciéndola mínima.

2.3. Selección del parámetro de suavizado

La selección del parámetro de suavizado *h* mediante el criterio de validación cruzada mínimo-cuadrática (CV), se realiza tomando el valor *h* que minimice la expresión

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left(y_{j} - g_{(j)}(t_{j})\right)^{2}$$
[11]

donde $g_{(j)}(t_j)$ denota la función estimada en t_j , cuando este nodo no se utiliza en la estimación.

Un criterio más general será el siguiente.

Definición 1. Llamamos criterio de validación cruzada tipo M (MCV) a aquél que selecciona el parámetro de suavizado como el minimizador de

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\rho(y_{j}-g_{(j)}(t_{j}))$$
[12]

La equivalencia asintótica entre M-splines y splines clásicos para modelos de pseudo-datos nos lleva a pensar sobre una equivalencia entre los métodos de elección de *h*, MCV y CV para pseudo-datos. Este último consistiría en minimizar

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left(z_{j} - g_{(j)}(t_{j}) \right)$$
[13]

donde *z*_i son los pseudo-datos definidos en [5]. Esta equivalencia no es inmediata, pero podemos obtener la relación asintótica a través del siguiente teorema.

Teorema 5. Para cada valor del parámetro h, y bajo las mismas hipótesis del Teorema 4 para $\rho(\bullet)$, se tiene que el cálculo de MCV para el modelo [2] es asintóticamente equivalente al cálculo de CV en el modelo de pseudo-datos.

3. APLICACIÓN A LA ESTIMACIÓN ESPECTRAL

3.1. El modelo

Sea { $X_1,...,X_N$ } una sucesión temporal, realización de un proceso estacionario. Es bien conocido (Koopmans, 1974) que el periodograma asociado a esta sucesión es simétrico y sigue la siguiente distribución asintótica (por simplicidad consideramos *N* par),

$$Ji = \frac{I(\lambda_i)}{f(\lambda_i)} \sim \frac{1}{2}\chi_2^2 \qquad i \neq 1, n$$

$$Ji = \frac{I(\lambda_i)}{f(\lambda_i)} \sim \chi_2^2 \qquad i = 1, n$$
[14]

donde n = (N/2) + 1, $\lambda_i = (i-1)/(n-1)$, $f(\lambda)$ denota la verdadera densidad espectral, $I(\lambda)$ el periodograma, y $\lambda \in [-1,1]$. De este resultado, la distribución asintótica de los errores definidos como $\zeta_i = \log I(\lambda_i) - \log f(\lambda_i)$, con i = 2, ..., n-1 es

.

$$\operatorname{Prob}(J_i \le \exp(u)) = \int_0^{2 \exp(u)} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-t}{2}\right) dt , \qquad [15]$$

es decir, la densidad de ζ_i es $p(u) = \exp(u)\exp(-\exp(u))$ para $u \in \Re$. Estos errores no están centrados, la media es -0.57772 y, por tanto, el modelo de regresión propuesto con el sesgo corregido es

$$\mathbf{y}_{i} = \mathbf{q}(\lambda_{i}) + \varepsilon_{i}$$
 [16]

donde $y_i = \log l(\lambda_i) + 0.57772$ y $q(\lambda) = \log f(\lambda)$. La función de densidad de los errores insesgados es,

$$p(\varepsilon) = \exp^{(\varepsilon - C)} \exp(-\exp^{(\varepsilon - C)})$$
[17]

con *C* = 0.57772, y donde $E(\varepsilon_i) = 0$ y Var $(\varepsilon_i) = \pi^2/6$. (Los valores de los extremos λ_1 y λ_n necesitan otra corrección para el sesgo y tienen diferente varianza.)

Wahba y Wold (1975) consideran este mismo modelo y proponen estimar $q(\bullet)$ con un spline clásico periódico, con selección del parámetro de suavizado mediante CV. Por tanto, el spline g_{cv} obtenido minimizaría

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (y_i - g(\lambda_i))^2 + h[g,g]$$
[18]

 $\operatorname{con} y_i = \log I(\lambda_i) + C.$

3.2. Estimación de la densidad espectral mediante un M-spline

Aprovechando que la distribución asintótica de los errores en el modelo [16] es conocida, podemos aplicar los resultados de la Sección 2. Proponemos estimar la densidad espectral mediante un M-spline g_M que minimice

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho(\mathbf{y}_{i}-\mathbf{g}(\lambda_{i}))+h[\mathbf{g},\mathbf{g}]$$
[19]

donde $\rho = -\log p$ y p es la densidad definida en [17]. Nótese que minimizar [19] es, en este caso, equivalente a minimizar

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{g(\lambda_{i})-\frac{I(\lambda_{i})}{\exp(\lambda_{i})}\right\}+h[g,g]$$
[20]

Además, teniendo en cuenta que $q = \log f$; la expresión $(1/n)\Sigma\{g(\lambda_i)-[I(\lambda_i)/\exp g(\lambda_i)]\}$ corresponde exactamente a la parte principal de la verosimilitud del proceso estacionario de partida.

