

Aumento de la potencia del gráfico de control multivariante T^2 de Hotelling utilizando señales adicionales de falta de control

por
FRANCISCO APARISI
J. CARLOS GARCÍA DÍAZ

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad Politécnica de Valencia

RESUMEN

El gráfico de control de T^2 de Hotelling es utilizado habitualmente para controlar simultáneamente varias características correlacionadas que indican la calidad de un único proceso productivo. Sin embargo, este gráfico es poco potente a la hora de detectar cambios pequeños o moderados en el proceso. En este trabajo se describe el uso de señales adicionales de falta de control, mostrándose las mejoras logradas en la potencia del gráfico y la frecuencia de aparición de dichas señales.

Palabras clave: Mejora Longitud Media Racha Average Run Length.

Clasificación AMS: 62N10, 62P99

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente, los métodos de control estadístico de procesos (SPC) están ampliamente implantados en la industria. Sin embargo, el SPC utilizado generalmente es el SPC univariante, es decir, el control de una única característica de calidad utilizando alguno de los gráficos disponibles (Shewhart, CUSUM, EWMA, etc.). Pero son muchas las situaciones en la industria donde es necesario tener que controlar simultáneamente dos o más características de calidad correlacionadas en un mismo proceso. En este caso, puede ser erróneo utilizar un gráfico univariante para controlar cada variable por separado, si no se tiene en cuenta la probabilidad del error tipo I conjunto y la correlación entre las variables en consideración.

Pongamos como ejemplo el tener que controlar dos variables aplicando a cada una de ellas un gráfico de control \bar{X} de Shewhart con los límites de control situados según el habitual criterio 3-sigma. Si las dos variables están bajo control, la probabilidad de que una de las variables tome valores fuera de los límites de control (probabilidad del error tipo I) es igual a 0.0027. Pero para el control conjunto de las dos variables, suponiendo que son independientes, la probabilidad de que aparezca una señal de fuera de control cuando el proceso está bajo control es $1 - (1 - 0.0027)(1 - 0.0027) = 0.0054$. Por tanto, la probabilidad del error tipo I es mayor cuando son utilizados dos gráficos de control en los que no se han modificado los límites de control. La distorsión que se produce en el procedimiento de control aumenta según el número de variables que estemos controlando simultáneamente. Si son controladas p variables independientes, con gráficos con error tipo I de probabilidad α , la probabilidad del error tipo I para el proceso en conjunto, α' , es

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p \quad (1)$$

La ecuación 1 puede ser utilizada cuando las variables son independientes para obtener el valor requerido de α para cada gráfico de control cuando α' es fijado, y entonces obtener convenientemente los correspondientes límites de control.

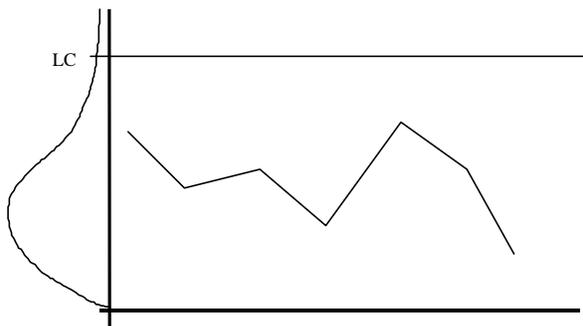
El enfoque multivariante en control de calidad consiste en plantear el test de hipótesis $H_0: \mu_i = \mu_0$ vs. $H_1: \mu_i \neq \mu_0$ donde μ_i es el vector de medias actual μ_i y μ_0 es el vector de medias cuando el proceso está bajo control [Hotelling (1947)]. Siguiendo a Hotelling (1947), consideramos p características o variables que van a ser controladas simultáneamente distribuyéndose según una normal p -variante con vector de medias $\mu_0 = (\mu_{0,1}, \mu_{0,2}, \dots, \mu_{0,p})$ y matriz de varianzas-covarianzas Σ , cuando el proceso está bajo control. En el instante i se toma una muestra de tamaño n de cada característica. Entonces es posible calcular el vector de medias muestrales X_i . Si conocemos los valores de μ_0 y Σ , el estadístico:

$$T_i^2 = n(\bar{X}_i - \mu_0)' \Sigma^{-1}(\bar{X}_i - \mu_0) \quad (3)$$

es el conocido estadístico T^2 de Hotelling. T_i^2 se distribuye como una variable chi-cuadrado (χ^2) con p grados de libertad.

