ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
Vol. 37, Núm. 140, 1995, págs. 461 a 471

Extensión de la invarianza de soluciones en ecuaciones de equilibrio

por
MARIANO RUIZ ESPEJO

Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa
Universidad Nacional de Educación a Distancia

RESUMEN

En un trabajo anterior, Ruiz Espejo (1990) introdujo las ecuaciones de equilibrio para variables aleatorias usuales, y justificó que sus soluciones son invariantes lineales. Sin embargo, estas soluciones son invariantes para una clase de transformaciones más ámplia, que presentamos en este trabajo.

Palabras clave: invarianza, equilibrio, sistemas de ecuaciones, transformaciones.

Clasificación AMS: 62F35, 62D05.

1. INTRODUCCIÓN

Según introdujo Ruiz Espejo (1990), una variable aleatoria usual X es una variable aleatoria absolutamente continua con función de distribución F que satisface simultáneamente:

i) El recorrido de X es el intervalo (a, b) de longitud finita o infinita.
ii) Existe $dF(z)/dz$ sobre (a, b).
iii) $[dF(z)/dz]_{z=x} > 0$ sobre (a, b).

Llamando $[dF(z)/dz]_{z=x} = f(x)$ a la función de densidad asociada a X, las ecuaciones de equilibrio de orden p, con $p \in [0, 1)$, vienen dadas por el sistema

$$1 - p = \int_{x_1}^{x_2} f(s)ds \tag{1}$$

$$(1 - p)\,\mu_x = \int_{x_1}^{x_2} sf(s)ds \tag{2}$$

en el que se demuestra que para todo $p \in [0, 1)$, existe una solución única en x_1 y x_2, siendo $\mu_x = E(X)$, como propone Ruiz Espejo (1990).

En las secciones posteriores veremos un teorema que generaliza las transformaciones invariantes respecto de la invarianza lineal ya probada para las soluciones del sistema (1)-(2). Como consecuencias se obtienen algunos resultados entre los cuales se deduce como corolario el teorema 4.1 de Ruiz Espejo (1990).

2. TRANSFORMACIONES INVARIANTES

Teorema 1. Para cualquier variable aleatoria usual X con función de densidad f, los puntos solución del sistema de equilibrio (1) y (2) son invariantes para cualquier transformación $y = \Phi(x)$ monótona estrictamente y derivable (con derivada no nula) en el recorrido (a, b), si y solo si se verifica

$$\Phi[E(X)] = E[\Phi(X)]. \ \square$$

Demostración. Cualquier cambio de variable del tipo enunciado, $y = \Phi(x)$, transforma variables aleatorias usuales, X, en otras también usuales, Y. La comprobación es sencilla a partir de la definición de variable aleatoria usual dada al comienzo de la Introducción.

El sistema de ecuaciones de equilibrio para la variable aleatoria transformada, Y, será:

$$1-p=\int_{y_1}^{y_2}\frac{f\left[\Phi^{-1}(t)\right]}{\Phi'\left[\Phi^{-1}(t)\right]}dt \tag{3}$$

$$(1-p)\,\mu_x=\int_{y_1}^{y_2}t\frac{f\left[\Phi^{-1}(t)\right]}{\Phi'\left[\Phi^{-1}(t)\right]}dt \tag{4}$$

donde $\mu_y = E(Y) = E[\Phi(X)]$. Y haciendo el cambio de variable $t = \Phi(s)$ en (3) y (4), llamemos x_i a los valores que verifican $\Phi(x_i) = y_i$, y obtenemos:

$$1-p=\int_{x_1}^{x_2}f(s)ds \tag{5}$$

$$(1-p)\,\mu_x(\Phi)=\int_{x_1}^{x_2}\Phi(s)\,f(s)\,ds. \tag{6}$$

La ecuación (5) es idéntica a la (1), pero la (6) recoge un factor no existente en (2), $\Phi(s)$, que aparece en ambos miembros de (6) ya que en el primero

$$\mu_y = E(Y) = E[\Phi(X)] = \mu_x(\Phi).$$

Queda probar que las soluciones de (5) y (6) son las mismas que las de las ecuaciones simultáneas (1) y (2).