En este sentido, podemos interpretar el problema de minimización al que hemos llegado en el modelo de frecuencias como la verosimilitud penalizada del proceso temporal de partida. Esto nos lleva a ver este método como una generalización al caso no paramétrico de los métodos, basados en la parte principal de la verosimilitud, para modelos ARMA (Dzhaparidze, 1986). La utilización de esta parte principal en métodos kernel ya la habían propuesto Beltrão y Bloomfield, (1987), aplicada únicamente en la elección del parámetro de suavizado.

Además, es directo comprobar que la función ρ elegida verifica las condiciones necesitadas en la Sección 2, lo que nos lleva a concluir que el estimador g_M posee la propiedad de minimizar la cota en el término de varianza del MISE. De hecho, mientras la varianza de los errores ε_i es $\pi^2/6 = 1.64493$, la nueva varianza es 1, considerablemente menor.

"Intervalos de confianza". Enfoque bayesiano de la estimación. Consideremos el modelo,

$$y_i = \mu(t_i) + \varepsilon_i$$
[21]

donde

$$\mu(t) = \sum_{l=1}^{m} \theta_l t^{l-1} + b^{1/2} X(t)$$
[22]

con $t \in [0,1]$, $\theta = (\theta_1,...,\theta_m)'$ un vector de parámetros fijo, *b* una constante estrictamente positiva, $\varepsilon - N(0,\sigma^2 h)$ y X(t) representa un proceso de Wiener estándar. En este contexto, podemos interpretar un spline clásico como el estimador insesgado de $\mu(t)$, con parámetro de suavizado $h = \sigma^2/nb$. Además, la matriz de covarianzas del vector de valores estimados $(g_{cy}(t_1),...,g_{cy}(t_n))$, $\sigma^2 A(h)$, es $A(h) = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}$, la matriz de proyección que genera los valores estimados a partir de los datos.

Por tanto, con probabilidad 1 - α , $\mu(t)$ estará en el intervalo

$$\left(g_{cy}(t_i) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2 a_{ii}(h)}, g_{cy}(t_i) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2 a_{ii}(h)}\right),$$

donde $Z_{\alpha/2}$ es el (1 - $\alpha/2$) percentil en la distribución normal estándar. Un estudio detallado aparece en Wahba (1990) o Eubank (1988). Obsérvese que, bajo este modelo, $\mu(\bullet)$ es una función aleatoria y estos "intervalos de confianza" no tienen el significado clásico.

Aplicando este enfoque a nuestro caso, en el modelo [16] conocemos la varianza del error; por tanto, el intervalo para el spline clásico es

$$\left(g_{cy}(\lambda i) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}a_{ii}(h)}, g_{cy}(\lambda i) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}a_{ii}(h)}\right)$$

y para el M-spline,

$$\left(g_{M}(\lambda i) - Z_{\alpha/2}\sqrt{a_{ii}(h)}, g_{M}(\lambda i) - Z_{\alpha/2}\sqrt{a_{ii}(h)}\right),$$

Esto nos proporciona "intervalos de confianza" más estrechos en torno a los valores estimados con el M-spline que a los estimados mediante el spline clásico, lo que añade una nueva ventaja a esta forma de estimación.

4. ESTUDIOS DE MONTE CARLO

4.1. Aspectos prácticos de computación del M-spline

El inconveniente del cómputo de este estimador es la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones no lineales. Sin embargo, al ser $\rho(\bullet)$ estrictamente convexa, podemos aplicar el método iterativo de Newton (Utreras, 1981). Brevemente, describimos los dos pasos de este método: el cálculo de un estimador inicial y su refinamiento iterativo.

1. Primer paso: Cálculo de un estimador inicial.

Se toman los datos $z_i = \log l(\lambda_i) + C$ como datos iniciales y se calcula el spline clásico.

2. Segundo paso: Refinamiento iterativo.

Se toma el estimador inicial descrito en el paso primero, que denotamos por $g^{[1]}$. Aplicando el método de Newton, el estimador $g^{[2]}$ será el minimizador del funcional cuadrático definido como sigue, donde g_i denota $g(\lambda_i)$,

$$Q_{2}(g) = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \rho(y_{i} - g_{i}^{[1]}) - \sum_{i=1}^{n} \left[\rho'(y_{i} - g_{i}^{[1]}) \right] (g_{i} - g_{i}^{[1]}) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \left[\rho''(y_{i} - g_{i}^{[1]}) \right] (g_{i} - g_{i}^{[1]})^{2} \right\} + h[g, g]$$

$$(23)$$

Sustituyendo $\rho(\bullet)$ y sus derivadas, obtenemos que minimizar $Q_2(g)$ es equivalente a minimizar

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i^{[2]} (z_i^{[2]} - g_i)^2 + h[g,g]$$
[24]

donde $z_i^{[2]} = g_i^{[1]} + 1 - \exp(g_i^{[1]} - y_i) y w_i^{[2]} = \exp(y_i - g_i^{[1]}) / 2$.