Cuando el proceso está bajo control, esto es $\mu_i = \mu_0$, existe una probabilidad α que el estadístico exceda un valor crítico $\chi_{p,\alpha}^2$, por tanto, la probabilidad de error conjunto de primera especie se puede fijar exactamente al nivel α produciéndose una alarma cuando $T_i^2 > \chi_{p,\alpha}^2$. De esta forma se sugiere el uso de un gráfico similar al de Shewhart en el que se dibujan los valores de T_i^2 (gráfico de control χ^2), figura 1, con un único límite de control LC = $\chi_{p,\alpha}^2$ [ver, e.g., Jackson (1985) y Alt (1985)]. Cuando se supera el valor LC diremos que el proceso está fuera de control. Si $\mu_i \neq \mu_0$ el estadístico T_i^2 se distribuye como una variable chi-cuadrado no central con p grados de libertad y parámetro de descentrado $\lambda = n(\mu_i - \mu_0)' \Sigma^{-1}(\mu_i - \mu_0)$.

Figura 1
GRÁFICO T^2 DE HOTELLING



Una medida del cambio de un vector (o distancia entre dos vectores) utilizada en análisis multivariante es la distancia de Mahalanobis. En nuestro caso la distancia entre el vector de medias original y el nuevo vector de medias es $d = \sqrt{(\mu_i - \mu_0)' \Sigma^{-1}(\mu_i - \mu_0)}$. Los cambios en el vector de medias pueden ser medidos utilizando la distancia d , ya que $\lambda = nd^2$ y, entonces, la distribución de T^2 cuando el proceso está fuera de control sólo depende de n y d .

Cuando μ_0 y Σ son desconocidos sus valores pueden ser estimados mediante información recogida cuando el proceso se supone que está bajo control. Estimamos el valor de μ_0 mediante $\bar{\bar{X}}$ (media de los vectores de medias) y estimamos el valor de Σ mediante S (matriz de varianzas-covarianzas muestrales). En este caso, el cálculo de T^2 se realiza mediante

$$T_i^2 = n(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})' S^{-1} (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}) \quad (4)$$

Bajo algunas suposiciones, Tracy, Young y Mason (1992), se demuestra que la distribución de T_i^2 es

$$T_i^2 \approx \frac{p(m-1)(m+1)}{m(m-p)} F_{p, m-p} \quad (5)$$

siendo m el número de muestras utilizadas para estimar μ_0 y S . Si m tiende a infinito, T^2 converge en distribución a una chi-cuadrado con p grados de libertad, $T_i^2 \approx \chi_p^2$ [Seber (1984), pp. 18-19]. En este trabajo utilizaremos la distribución $T_i^2 \approx \chi_p^2$, ya que μ_0 y Σ se suponen conocidos.

Una medida muy utilizada de la eficacia de un método de control estadístico de un proceso es el ARL (Average Run Length, longitud media de racha). El ARL es el número promedio de muestras que hay que tomar (puntos en el gráfico) hasta que aparece una señal de falta de control. Cuando el proceso está bajo control el ARL viene dado por

$$ARL_{d=0} = \frac{1}{\alpha} \quad (6)$$

Vamos a considerar un valor de α igual a 0.005 encontrado con frecuencia en la bibliografía relativa a control multivariante. Entonces cuando el proceso está bajo control, el ARL es $1 / 0.005 = 200$. Si queremos detectar un cambio de valor d , el ARL viene dado por

$$ARL_d = \frac{1}{1-\beta} \quad (7)$$

donde β es la probabilidad de error de segunda especie (error tipo II) y es la probabilidad de no detectar que el proceso está fuera de control. Por tanto, β es la probabilidad de que el punto T^2 a dibujar caiga por debajo del límite de control cuando la

distancia d es distinta de cero. Como ocurre con el gráfico \bar{X} , el gráfico T^2 de Hotelling es poco potente para detectar pequeños y moderados cambios produciendo grandes ARL para estos casos. Recientemente han sido definidos los gráficos CUSUM multivariante y EWMA multivariante que obtienen mejores valores del ARL para pequeños y moderados cambios [Alwan (1986), Crosier (1988), Pignatello y Runger (1990), Lowry, Woodall, Champ y Rigdon (1992)]. Con el fin de aumentar la potencia del gráfico T^2 también se ha aplicado la técnica del tamaño de muestra variable, Aparisi (1996), obteniéndose unos resultados similares a los CUSUM y EWMA multivariantes. Sin embargo, hay que reconocer que estos métodos son más complicados que el gráfico T^2 estándar. Así pues, pretendemos en este trabajo mejorar la potencia del gráfico T^2 utilizando señales adicionales de falta de control, manteniendo su sencillez.

En la sección segunda de este artículo se definirán las señales adicionales en el gráfico T^2 de Hotelling. En la sección tercera se procederá a la simulación del gráfico con señales adicionales y al estudio y comparación de las potencias obtenidas. En la sección cuarta se estudiarán la frecuencia de aparición de cada una de las señales propuestas, con el fin de estudiar su efectividad. Por último, el artículo termina con las conclusiones de este trabajo.