El segundo miembro de la ecuación (6), tras dividirse por $(1-p)$ ambos miembros, puede expresarse así:

$$\int_{x_1}^{x_2}\Phi(s)\frac{f(s)}{1-p}ds=\Phi(c)\quad\text{con}\quad c\in[x_1,x_2], \tag{7}$$

en virtud del Teorema del Valor Medio Ponderado para Integrales, pero además c es único por ser Φ monótona estrictamente. Esto nos permite expresar

$$c=\Phi^{-1}\left[\int_{x_1}^{x_2}\Phi(s)\frac{f(s)}{1-p}ds\right]$$

donde x_1 y x_2 son los únicos puntos $\Phi^{-1}(y_1)$ y $\Phi^{-1}(y_2)$ respectivamente asociados a y_1 e y_2, puntos solución de las ecuaciones de equilibrio para la variable aleatoria usual $Y = \Phi(X)$ para cierto orden p.

Para ver que x_1 y x_2 son los mismos puntos solución de las ecuaciones de

equilibrio de la variable aleatoria usual X (para el mismo p) observemos que estos últimos verifican las ecuaciones (5)-(6) equivalentes a las de (3)-(4).

Por ser x_1 y x_2 soluciones del sistema (1)-(2), dado $p \in [0,1)$ quedan determinados $x_1 = x_1(p)$ y $x_2 = x_2(p)$, funciones derivables según se ve en el teorema 1 de Ruiz Espejo (1993). Esto nos hace viable definir la función

$$\Psi\colon\ [0,1) \longrightarrow [a,b]\,,$$

de modo que

$$\Psi(p) = \Phi^{-1}\left[\int_{x_1(p)}^{x_2(p)} \Phi(s)\frac{f(s)}{1-p}ds\right].$$

Veamos que una condición necesaria y suficiente para que los sistemas (1)-(2) y (5)-(6) tengan las mismas soluciones, es que $\Psi(p) = cte.$ para todo $p \in [0,1)$.

La función Ψ es derivable por serlo $\Phi^{-1}(\cdot)$, $x_1(\cdot)$ y $x_2(\cdot)$, además de que existe $\Phi' \neq 0$ y f es continua. Por tanto, derivando Ψ tenemos:

$$\Psi'(p) = \left(\Phi^{-1}\right)'\left[\int_{x_1}^{x_2} \Phi(s)\frac{f(s)}{1-p}ds\right] \times$$

$$\times\left\{\frac{[\Phi(x_2(p))\,f(x_2(p))\,x_2'(p) - \Phi(x_1(p))\,f(x_1(p))\,x_1'(p)](1-p) + I}{(1-p)^2}\right\},$$

donde

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(s)\,f(s)\,ds.$$

Estudiando los signos, el primer factor de $\Psi'(p)$ toma siempre signo constante igual al de Φ' y no se anula nunca por hipótesis; además si tenemos en cuenta que el denominador del segundo factor es siempre positivo para $p \in [0,1)$, resulta que Ψ' toma valor cero si y solo si lo toma el numerador del segundo factor de Ψ', es decir, $\Psi'(p) = 0$ si y solo si

$$\Phi[x_2(p)]\,f[x_2(p)]\,x_2'(p) - \Phi[x_1(p)]\,f[x_1(p)]\,x_1'(p) +$$

$$+\int_{x_1(p)}^{x_2(p)} \Phi(s)\frac{f(s)}{1-p}ds = 0,$$

y teniendo en cuenta que los dos primeros sumandos de la última expresión, son

igual a la derivada primera con respecto a p del tercer sumando del trinomio, previamente multiplicado por $(1-p)$, nos quedará que llamando a este último término

$$\tau(p) = \int_{x_1(p)}^{x_2(p)} \Phi(s) f(s)\, ds,$$

entonces, la condición necesaria y suficiente para que $\Psi'(p) = 0$ es que se satisfaga la ecuación diferencial

$$\tau'(p) + \frac{\tau(p)}{1-p} = 0,$$

de tipo separable, que resolviéndola quedará

$$\log|\tau(p)| = \log(1-p) + C_1 \quad (\text{con } C_1 \text{ constante}),$$

y tomando en ambos miembros la función exponencial, obtenemos

$$|\tau(p)| = (1-p)\, e^{C_1} = C(1-p) \quad \left(\text{con } C = e^{C_1} \text{ constante positiva}\right).$$