En general, el estimador g^[k] minimizará

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_{i}^{[k]}(z_{i}^{[k]}-g_{i})^{2}+h[g,g]$$
[25]

donde $z_i^{[k]} = g_i^{[k-1]} + 1 - \exp(g_i^{[k-1]} - y_i) y w_i^{[k]} = \exp(y_i - g_i^{[k-1]}) / 2$

El proceso se detiene cuando $g^{[k]}$ y $g^{[k+1]}$ sean lo suficientemente cercanos.

(En la práctica, los resultados son aceptables desde la segunda o tercera iteración). En cada iteración, la selección de h se ha efectuado mediante validación cruzada mínimo-cuadrática (CV). Asintóticamente, por tanto, el proceso será equivalente a minimizar [20], con el parámetro h elegido mediante MCV.

4.2. Estudios de Monte Carlo

Hemos simulado el proceso autorregresivo simple,

$$X_{t} - 0.5X_{t-1} + 0.3X_{t-2} = \varepsilon_{t}$$
[26]

con errores $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. En este caso la densidad espectral verdadera es

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|1 - 0.5e^{-i\lambda} + 0.3e^{-2i\lambda}|^2}$$
[27]

La razón para presentar los resultados para este proceso tan simple es ofrecer por un lado los métodos splines, tanto los splines clásicos como los M-splines, como buenas alternativas frente a estimadores paramétricos, y por otro, analizar si las diferencias teóricas entre ambos tipos de splines se presentan de forma evidente también en la práctica.

Por el primer motivo, hemos considerado como método paramétrico un estimador autorregresivo de orden creciente, seleccionado mediante la minimización del FPE, error final de predicción, definido como:

$$FPE(r) = \frac{N+r}{N-r} (\hat{c}_o - \hat{b}_{r1} \hat{c}_1 - \dots \hat{b}_{rr} \hat{c}_r), \qquad [28]$$

donde *r* es el orden, $\hat{c}_{l} = (1/N) \sum_{t=1}^{N-l} X_{t+l} X_t$ y $\hat{b}_{r1},...,\hat{b}_{rr}$ son los coeficientes estimados obtenidos mediante la resolución de las ecuaciones de Yule-Walker (Akaike, 1969).

Para comparar los diferentes estimadores, examinamos las siguientes medidas de los errores.

1. Error cuadrático medio relativo de la densidad espectral (RSE).

$$RSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(\lambda_i) - \hat{f}(\lambda_i)}{f(\lambda_i)} \right)^2$$
[29]

Esta medida se ha utilizado frecuentemente en estimación espectral mediante kernels (Hurvich and Beltrão and Bloomfield, 1987).

2. Error cuadrático medio del logaritmo de la densidad espectral (MSE).

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(q(\lambda_i) - \hat{q}(\lambda_i) \right)^2$$
[30]

3. Error cuadrático medio relativo de la raíz cuadrada de la densidad espectral (SQSE).

$$SQSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\hat{f}^{\nu_{2}}(\lambda_{i}) - f^{\nu_{2}}(\lambda_{i})}{\hat{f}^{\nu_{2}}(\lambda_{i})} \right)^{2}$$
[31]

Esta medida aparece como una generalización de la medida del error propuesta por Sims (1974) para el caso paramétrico. Sims define la medida

$$\int f(\lambda) b^{*}(\lambda) - b^{*}(\lambda) l^{2} d\lambda$$
[32]

donde \hat{b}^* y b^* representan la transformada de Fourier de los vectores estimados y verdaderos, b^* y *b* respectivamente, en el caso autorregresivo. Bajo ciertas condiciones generales, el estimador mínimo-cuadrático de *b* minimiza [32].

Como $b^*(\lambda) = B(\lambda)$, $\tilde{b}^*(\lambda) = \hat{B}(\lambda)$, $f = 1/|B(\lambda)|^2$ y $\hat{f} = 1/|\hat{B}(\lambda)|^2$, sustituyendo f y f en [32] y aproximando la integral por sumatorios, obtenemos la expresión definida por SQSE, que de este modo se puede computar también para estimadores no paramétricos.

4. Máximo de la discrepancia entre los logaritmos de la densidad espectral verdadera y la estimada (MAX).

$$MAX = \max_{\substack{i=1,n}} |q(\lambda_i) - \hat{q}(\lambda_i)|$$
[33]

Esta medida proporciona una idea de la capacidad del estimador para resolver picos o valles.

Tablas. Hemos generado series temporales de tamaños N = 512, 1024 y 2048, con 1000 replicaciones cada una.

Las Tablas 1, 2 y 3 presentan los principales resultados de las distribuciones empíricas de los errores descritos anteriormente. Los métodos utilizados se denotan por *LSCV*, *MCV* y *FPE* y representan en ese orden al spline clásico con selección de *h* mediante CV, al M-spline, minimizador de [20], computado como se describe en 4.1 y al estimador paramétrico FPE.