2. DEFINICIÓN DE SEÑALES ADICIONALES DE FALTA DE CONTROL

Para definir útilmente las señales adicionales de falta de control en el gráfico T^2 vamos a considerar los trabajos realizados sobre el gráfico univariante \bar{X} . Desde que Shewhart (1931) definió los gráficos de control on-line, algunos autores han introducido señales adicionales de falta de control con el objetivo de aumentar la potencia de estos gráficos.

Originalmente el gráfico \bar{X} mostraba una señal de falta de control cuando un punto excedía los límites de control situados a $m \pm 3\sigma/\sqrt{n}$, donde m es la media del proceso, σ desviación estándar y n es el tamaño de muestra utilizado. Dudding y Jennett (1944) definen la zona de atención (zona A) delimitada entre $m \pm 2\sigma/\sqrt{n}$ y $m \pm 3\sigma/\sqrt{n}$. La probabilidad de que un punto caiga en la zona A es 0.0428. Por tanto, la sucesiva aparición de puntos en esta zona conlleva la sospecha de que el proceso se encuentra fuera de control. Siguiendo esta idea Page (1955 y 1962) sugirió considerar como señal adicional de falta de control la aparición de tres o cuatro puntos en esta zona en un corto intervalo de tiempo. Otras propuestas pueden encontrarse en Western Electric Handbook (1956), Ishikawa (1974) y Ford (1984). Estas propuestas tienen en común el considerar la aparición de ciertas rachas o tendencias en el gráfico \bar{X} .

Las señales adicionales en gráficos para el control univariante han sido objeto de un estudio exhaustivo por parte de Page (1962), Wheeler (1983) Champ y Woodall (1987), Walker y Philpot (1991) y Capilla y Romero (1993).

La consideración de estos trabajos nos van a servir para definir las señales adicionales de falta de control para el gráfico T^2 . Las señales que vamos a introducir, deben ser diseñadas con el fin de detectar cambios en el proceso que produzcan un aumento del estadístico T^2 , es decir, un cambio en el vector de medias.

Siguiendo con el mismo criterio en el gráfico T^2 pueden definirse dos zonas (figura 2). La zona de atención, zona A, es la delimitada por el valor llamado ZA que cumple

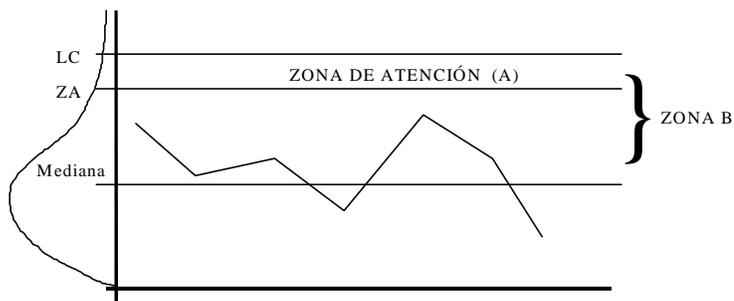
$$P(T^2 > AZ / d = 0) = 0.05 \quad (8)$$

La zona B es delimitada por la mediana de la distribución, esto es

$$P(T^2 > \text{median} / d = 0) = 0.5 \quad (9)$$

Figura 2

GRÁFICO T^2 DE HOTELLING CON SEÑALES ADICIONALES



Una vez consideradas ambas zonas se proponen las siguientes señales de falta de control para el gráfico T^2 de Hotelling:

Señal 1: punto que sobrepasa el límite de control (LC)

Señal 2: dos de tres puntos consecutivos en la zona de atención (zona A)

Señal 3: ocho puntos seguidos por encima de la mediana (zona B)

Señal 4: siete puntos ascendentes seguidos

Las señales 2, 3 y 4 han sido así definidas como resultado de la conversión de las señales en el gráfico \bar{X} al gráfico T^2 , siguiendo el criterio generalmente utilizado en la industria. Véase, por ejemplo, Ishikawa (1974), Ford (1984), Capilla y Romero (1993).

3. SIMULACIÓN DEL GRÁFICO Y COMPARACIÓN DE LOS ARLS

Nuestro objetivo es comparar los valores del ARL para el gráfico T^2 con los ARLs del gráfico T^2 con señales adicionales. Dado que las cuatro señales antes definidas no son independientes entre sí vamos a recurrir a técnicas de simulación del gráfico T^2 con señales adicionales para evaluar las propiedades estadísticas de dicho gráfico.

