ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
Vol. 47, Núm. 158, 2005, págs. 89 a 115

Medición de la desigualdad a través de los momentos de la curva de Lorenz y de su curva dual

por
LUIS IMEDIO OLMEDO
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Dpto. de Estadística y Econometría
Universidad de Málaga

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es el estudio de dos familias de índices de desigualdad que se obtienen como transformaciones lineales de los momentos respecto del origen de la curva de Lorenz y de su curva dual, al considerar tales curvas como funciones de distribución. Se presenta una visión unificada de ambas familias, tratando de clarificar su paralelismo y divergencias. En el ámbito normativo, se calculan las funciones de preferencia social que relacionan, en cada caso, bienestar y desigualdad, lo que permite analizar su grado de aversión hacia la desigualdad.

Palabras clave: Caracterización de la curva de Lorenz, medidas lineales de desigualdad, aversión hacia la desigualdad, privación/satisfacción relativa.

Clasificación AMS: 90A30.

1. INTRODUCCIÓN

La curva de Lorenz es una herramienta muy valiosa tanto en el análisis de la distribución de la renta sobre una población dada, como al tratar de ordenar, en términos de desigualdad relativa, distintas distribuciones de renta. Como es sabido, al comparar dos distribuciones entre cuyas curvas de Lorenz exista una relación de dominancia, se puede asegurar que la desigualdad relativa de la distribución dominante es menor. Sin embargo, la ordenación inducida por este criterio sobre el conjunto de las distribuciones de renta es una relación de orden parcial, ya que no permite concluir cuando las curvas de Lorenz asociadas a distintas distribuciones tienen algún punto de intersección en el interior del intervalo [0, 1]. En tal caso, se puede recurrir a criterios de dominancia más débiles(1) o, lo que es más habitual, considerar un conjunto de medidas escalares de desigualdad.

La práctica más extendida en los trabajos empíricos consiste en utilizar el índice de Gini (1912), sin duda la medida de uso más frecuente, junto a índices de la familia de Atkinson (1970) y/o índices de entropía generalizada (Shorrocks (1980)). Aunque todos ellos presentan como característica común el ser consistentes con el criterio de ordenación de Lorenz(2), esta forma de proceder presenta ciertas limitaciones. En primer lugar, el fundamento teórico del coeficiente de Gini, de los índices de Atkinson y de los índices de entropía, es muy diferente(3), lo que dificulta el evaluar su capacidad como medidas complementarias de desigualdad. Por otra parte, y al contrario de lo que sucede con el índice de Gini, ninguno de los índices citados admite una expresión sencilla a partir de la curva de Lorenz, por lo que no está claro hasta qué punto pueden contribuir a proporcionar información sobre sus características. Es deseable, por lo tanto, disponer de familias de medidas de desigualdad de naturaleza homogénea que cumplan la condición de que un número finito de ellas proporcione información suficiente sobre las características de la curva de Lorenz y que, como sucede con los índices de Atkinson, incorporen distintos juicios de valor sobre la desigualdad.

En este trabajo se consideran, para toda distribución de renta con media positiva, dos familias numerables de medidas de desigualdad que cumplen las condicio-

(1) Véase Shorrocks y Foster (1987) o Muliere y Scarsini (1989).

(2) Un índice de desigualdad, I, es Lorenz-consistente si dadas dos distribuciones de renta X e Y, con curvas de Lorenz L_x y L_y, respectivamente, se verifica: $L_X \geq L_Y \Rightarrow I(X) \leq I(Y)$. Cuando las curvas de Lorenz se cortan y el criterio de dominancia no resuelve, las ordenaciones inducidas por distintos índices no tienen por qué coincidir, aun cuando todos ellos sean consistentes con el criterio de Lorenz.