Para ambos splines, el número de derivadas del término de penalización ha sido m = 2 y por tanto son splines cúbicos.

5. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos a lo largo del trabajo proporcionan las siguientes conclusiones.

1. De forma general, en un modelo de regresión como [2], utilizar un M-spline significa, en términos asintóticos, utilizar un spline clásico en un modelo de regresión con pseudo-datos.

2. La elección adecuada de la función ρ , que determina el M-spline, produce el mismo resultado que si se utilizara un spline clásico donde los datos tuvieran menor varianza que los del modelo original. Además, esta varianza se hace mínima si la elección se realiza como se indica en el Teorema 4.

3. En la aplicación concreta a la estimación espectral, tanto los resultados teóricos como los provenientes de las simulaciones, llevan a considerar al M-spline elegido como el mejor estimador del espectro de entre los estimadores analizados.

4. Por último, en las simulaciones observamos que también los splines clásicos se presentan como mejor alternativa de estimación del espectro que el estimador paramétrico utilizado. De hecho, los resultados empíricos observados para el proceso simulado se repiten de forma general para una amplia variedad de procesos estacionarios (Ferreira, 1993).

APÉNDICE

Demostración del Teorema 1

Necesitamos el lema previo

Lema 1. Sea el espacio W_2^m dotado de la norma inducida por el producto interno,

$$< f,g >= f(0)g(0) + \dots + f^{(m-1)}(0)g^{(m-1)}(0) + \int_0^1 f^{(m)}(t)g^{(m)}(t)dt$$
 [34]

Entonces, existen funciones $e_i \in W_2^m$, para i = 1,...,n tales que

$$\langle \boldsymbol{e}_i, f \rangle = f(t_i)$$
 [35]

$$\boldsymbol{e}_{i}(t) = \boldsymbol{c}_{0} + \boldsymbol{c}_{1}t + \dots + \boldsymbol{c}_{m-1}t^{m-1} + (-1)^{m} \frac{(t-t)_{+}^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$
[36]

Demostración: La existencia de las funciones e_i que satisfacen las condiciones [35] se sigue directamente del Teorema de representación de Riesz. Verifiquemos que su forma es la descrita en [36].

Integrando por partes las veces necesarias se obtiene

$$\int_{0}^{t_{i}} f^{(m)} \frac{(t_{i}-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt = -f^{(m-1)}(0) \frac{t_{i}^{m-1}}{(m-1)!} + \int_{0}^{t_{i}} f^{(m-1)} \frac{(t_{i}-t)^{m-2}}{(m-2)!} dt$$
$$= \dots = -\sum_{k=1}^{m-1} f^{(m-k)}(0) \frac{t_{i}^{m-k}}{(m-k)!} + \int_{0}^{t_{i}} f'(t) dt$$

De esta última expresión, [35] se obtiene tomando $e_i^{(k)}(0) = t_i^k / k!$ con k=0,1,...,m-1; lo que se logra eligiendo las constantes $c_0,...,c_{m-1}$ de forma apropiada. Por ejemplo, cuando m = 2, se obtienen las siguientes funciones $\{e_i\}_{i=1}^n$.

$$\boldsymbol{e}_{i}(t) = \left(1 - \frac{t_{i}^{3}}{6}\right) + \left(t_{i} + \frac{t_{i}^{2}}{2}\right)t + \frac{\left(t_{i} - t\right)_{+}^{3}}{6}$$

Demostración del Teorema: La realizaremos generalizando los argumentos de O'Sullivan et al. (1986), realizados para m = 2 y una función $\rho(\bullet)$ determinada. Con la norma definida en el lema anterior, y las correspondientes funciones e_i , tenemos que la proyección g_1 de cualquier función en S_n verifica $w(g_1) \le w(g)$, lo que significa que el mínimo se alcanza en S_n .

Sea $g \in W_2^m = S_n \oplus S_n^{\perp}$; entonces $g = g_1 + g_2 \operatorname{con} g_1 \in S_n$ y $g_2 \in S_n^{\perp}$; por tanto,

$$g(t_i) = \langle g, e_i \rangle = \langle g_1, e_i \rangle = g_1(t_i)$$

La primera parte del funcional [4], únicamente depende de los valores en t_i . Por otra parte, $\langle u, g_2 \rangle = 0$ para cada función $u \in S_n$, lo que fuerza a que g_2 y sus *m*-1 primeras derivadas se anulen en cero. Además, como g_1 y g_2 son ortogonales

$$w(g) = \sum_{i} \rho(y_{i} - g(t_{i})) + \int_{0}^{1} (g_{1}^{(m)}(t))^{2} dt + \int_{0}^{1} (g_{2}^{(m)}(t))^{2} dt$$
$$\geq \sum_{i} \rho(y_{i} - g_{1}(t_{i})) + \int_{0}^{1} (g_{1}^{(m)}(t))^{2} dt = w(g_{1})$$

y el Teorema queda probado.