Cuando se introducen señales adicionales en un gráfico de control el valor de α aumenta significativamente, es decir, el ARL para $d = 0$ desciende. Esto es debido a que aparecen más señales de falta de control aún cuando el proceso está bajo control, es decir, se incrementa considerablemente la aparición de falsas alarmas. La comparación de los gráficos T^2 sin señales adicionales (T^2 estándar) y T^2 con señales adicionales de falta de control (T^2 con rachas) debe realizarse cuando estos sean equivalentes, es decir, cuando el proceso está bajo control, y consideraremos las diferencias cuando $d \neq 0$. Ambos gráficos de control deben tener el mismo ARL cuando $d = 0$. Se ha fijado como ARL bajo control para ambos gráficos el valor de 200. Con este fin se ha modificado el valor del LC del gráfico con señales adicionales para aumentar el valor de ARL hasta 200, cuando $d = 0$. La nueva posición del LC se va a calcular mediante simulación del gráfico T^2 de Hotelling con señales adicionales.

Se necesita seguir un proceso iterativo y bastante tedioso para localizar la posición del LC que produce un ARL de 200 en el gráfico con rachas. En primer lugar, se realizan una aproximación mediante simulaciones cortas, utilizando 500 valores de longitud de racha. Cuando se obtienen valores de LC que producen ARL próximos a 200 se sube progresivamente el valor de número de rachas utilizado. Las últimas aproximaciones se realizan con 5000 rachas, fijándose entonces el LC que produce finalmente un valor más cercano a 200. Este valor de LC es el utilizado en el siguiente paso del estudio.

Los ARLs en el gráfico sin señales adicionales se obtienen directamente aplicando la ecuación 6. Para estimar el ARL en el gráfico con señales adicionales, para distintos descentrados, se obtuvieron 10.000 valores de longitud de racha en cada simulación y se utilizó la media de estos valores como estimador de ARL. Si

llamamos ARL' al valor estimado, vemos que este valor es el promedio de 10.000 variables aleatorias con distribución geométrica de parámetro $p = 1/ARL$.

Sabiendo que p es próximo a cero, obtenemos que

$$\sigma_{ARL'}^2 = \frac{1}{10000} \frac{1-p}{p^2} \approx \frac{1}{10000} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{10000} ARL^2 \quad (10)$$

Utilizando la aproximación a la distribución normal resulta que

$$P(|ARL' - ARL| < 0.0196 ARL) = 0.95 \quad (11)$$

es decir, que con una probabilidad de 0.95 el ARL estimado no difiere del real en un valor superior al 1.96 % del verdadero valor del ARL .

Las simulaciones se van a realizar para distintos valores de p y d , concretamente para $p = 2, 3, 4, 5$ y 10 variables, y en cuanto a la distancia de Mahalanobis $d = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ y 3, y tamaño de muestra $n = 1$. Los resultados obtenidos son válidos para otros tamaños de muestra, teniendo en cuenta las combinaciones equivalentes de d y n que producen el mismo descentrado λ . Por ejemplo, los resultados obtenidos en este estudio para $d = 1$ y $n = 1$ son equivalentes para los valores $d = 0.5$ y $n = 4$, ya que ambos producen un valor de $\lambda = 1$, y la potencia del gráfico sólo depende de λ .

La tabla 1 muestra los resultados obtenidos mediante simulación para el LC, en el caso de $p = 2, 3, 4, 5$ y 10 variables. Los valores de la distribución χ^2 para la zona A (ZA), y para la mediana, han sido calculados mediante el programa Statgraphics Plus 5.0, utilizando las ecuaciones 8 y 9.

Tabla 1

POSICIONES DE LC, ZA Y MEDIANA

p	T^2	T^2 con rachas		
	LC	LC	ZA	mediana
2	10.5977	15	5.992	1.386
3	12.8488	17.5	7.815	2.366
4	14.863	19.65	9.488	3.357
5	16.7841	21.15	11.071	4.352
10	25.1951	31.2	18.307	9.342

Una vez calculados por simulación los valores del límite de control, LC, es posible calcular el ARL para las diferentes distancias de Mahalanobis consideradas y comparar los resultados con el gráfico T^2 sin rachas. En las tablas 2, 3, 4, 5 y 6 se muestran las comparaciones del ARL entre el gráfico T^2 estándar y el gráfico T^2 con rachas apareciendo la desviación típica del ARL entre paréntesis.

En dichas tablas aparecen también los valores del ARL para los gráficos multivariantes CUSUM y EWMA [Lowry, Woodall, Champ y Rigdon (1992)]. Se observa que dichos gráficos son más potentes que los dos gráficos T^2 mostrados, especialmente para cambios pequeños, en concreto para distancias de Mahalanobis inferiores a 2. Recordemos, sin embargo, que estos gráficos resultan más complicados en su concepto y uso frente al gráfico T^2 . Las señales adicionales permiten de una forma sencilla mejorar la potencia del gráfico T^2 .