Resumiendo, la condición necesaria y suficiente para que $\Psi'(p) = 0$ es que

$$\tau(p) = \int_{x_1(p)}^{x_2(p)} \Phi(s) f(s)\, ds = C'(1-p) \quad (C' \text{ es constante real con } |C'| = C),$$

donde la constante C' se obtiene al tomar $p = 0$, pues $x_1(0) = a$ y $x_2(0) = b$, de donde

$$\mu_x(\Phi) = E[\Phi(X)] = \int_a^b \Phi(s) f(s)\, ds = C'. \tag{8}$$

Por tanto, $\Psi'(p) = 0$ si y solo si (por (6))

$$\tau(p) = (1-p)\, \mu_x(\Phi). \tag{9}$$

Así, de que $\Psi(p) = cte.$ para todo $p \in [0,1)$, se deduce:

$$\Psi(p) = cte. = \Psi(0) = \Phi^{-1}[\mu_x(\Phi)] \quad \text{para todo } p \in [0,1). \tag{10}$$

Por (10), los puntos solución de equilibrio pará X verifican las ecuaciones (5)-(6) y además, debido al teorema de unicidad de soluciones para las ecuaciones (1)-(2) (Ruiz Espejo, 1990), y por otro lado para (5)-(6), concluímos la invarianza

para el tipo de transformaciones enunciadas en el teorema 1.

Profundizando en el análisis de cómo debe ser Φ para que se cumpla (10), volvemos a la expresión (7) y obligando a que sea $c = \Psi(p)$ una constante para todo $p \in [0,1)$, tendremos que al hacer tender $p \to 1-$ (por la izquierda),

$$c \in \left[\lim_{p\to 1-} x_1(p), \lim_{p\to 1-} x_2(p)\right]$$

si estos límites existen. Como $x_1(p)$ es creciente, $x_2(p)$ es decreciente, vimos que $x_1(p) < x_2(p)$ si $p \in [0,1)$ y además f es continua y no nula salvo a lo sumo en un número finito de puntos, si fuera cierto que

$$\lim_{p\to 1-} x_1(p) < \lim_{p\to 1-} x_2(p), \tag{11}$$

entonces deduciríamos que

$$0 = \lim_{p\to 1-} \int_{x_1(p)}^{x_2(p)} f(s)ds = \int_{\lim_{p\to 1-} x_1(p)}^{\lim_{p\to 1-} x_2(p)} f(s)ds > 0. \tag{12}$$

Luego, como el absurdo (12) proviene de suponer la desigualdad estricta de los límites de (11), y por ser $x_1(p) < x_2(p)$ para todo $p \in [0,1)$, solo queda la posibilidad de que

$$\mu_x = \lim_{p\to 1-} x_1(p) = \lim_{p\to 1-} x_2(p) = c = \Psi(p) = \Phi^{-1}[\mu_x(\Phi)],$$

y de ésta, por (8),

$$\Phi(\mu_x) = \mu_x(\Phi) = C'. \tag{13}$$

Para concluir, el sistema (5)-(6) quedará equivalente al (14)-(15) siguiente

$$1 - p = \int_{x_1}^{x_2} f(s)ds \tag{14}$$

$$(1-p)C' = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(s) f(s)\, ds = \tau(p) \quad \text{para todo } p \in [0,1), \tag{15}$$

que implica que $\tau'(p) = -C'$, de donde se satisface la ecuación diferencial

$$\tau'(p) + \frac{\tau(p)}{1-p} = -C' + \frac{(1-p)C'}{1-p} = 0,$$

que es condición necesaria y suficiente para la invarianza de soluciones del sistema de equilibrio por la transformación Φ monótona estrictamente y derivable (con derivada no nula) en el recorrido (a, b), que verifique (13), o equivalentemente

$$\Phi\left[E\left(X\right)\right] = E\left[\Phi\left(X\right)\right]. \square$$

3. CONSECUENCIAS

Corolario 1. En la tesis del teorema 1, $\mu_x = E\left(X\right)$ es punto de inflexión de Φ. $\square$

Demostración. Del sistema (5)-(6) se deduce que

$$\left(1-p\right)\Phi\left(\mu_x\right) = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(s) f(s) ds \quad \text{para todo } p \in [0,1], \tag{16}$$

y aplicando la desigualdad de Jensen para desigualdades estrictas, tenemos que:

i) Si Φ es convexa estrictamente en un entorno V_1 de μ_x, de lo anterior, podríamos encontrar un valor p_1 próximo a 1, $p_1 < 1$, tal que

$$\left(x_1\left(p_1\right), x_2\left(p_1\right)\right) \subset V_1;$$

y aplicando la desigualdad citada en la variable aleatoria X truncada en el intervalo $\left(x_1\left(p_1\right), x_2\left(p_1\right)\right)$, obtendríamos que

$$\Phi\left(\mu_x\right) < \int_{x_1(p_1)}^{x_2(p_1)} \Phi\left(s\right) \frac{f(s)}{1-p_1} ds. \tag{17}$$

ii) Si Φ es cóncava estrictamente en un entorno V_2 de μ_x, por analogía existiría $p_2 < 1$, tal que

$$\Phi\left(\mu_x\right) > \int_{x_1(p_2)}^{x_2(p_2)} \Phi\left(s\right) \frac{f\left(s\right)}{1-p_2} ds. \tag{18}$$