Demostración del Teorema 2. Para demostrar el Teorema 2 es suficiente demostrar que w(g) es un funcional continuo y uniformemente convexo en W_2^m (Tapia y Thompson, 1978).

Consideremos W^m₂ dotado con la norma inducida por el siguiente producto interno

$$< f,g >= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)g(t_i) + [f,g]$$
 [37]

que denotaremos por II·II·. Es decir,

$$||g||^{2} = \sum_{i=1}^{n} g(t_{i})^{2} + [g,g]$$
[38]

Si la matriz formada por los puntos t_i^k , con i = 1,...,n y k = 0,...,m-1 es de rango completo, entonces $||g|| = 0 \Rightarrow g = 0$; K y por tanto, W_2^m con esta norma es un espacio de Hilbert.

i) Continuidad. Para ello demostraremos la siguiente caracterización : si g_k converge a g en la norma [38], entonces $w(g_k)$ converge a w(g). Directamente de la definición de la norma, g_k converge a g si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{n} (g_k(t_i) - g(t_i))^2 + [g_k - g_k - g_k - g] \to 0$$
[39]

Es inmediato ver que $g_k(t)$ y $[g_k, g_k]$ convergen respectivamente a g(t) y [g,g]. Ahora, como ρ es continua, $\rho(y_i - g_k(t))$ converge a $\rho(y_i - g(t))$ y combinando ambos resultados obtenemos finalmente la convergencia de $w(g_k)$ a w(g) y, por tanto, la continuidad de w(g).

ii) Uniformemente convexo (u.c.). Para ver que el funcional w es u.c. en W_2^m , utilizaremos la caracterización del siguiente lema.

Lema 2. (Tapia y Thompson, 1978) Un funcional F, en un espacio de Hilbert H, es u.c. si y sólo si existe una constante C > 0 tal que

$$\left(F'(f) - F'(g)\right)(f - g) \ge C \left\|f - g\right\|^2 \quad f, g \in H$$

$$\tag{40}$$

donde F' denota la primera derivada de Gauteäux:

$$F'(g) = \frac{dF(g + \varepsilon u)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$$

En el caso específico de w,

$$w'(g)(u) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u(t_i) \rho'(y_i - g(t_i)) + 2h \int_0^1 g^{(m)}(t) u^{(m)}(t) dt$$
 [41]

lo que implica que:

$$(w'(f) - w'(g))(f - g) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - g(t_i)) \{ \rho'(y_i - g(t_i)) - \rho'(y_i - f(t_i)) \}$$

+ $2h \int_{0}^{1} (f^{(m)}(t) - g^{(m)}(t))^2 dt$ [42]

Ahora bien, aplicando el teorema del valor medio a los valores $(y_i - g(t_i))$ y $(y_i - f(t_i))$ obtenemos

$$(w'(f) - w'(g))(f - g) \ge \frac{\kappa}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - g(t_i))^2 + 2h[f - g.f - g]$$
$$\ge C ||f - g||_{*}^{2}$$
[43]

y tomando $C = \min\{K/n, 2h\}$, la demostración está concluida.

Demostración del Teorema 4. Los errores en el modelo de pseudo-datos tienen varianza

$$\frac{E(\psi)^2}{\left[E\psi'\right]^2}$$

Sin pérdida de la generalidad, podemos considerar las funciones $\rho(\bullet)$ tales que $E\psi' = 1$ (En otro caso, el resultado se obtiene tomando $\rho(\bullet)/E\psi'$ en vez de $\rho(\bullet)$.)

Consideremos la función $\psi + (\log p)'$. Como el valor $E(x^2)$ es siempre positivo, cualquiera que sea x, en particular

$$E\left[\left(\psi + (\log p)'\right)^2\right] \ge 0$$
[44]

Directamente, de la definición de esperanza matemática, podemos escribir

$$E\left[\left(\psi + (\log p)'\right)^{2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{2}(u)p(u) + 2\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)(\log p(u))'p(u) + \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\log p(u))'\right]^{2}p(u)$$
Ahora bien,
$$\int_{-\infty}^{\infty} (\psi'(u)p(u) + \psi(u)p'(u))du = (\psi(u)p(u))\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$
. Por tanto,
$$\int_{-\infty}^{\infty} (\psi'(u)p(u) + \psi(u)(\log p)'(u)p(u))du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi'(u)p(u) + \psi(u)\frac{p'(u)}{p(u)}p(u)\right)du = 0$$
[45]

y, claramente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)(\log p)'(u)p(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} \psi'(u)p(u)du = -1$$
[46]

Por otra parte tenemos $\int_{-\infty}^{\infty} [(\log p)'(u)]^2 p(u) du = Var(-\log p)' = 1y$ usando los resultados obtenidos en la desigualdad [44], $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(u) p(u) du - 2 + 1 \ge 0$, lo que nos lleva inmediatamente a la expresión

$$Var(\psi) \ge 1 = Var(-\log p)'$$
 ,

que concluye la demostración del teorema.