En la figura 3 se presenta la mejora del ARL (disminución) en porcentaje cuando se utiliza el gráfico con señales adicionales de falta de control (T^2 con rachas). Este porcentaje de mejora se define de la siguiente forma:

$$\% \text{ improvement} = \frac{\left(ARL_{T^2} - ARL_{T^2 \text{ WITH SRR}} \right) \cdot 100}{ARL_{T^2}} \quad (11)$$

Figura 3
COMPARACIÓN DE ARLs

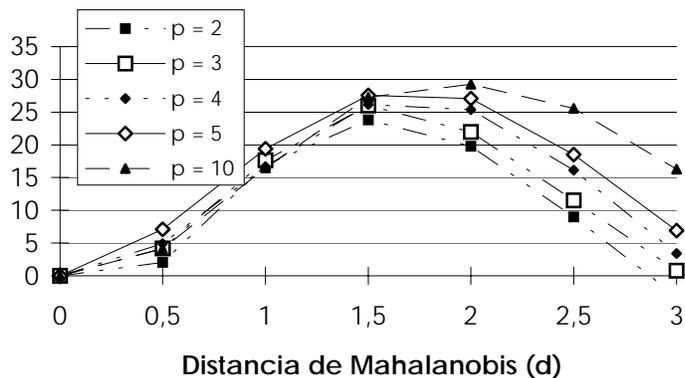


Tabla 2
COMPARACIÓN DEL ARL PARA $p = 2$

d	T^2	T^2 con rachas	MCUSUM	MEWMA
0	200	201.5 (200.8)	200	200
0.5	115.58	113.20 (111.3)	28.8	28.1
1	41.93	34.86 (33.6)	9.35	10.2
1.5	15.78	12.03 (10.5)	5.94	6.12
2	6.88	5.52 (4.13)	4.2	4.41
2.5	3.55	3.23 (2.08)	3.26	3.51
3	2.16	2.23 (1.15)	2.78	2.92

Tabla 3
COMPARACIÓN DEL ARL PARA $p = 3$

d	T^2	T^2 con rachas	MCUSUM	MEWMA
0	200	199.7 (199.5)	200	200
0.5	130.02	124.58 (123.9)	32.7	31.8
1	52.64	43.36 (42.3)	11.2	11.3
1.5	20.48	15.15 (13.5)	6.69	6.69
2	8.82	6.88 (5.37)	4.7	4.86
2.5	4.34	3.84 (2.60)	3.83	3.83
3	2.55	2.53 (1.45)	3.17	3.2

Tabla 4
COMPARACIÓN DEL ARL PARA $p = 4$

d	T^2	T^2 con rachas	MCUSUM	MEWMA
0	200	201.9 (200.6)	200	200
0.5	138.29	131.47 (132.3)	34.2	34.7
1	61.01	50.83 (50.0)	12.2	12.1
1.5	24.64	18.19 (16.3)	7.42	7.23
2	10.64	7.94 (6.51)	5.42	5.18
2.5	5.20	4.36 (3.05)	4.34	4.1
3	2.93	2.83 (1.72)	3.65	3.41

Tabla 5
COMPARACIÓN DEL ARL PARA $p = 5$

d	T^2	T^2 con rachas	MCUSUM	MEWMA
0	200	198.5 (197.7)	200	200
0.5	146.52	136.13 (135.2)	37.2	37.7
1	68.98	55.59 (54.0)	14.0	12.9
1.5	28.81	20.87 (19.1)	8.25	7.63
2	12.51	9.12 (7.41)	6.2	5.49
2.5	6.04	4.92 (3.59)	4.94	4.32
3	3.33	3.10 (1.99)	4.04	3.59

Tabla 6
COMPARACIÓN DEL ARL PARA $p = 10$

d	T^2	T^2 con rachas	MCUSUM	MEWMA
0	200	199 (198.06)	200	200
0.5	161.94	155.22 (150.3)	43.2	48.1
1	92.70	77.41 (75)	18.6	15.9
1.5	44.61	32.45 (30.5)	11.8	9.16
2	20.62	14.59 (12.5)	8.79	6.55
2.5	9.93	7.39 (5.77)	7.03	5.15
3	5.21	4.37 (3.08)	5.86	4.28

A la vista de la figura 3 se pueden obtener las siguientes conclusiones:

a) el gráfico T^2 con rachas presenta, en general, un ARL menor que el gráfico T^2 sin rachas para el mismo d . Sólo en el caso de $p = 2$ y $d = 3$ esto no es así. Para grandes valores de d el gráfico T^2 con rachas empieza a ser menos potente que el gráfico T^2 estándar. El mismo comportamiento se encuentra en el gráfico de control \bar{X} con señales adicionales de falta de control cuando es comparado con el gráfico \bar{X} estándar [Champ y Woodall (1987)].

b) La mayor reducción del ARL se produce cuando el descentrado es igual a $d=1.5$ ó $d = 2$. En este caso se obtiene alrededor de un 25 % de reducción del ARL. También en el gráfico \bar{X} con señales adicionales la mayor reducción del ARL es lograda para cambios moderados en el proceso.

c) En general, puede afirmarse que el gráfico T^2 con señales adicionales de falta de control va siendo más efectivo según tengamos más variables correlacionadas, es decir, según aumenta p .