Como sabemos que (16) es cierto, tanto (17) como (18) son contradicciones que proceden de admitir que Φ es cóncava estrictamente o convexa estrictamente en algún entorno del punto μ_x, y por ello deducimos que Φ tiene un punto de inflexión en $\mu_x = E\left(X\right)$. $\square$

Corolario 2. Si $\Phi(x) = Ax + B$, con $A \neq 0$, entonces $E[\Phi(X)] = \Phi[E(X)]$ y por ello Φ es una transformación que deja invariantes los puntos solución de las ecuaciones de equilibrio para cualquier variable aleatoria usual X y para todo valor de $p \in [0, 1)$. □

Corolario 3. Si $\Phi(x) = Ax + B$, con $A > 0$, tenemos el teorema 4.1 de Ruiz Espejo (1990). □

Como conclusión práctica, los estimadores robustos e invariantes lineales de la media poblacional de variables aleatorias usuales, siguen siendo robustos e invariantes frente a cualquier transformación que verifique las condiciones del teorema 1. La robustez se entiende en el sentido de Andrews *et al.* (1972). Otras aplicaciones de estos conceptos tratados aquí pueden consultarse en los trabajos de Ruiz Espejo *et al.* (1992a, 1992b).

Sobre la cuestión de si la única transformación Φ, que verifica

$$E[\Phi(X)] = \Phi[E(X)],$$

es propiamente la lineal

$$\Phi(x) = Ax + B \text{ con } A \neq 0,$$

proponemos un contraejemplo. Sea la transformación

$$\Phi\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

definida $\Phi(x) = arctg(x)$, que no es lineal, es monótona estrictamente y derivable pues

$$\Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2} \neq 0 \text{ en } (a, b) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R};$$

además es simétrica respecto al origen $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, y de aquí existe la variable aleatoria usual X tal que:

$$E[\Phi(X)] = E[arctg(X)] = 0 = arctg(0) = arctg[E(X)] = \Phi[E(X)].$$

Pero la condición de que $E(X)$ sea conocida es muy exigente ya que tenemos el resultado siguiente:

Teorema 2. Si $\mu_x = E(X)$ es desconocida, para una variable aleatoria usual X con función de densidad $f(x) > 0$ en (a, b), al tratar de estimar robusta e invariantemente μ_x ante la transformación Φ que verifique

$$\Phi(\mu_x) = E[\Phi(X)] \quad \text{para todo } \mu_x \in (a, b),$$

entonces: μ_x es punto de inflexión de Φ, para todo $\mu_x \in (a, b)$; en este caso, para todo $x \in (a, b)$, tenemos $\Phi(x) = Ax + B$ con $A \neq 0$. □

REFERENCIAS

ANDREWS, D.F., BICKEL, P.J., HAMPEL, F.R., HUBER, P.J., ROGERS, W.H. y TUKEY, J.W. (1972). *Robust Estimates of Location.* Princeton: University Press.

RUIZ ESPEJO, M. (1990). Una clase de estimadores de la media poblacional robustos e invariantes lineales. *Metron,* 48, 55-66.

——— (1992a). Borelianos óptimos según criterios clásicos. *Estadística,* 44, 171-182.

——— (1993). Un sistema de ecuaciones diferenciales caracterizador del equilibrio para variables aleatorias usuales. *Rev. Real Acad. Cienc. Madrid,* 87, 307-318.

——— y RUIZ ESPEJO, M.M. (1992b). Equilibrated strategy for population variance estimation. *Test,* 1, 79-91.

EXTENSION OF THE INVARIANCE OF SOLUTIONS IN EQUILIBRIUM EQUATIONS

SUMMARY

In a previous paper, Ruiz Espejo (1990) introduced the equilibrium equations for usual random variables, and he justified that their solutions were linear invariant. However, these solutions are invariant for a wider kind of transformations, which we characterized in the theorem we present in this paper.

Key words: invariance, equilibrium, systems of equations, transformations.

AMS Classification: 62F35, 62D05.