Demostración del Teorema 5. Podemos escribir

$$\boldsymbol{z}_{j} - \boldsymbol{g}_{(j)}(t_{j}) = \boldsymbol{\mu}(t_{j}) - \boldsymbol{g}_{(j)}(t_{j}) + \frac{\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j})}{\boldsymbol{E}\boldsymbol{\psi}'}$$

Entonces,

$$\left(\boldsymbol{z}_{j} - \boldsymbol{g}_{(j)}(t_{j}) \right)^{2} = \left(\boldsymbol{\mu}(t_{j}) - \boldsymbol{g}_{(j)}(t_{j}) \right)^{2} + \left(\frac{\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j})}{\boldsymbol{E}\boldsymbol{\psi}'} \right)^{2} + 2 \frac{\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j})}{\boldsymbol{E}\boldsymbol{\psi}'} \left(\boldsymbol{\mu}(t_{j}) - \boldsymbol{g}_{(j)}(t_{j}) \right)$$

$$[47]$$

Como $\sum_{i} \{\psi(\varepsilon_{i}) / E\psi'\}^{2}$ no depende de *h*, minimizar la expresión [13] es equivalente a minimizar

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mu(t_{j})-g_{(j)}(t_{j})\right)^{2}+2\frac{\psi(\varepsilon_{j})}{E\psi'}\left(\mu(t_{j})-g_{(j)}(t_{j})\right)\right]$$
[48]

Por otra parte, utilizando la expansión de Taylor, obtenemos

$$\rho(\mathbf{y}_{j} - \mathbf{g}_{(j)}(t_{j})) = \rho(\mathbf{y}_{j} - \mu(t_{j})) - \psi(\mathbf{y}_{j} - \mu(t_{j}))(\mathbf{g}_{(j)}(t_{j}) - \mu(t_{j})) + \frac{\psi'(\theta_{j})}{2}(\mathbf{g}_{(j)}(t_{j}) - \mu(t_{j}))^{2}$$
[49]

donde Θ_j es algún valor entre $(y_j - g_{(j)}(t_j))$ y $(y_j - \mu(t_j))$. Por tanto, minimizar MCV es equivalente a resolver

$$\min \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \psi(\varepsilon_j) \left(\mu(t_j) - g_{(j)}(t_j) \right) + \frac{\psi'(\theta_j)}{2} \left(\mu(t_j) - g_{(j)}(t_j) \right)^2 \right\}$$
[50]

Reemplazando $\psi'(\theta_j)$ por $E\psi'(\epsilon_j)$, el problema anterior es equivalente a resolver

$$\min \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \psi(\varepsilon_j) \left(\mu(t_j) - g_{(j)}(t_j) \right) + \frac{\mathcal{E}\psi'}{2} \left(\mu(t_j) - g_{(j)}(t_j) \right)^2 \right\}$$
[51]

Finalmente, multiplicando esta última expresión por $2/E\psi'$ obtenemos exactamente [48], lo que completa la equivalencia.

El único paso que queda por justificar es la sustitución de $\psi'(\theta_j)$ por el valor esperado $E\psi'(\varepsilon_j)$. La diferencia debida a esta sustitución es

$$\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\left\{ E\psi'(\varepsilon_{j})(\mu(t_{j})-g_{(j)}(t_{j}))^{2}-\psi'(\theta_{j})(\mu(t_{j})-g_{(j)}(t_{j}))^{2}\right\},$$

equivalente a

$$\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\left\{ E\psi'(\varepsilon_{j})-\psi'(\theta_{j})(\mu(t_{j})-g_{(j)}(t_{j}))^{2}\right\}$$

Ahora bien, como θ_j es un valor comprendido entre $(y_j - g_{(j)}(t_j))$ y $(y_j - \mu(t_j))$, de la consistencia de los estimadores spline y la ley de los grandes números,

obtenemos la convergencia a cero de esta diferencia y la demostración queda completa.

REFERENCIAS

- AKAIKE, H (1969). «Fitting autoregressive models for prediction». Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 21:243--247.
- BELTRÃO, K.L and BLOOMFIELD, P (1987). «Determining the bandwidth of a kernel spectrum estimate» *Journal of Time Series Analysis*, 8:21--38.
- Cox, D (1983). «Asymtotics for M-type smoothing splines.» Annals of Statistics, 11(2):530--551.