4. ANÁLISIS DE LA FRECUENCIA DE APARICIÓN DE LAS SEÑALES DE FALTA DE CONTROL

El próximo paso a realizar es estudiar frecuencia de aparición de las señales adicionales de falta de control definidas para, de este modo, conocer como ayuda cada una en la detección de la salida de control del proceso. Las figuras 4 y 5 muestran la frecuencia de aparición para las diferentes señales adicionales en el caso de $p = 2$ y $p = 10$ respectivamente. Las conclusiones para otros valores de p son muy similares.

Figura 4

FRECUENCIA DE APARICIÓN DE LAS SEÑALES. CASO $p=2$

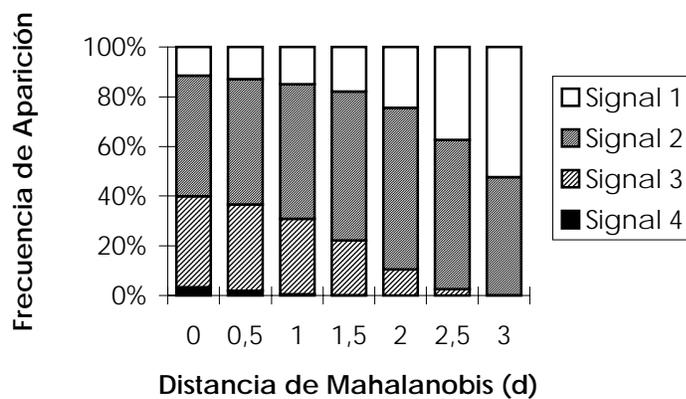
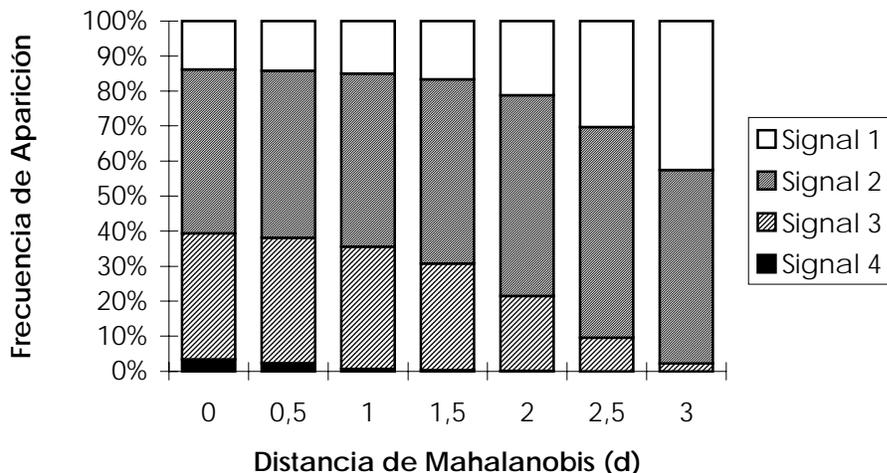


Figura 5

FRECUENCIA DE APARICIÓN DE LAS SEÑALES. CASO $p=10$ 

Los resultados obtenidos muestran que la **señal 1** aumenta la frecuencia de aparición según aumenta el descentrado d siendo muy útil para detectar cambios grandes en el proceso, no siéndolo para pequeños y moderados cambios. Esto se debe a que hemos cambiado el límite de control LC, seleccionando valores mayores para tener un ARL igual a 200 cuando el proceso está bajo control. La frecuencia de aparición de la **señal 2** se mantiene estable para los diferentes valores de d siendo una señal importante para detectar moderados y grandes cambios en el proceso. El estudio de la **señal 3** muestra su importancia para detectar pequeños cambios en el proceso resultando menos importante a medida que d aumenta. Para $d = 3$ desaparece prácticamente. La **señal 4** es con mucho la menos frecuente cuando el proceso está bajo control. Aunque esta característica es deseable ya que no produce falsas alarmas, tiende a desaparecer cuando el proceso está fuera de control, razón por la cual deberíamos plantearnos la eliminación de esta señal.

La justificación histórica de la consideración de la señal 4 se debe a su introducción en el gráfico \bar{X} para aumentar la potencia del gráfico en la detección de cambios graduales en la media. Como ejemplo podemos poner el desgaste paulatino de una herramienta de corte en el mecanizado de una pieza. Con objeto de comprobar si la señal 4 ayuda a detectar este tipo de cambios en el proceso se llevó a cabo la simulación de un cambio lineal progresivo en la media del proceso. Concretamente, se hizo la simulación de un aumento lineal en la media de una de

las variables, o una combinación especial de cambios en las medias de las mismas que produce un cambio lineal en la distancia de Mahalanobis d .

Se llevaron a cabo simulaciones para los casos $p = 2$ y $p = 3$ produciéndose un incremento progresivo en la distancia de Mahalanobis d . Dicho incremento fue seleccionado para obtener, después un número determinado de puntos en el gráfico, un valor $d = 1$, empezando con $d = 0$. Se estudiaron los siguientes casos:

Caso 1, $d = 1$ logrado después de dibujar 105 puntos

Caso 2, $d = 1$ logrado después de dibujar 90 puntos

Caso 3, $d = 1$ logrado después de dibujar 75 puntos

Caso 4, $d = 1$ logrado después de dibujar 60 puntos

Caso 5, $d = 1$ logrado después de dibujar 45 puntos

Caso 6, $d = 1$ logrado después de dibujar 30 puntos

Caso 7, $d = 1$ logrado después de dibujar 15 puntos

Las figuras 6 y 7 muestran el resultado de las simulaciones, donde el **caso 0** corresponde a la situación del proceso bajo control, es decir $d = 0$. Considerando estos resultados, se observa que la máxima frecuencia de aparición de la señal 4 tiene lugar cuando el proceso está bajo control, caso 0, y que al aumentar la distancia de Mahalanobis d la frecuencia de aparición de la señal 4 es menor. Por tanto, en general, la señal 4 es realmente poco útil en la detección de cambios lineales en d . Resultados similares fueron obtenidos en el gráfico \bar{X} cuando se estudiaron la frecuencia de aparición de las señales adicionales de falta de control [Capilla y Romero (1993)].

Figura 6

FRECUENCIA DE APARICIÓN DE LAS SEÑALES CON AUMENTOS PROGRESIVOS DE D CUANDO $p=2$

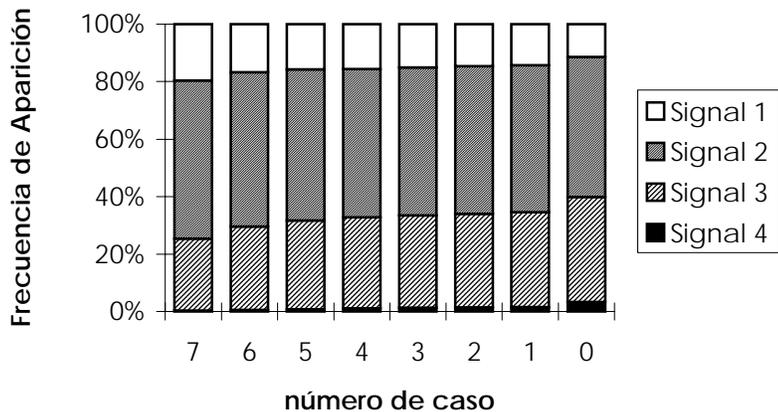
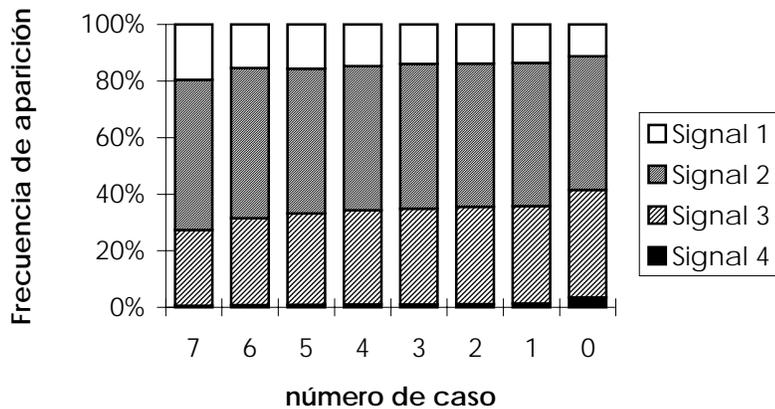


Figura 7

FRECUENCIA DE APARICIÓN DE LAS SEÑALES CON AUMENTOS PROGRESIVOS DE D CUANDO $p=2$



5. CONCLUSIONES FINALES

El objetivo de este trabajo era estudiar como afectaban la introducción de señales adicionales de falta de control a la potencia del gráfico T^2 de Hotelling y la frecuencia de aparición de las mismas. Se llevó a cabo la comparación del gráfico T^2 estándar con el gráfico T^2 con las 4 señales adicionales más importantes, a través del ARL (Average Run Length) valor medio del número de puntos a dibujar hasta que el gráfico indique que el proceso está fuera de control.