- DZHAPARIDZE, K (1986). «Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Spectral Analysis of Stationary Time Series». *Springer-Verlag*, New York.
- EUBANK, R.L (1988). «Spline Smoothing and Nonparametric Regression». *Marcel Dekker*, New York.
- FERREIRA, E (1993). «Suavizado no paramétrico con aplicación a la estimación espectral». *Tesis doctoral. Universidad del País Vasco*, Bilbao, Spain.
- HUBER, P (1979). «Robust Smoothing». *Robustness in Statistics. Launer and Wilkinson.Academic*, New York.
- HURVICH, C and BELTRÃO , K.L.(1990). «Cross-validation choice of a spectrum estimate and its connections with {AIC}». *Journal of Time Series Analysis*, 11(2):121--137.
- KOOPMANS, L.H. (1974). «The Spectral Analysis of Time Series». *Academic Press*, New York.
- O'SULLIVAN, F, YANDELL, B.S. and RAYNOR, W.J. (1986). «Automatic smoothing of regression functions in generalized linear models». *Journal of the American Statistical Association*, 81(393):96--103.
- PAWITAN, Y and O'SULLIVAN, F (1994). «Nonparametric spectral density estimation using penalized whittle likelihood». *Journal of the American Statistical Association*, 89:600-610.
- SIMS, C.A. (1974). «Seasonality in regression». Journal of the American Statistical Association, 69 (347):618--626.
- SPECKMAN, P (1985). «Spline smoothing and optimal rates of convergence in nonparametric regression models». *Annals of Statistics*, 13:970--983.
- Stone, C.J. (1980). «Optimal rates of convergence for nonparametric estimators». *Annals of Statistics*, 8:1348--1360.
- TAPIA, R.A. and TOMPSON, J.R. (1978). «Nonparametric Probability Density Estimation». Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland.
- UTRERAS, F. (1981). «On computing robust splines and applications». *SIAM*, 2 (2):153--163.
- WAHBA, G. AND WOLD, S. (1975). «Periodic splines for spectral density estimation. the use of cross validation for determining the degree of smoothing». *Communications in Statistics*, 4 (2):125--141.
- WAHBA, G. (1990). «Spline models for observational data». *Regional conference series in applied mathematics. Society for industrial and applied mathematics,* Philadelphia, Pennsylvania.
- WHITTAKER, E. (1923).«On a new method of graduation». Proc. Edinburgh Math. Soc., 41:63--75.

M-TYPE SMOOTHING SPLINES APPLIED TO THE SPECTRAL DENSITY ESTIMATION

SUMMARY

A typical problem in time series is the estimation of the spectral density or spectrum of a stationary process. This problem has been extensively studied using the parametric approach. In recent years, the relevance of nonparametric methods to estimate functions have increased, in particular, to estimate the spectral density. In this paper, we propose to use an M-spline to estimate the spectrum. We study theoretically the way of selecting the M-spline and we apply the results obtained to the spectral estimation. Finally, the Monte Carlo studies show the practical improvement of this method comparing to others, parametric and no parametric.

Keywords: M-splines, Spectral density, Smoothing parameter, Stationary processes.

Tabla 1

0.006183919

0.0288764

DISTRIBUCIONES EMPÍRICAS, N = 512

Valores extremos, Mediana y Cuartiles

MSE	LSCV	MCV	FPE	
Máximo	0.21788900	0.0728654	0.19525130	
3er. Cuartil	0.10378365	0.0389526	0.13478515	
Mediana	0.05042825	0.0249221	0.11260170	
1er. Cuartil	0.02673070	0.0158349	0.09416095	
Mínimo	0.00145120	0.0025223	0.04319570	
Intervalo de confianza para la Mediana (95%)				

Cota Inferior	0.04659282	0.02377138	0.1105796
Cota superior	0.05426368	0.02607282	0.1146238

Valores extremos, Mediana y Cuartiles

SQSE	LSCV	MCV	FPE
Máximo	0.0592050	0.02015140	0.0525746
3er. Cuartil	0.0278330	0.01062150	0.0357152
Mediana	0.0129578	0.00650585	0.0294564
1er. Cuartil	0.0067903	0.00415400	0.0240631
Mínimo	0.0006131	0.00065600	0.0107930
Intervalo de confi	anza para la Media	nna (95%)	
Cota superior	0.01400523	0.006827780	0.0300364

0.01191037

Valores extremos, Mediana y Cuartiles

Cota Inferior

RSE	LSCV	MCV	FPE
Máximo	0.24385530	0.06548100	0.2506147
3er. Cuartil	0.11396885	0.03543880	0.1661308
Mediana	0.05311505	0.02334010	0.1370763
1er. Cuartil	0.02642025	0.01497765	0.1083027
Mínimo	0.00146870	0.00242700	0.0445616

Intervalo de confianza para la Mediana (95%)

Cota superior	0.05747292	0.02435859	0.1399548
Cota Inferior	0.04875718	0.02232161	0.1341978

Valores extremos, Mediana y Cuartiles

MAX	LSCV	MCV	FPE
Máximo	1.4882569	0.7181165	1.3417478
3er. Cuartil	0.8131586	0.4465432	1.0079781
Mediana	0.5220835	0.3442175	0.8777393
1er. Cuartil	0.3513287	0.2648074	0.7783675
Mínimo	0.0735053	0.0887227	0.4856646
Intervalo de confi	ianza para la Media	na (95%)	
Cota superior	0.5450718	0.3532637	0.8891685
Cota Inferior	0 4990952	0.3351713	0.8663100