Las conclusiones que podemos extraer de este estudio son las siguientes:

1) Cuando se introducen señales adicionales en el gráfico T^2 de Hotelling aumentan significativamente la aparición de falsas alarmas. Para contrastar este efecto se debe aumentar el valor del límite de control.

2) Los resultados obtenidos muestran que al introducir señales adicionales de falta de control, el ARL del nuevo gráfico así definido desciende considerablemente cuando hay un cambio en el proceso, es decir, aumenta la potencia de dicho gráfico. La mejora de la potencia (reducción del ARL) es importante (alrededor del 25 %) ante cambios de tipo moderado en el proceso. Sin embargo, dicha mejora es menos relevante ante pequeños cambios en el proceso.

3) En general, la potencia del gráfico T^2 con señales adicionales aumenta a medida que lo hace el número de variables correlacionadas medidas simultáneamente.

4) Al estudiar la frecuencia de aparición de las señales adicionales se observa que la señal 4 (racha ascendente de siete puntos) no contribuye apenas a la detección de la salida de control del proceso y queda en entredicho su utilidad.

AGRADECIMIENTO

Los autores de este trabajo quieren agradecer al evaluador sus comentarios que ha servido para mejorar notablemente la versión final de este trabajo.

REFERENCIAS

- ALT, F.B. (1985). «Multivariate Control Charts» in *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol 6. (S. Kotz y N. L. Johson, Eds. Wiley, New York).
- APARISI, F. (1996). «Hotelling's T^2 control chart with adaptive sample sizes», *International Journal of Production Research*, 34, 2853-2862.
- ALWAN L.C., (1986). «Cusum Quality Control-Multivariate Approach», *Communications in Statistics*, 15, 3531-3543.
- CAPILLA, C. Y ROMERO, R. (1993). «Señales de falta de control en gráficos \bar{X} », *Estadística Española*, 35, 665-685.
- CHAMP, C. W. Y WOODALL, W. H. (1987). «Exact results for Shewhart control charts with supplementary runs rules», *Technometrics*, 29, 393-399.
- CROSIER, R. B., (1988). «Multivariate Generalization of Cumulative Sum Quality-Control Schemes», *Technometrics*, 30, 291-303.
- DUDDING, B. P. Y JENNETT, W. J., (1944), «Quality Control Chart Technique», General Electric, London.
- FORD, (1984). «Statistical Process Control», Code EU880.
- HOTELLING, H., (1947). «Multivariate Quality Control» in *Techniques of Statistical Analysis*, (Eds. C. Eisenhart, M. Hastay y W. A. Wallis, McGraw-Hill), 111-184.
- ISHIKAWA, K., (1974). «Guide to Quality Control». (UNIPUB, New York).
- JACKSON, J. E., (1985). «Multivariate Quality Control», *Communications in Statistics*, 14, pp. 2657-2688.
- LOWRY, C.A., WOODALL, W. H., CHAMP, C. W. Y RIGDON, S.E., (1992). «A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart», *Technometrics*, 34, 46-53.
- PAGE, E. S., (1955). «Control Charts with Warning Limits», *Biometrika*, 42, 243-257.
- PAGE, E. S., (1962). «A modified Control Chart with warning lines», *Biometrika*, 49, 171-176.
- PIGNATELLO, J. J., JR. Y RUNGER, G. C., (1990), «Comparisons of multivariate CUSUM charts», *Journal of Quality Technology*, 22, 173- 186.
- SEBER, G. A. F., (1984). «Multivariate Observations», (John Wiley & sons, Eds., New York, NY).

SHEWHART, W. A., (1931), «Economic Control of Quality of Manufactured Product», New York: D. Van Nostrand Co., Inc.

TRACY, N. D., YOUNG, J. C. Y MASON, R. L. (1992). «Multivariate Control Charts for Individual Observations», *Journal of Quality Technology*, 24, 88-95.

WESTERN ELECTRIC, (1956). «Statistical Quality Control Handbook», Select Code 700-444. Western Electric Corporation, Indianapolis, IN.

IMPROVING THE POWER OF HOTELLING'S T^2 CONTROL CHART EMPLOYING SUPPLEMENTARY RUNS RULES

SUMMARY

Hotelling's T^2 control chart is widely employed to control several related characteristics of a process because of its simplicity. However, it is little powerful in detecting small or moderate process shifts. The use of additional run rules is described in this paper showing the ARL improvements achieved and the runs rules appearance frequency.

Key Words: Average Run Length.

AMS Classification: 62N10, 62P99