Tabla 2

DISTRIBUCIONES EMPÍRICAS, N = 1024

Valores extremos, Mediana y Cuartiles MSE LSCV MCV FPE Máximo 0.09060610 0.03455130 0.09758660 3er. Cuartil 0.04437765 0.01896750 0.06697451 Mediana 0.02289215 0.01260165 0.05588345 1er. Cuartil 0.01297445 0.00816780 0.04634040 Mínimo 0.00165930 0.00192580 0.02222810 Intervalo de confianza para la Mediana (95%) Cota superior 0.02445529 0.01313922 0.05691055 Cota Inferior 0.02132900 0.01206408 0.05485636 Valores extremos, Mediana y Cuartiles SQSE LSCV MCV FPE Máximo 0.02355840 0.00924230 0.02510970 3er. Cuartil 0.01137625 0.00498015 0.01729120 Mediana 0.00579775 0.00325710 0.01426215 1er. Cuartil 0.00325095 0.00210810 0.01185200 Mínimo 0.00043010 0.00048310 0.00537370 Intervalo de confianza para la Mediana (95%) Cota superior 0.00620220 0.003400061 0.01453289 Cota Inferior 0.005393301 0.003114139 0.01399141 Valores extremos, Mediana y Cuartiles RSE LSCV MCV FPE Máximo 0.03377890 0.09106560 0.11182140 3er. Cuartil 0.04495775 0.01823685 0.07480550 Mediana 0.02286360 0.01208715 0.06116090 1er. Cuartil 0.01283990 0.00787245 0.04991165 Mínimo 0.00165070 0.00193960 0.02338540 Intervalo de confianza para la Mediana (95%) Cota superior 0.02446232 0.01260305 0.06240003 Cota Inferior 0.02126488 0.01157125 0.05992177 Valores extremos, Mediana y Cuartiles MAX LSCV MCV FPE Máximo 0.6147385 0.3568214 0.6601238 3er. Cuartil 0.3570300 0.2313454 0.4982609 Mediana 0.2431456 0.1833788 0.4403910 1er. Cuartil 0.1835441 0.1460325 0.3902574 Mínimo 0.0623336 0.0603464 0.2566475 Intervalo de confianza para la Mediana (95%) Cota superior 0.2517811 0.1876254 0.445767

0.1791323

0.435015

Cota Inferior

0.2345101

Tabla 3

DISTRIBUCIONES EMPÍRICAS, N = 2048

Valores extremos, Mediana y Cuartiles

MSE	LSCV	MCV	FPE
Máximo	0.0374143	0.017356001	0.0495768
3er. Cuartil	0.0193063	0.009691849	0.0344137
Mediana	0.0112697	0.006742050	0.0285968
1er. Cuartil	0.0069458	0.004543850	0.0237755
Mínimo	0.0009879	0.000464200	0.0115285

Intervalo de confianza para la Mediana (95%)

Cota superior	0.01188496	0.0069983	0.02912633
Cota Inferior	0.01065444	0.0064858	0.02806727

Valores extremos, Mediana y Cuartiles

SQSE	LSCV	MCV	FPE
Máximo	0.00983030	0.00445690	0.01231550
3er. Cuartil	0.00499330	0.00249540	0.00869565
Mediana	0.00286035	0.00172195	0.00721810
1er. Cuartil	0.00173210	0.00116115	0.00601360
Mínimo	0.00025510	0.00011670	0.00292050

Intervalo de confianza para la Mediana (95%)

Cota superior	0.003022681	0.001788364	0.007351603
Cota Inferior	0.002698019	0.001655536	0.007084597

Valores extremos, Mediana y Cuartiles

RSE	LSCV	MCV	FPE
Máximo	0.0378206	0.01630180	0.05385520
3er. Cuartil	0.0194060	0.00928255	0.03641735
Mediana	0.0113092	0.00660765	0.02999500
1er. Cuartil	0.0069545	0.00444080	0.02470980
Mínimo	0.0009984	0.00046960	0.01162650

Intervalo de confianza para la Mediana (95%)

Cota superior	0.01192899	0.006848656	0.03057776
Cota Inferior	0.01068941	0.006366644	0.02941224

Valores extremos, Mediana y Cuartiles

MAX	LSCV	MCV	FPE
Máximo	1.0392478	0.5131873	0.9387144
3er. Cuartil	0.5618110	0.3222286	0.7070889
Mediana	0.3496923	0.2506689	0.6219968
1er. Cuartil	0.2432481	0.1947241	0.5520726
Mínimo	0.0801758	0.0882172	0.3366852
Intervalo de confianza para la Mediana (95%)			
Cota superior	0.3655493	0.2570156	0.6297129
Cota Inferior	0.3338353	0.2443222	0.6142806