(3) En Newbery (1970) se ponen de manifiesto las diferencias, en cuanto a fundamentación, entre el índice de Gini y los de Atkinson. Por su parte, los índices de entropía proceden de la teoría de la información.

nes anteriores. Ambas se definen a partir de la curva de Lorenz y, a través de ella, caracterizan la distribución de la renta.

La definición de estas medidas se basa en la idea siguiente. Dado que la curva de Lorenz y su curva dual se construyen de forma acumulativa, son crecientes y el recorrido de ambas es el intervalo [0, 1], satisfacen las condiciones formales para ser consideradas funciones de distribución. Desde este punto de vista, las respectivas distribuciones de probabilidad asociadas quedarán caracterizadas por el conjunto de sus momentos potenciales respecto al origen, una vez establecida la existencia de los mismos.

Los índices de una de las familias son transformaciones lineales de los momentos, respecto al origen, de la curva de Lorenz. Este conjunto de medidas fue introducido por Aaberge (2000). La segunda familia de índices, cada uno de los cuales se obtiene como transformación lineal de un momento de la curva de Lorenz dual, coincide con los índices de Gini generalizados (Donaldson y Weymarck (1980), Yitzhaki (1983)) cuando el rango del parámetro que interviene en su definición es el conjunto de los enteros positivos. Se trata, por lo tanto, de índices bien conocidos en la literatura. Sin embargo, la forma en que aquí se introducen difiere sustancialmente de la utilizada en los trabajos citados y pone de manifiesto que caracterizan la distribución de la renta.

El objetivo esencial de este trabajo es presentar una visión unificada de las dos familias de medidas objeto de análisis, tratando de clarificar su paralelismo y divergencias. Ambas constituyen subclases de las medidas lineales de desigualdad propuestas por Mehran (1976), lo que implica que pueden expresarse ponderando, en cada percentil de renta, la diferencia entre la línea de equidistribución y la curva de Lorenz. Aunque los esquemas de ponderación son, por supuesto, diferentes para cada familia, ambos son casos particulares de un peso biparamétrico cuando uno de los parámetros toma sus valores extremos, lo que genera distintas actitudes éticas en la medición de la desigualdad y del bienestar social.

Cada una de las familias generaliza el índice de Gini ordinario, que se obtiene a partir de cualquiera de ellas cuando el parámetro de que dependen es igual a la unidad. En este trabajo se concreta el sentido de esa generalización al demostrar que los índices asociados a los momentos de la curva de Lorenz se pueden expresar en función de la covarianza entre la renta de un individuo y las sucesivas potencias de su rango en la distribución, lo que supone extender una de las propiedades características del índice de Gini. Un resultado análogo es válido para los índices asociados a la curva de Lorenz dual.

Otra propiedad que comparten ambos tipos de medidas es la ser índices relativos de compromiso. Es decir, al multiplicarlos por la renta media de la distribución

se obtienen índices absolutos que evalúan la pérdida de bienestar que implica la desigualdad, previa especificación de una determinada función de bienestar social.

En el ámbito normativo, la diferencia fundamental entre los dos conjuntos de índices viene dada por su actitud frente a la desigualdad. Al ir aumentando el valor del parámetro que individualiza cada índice, los de Gini generalizados presentan mayor aversión hacia la desigualdad, mientras que para los asociados a los momentos de la curva de Lorenz sucede lo contrario. De este modo, ambas familias consideradas conjuntamente cubren todo el espectro en relación al grado de aversión/preferencia por la desigualdad, desde la indiferencia hasta la aversión máxima (leximin rawlsiano). Dentro de este ámbito, otro aspecto en el que se manifiesta la dualidad existente entre las dos familias es en su utilización como medidas de privación/satisfacción. A este respecto, mientras que los índices de Gini generalizados absolutos se pueden interpretar como medidas de privación social (Duclos (2000), Bárcena y otros (2003)), se demostrará que los índices absolutos que se obtienen de los de Aaberge (2000) al multiplicar por la renta media, admiten una interpretación análoga en términos de satisfacción social.

El trabajo sigue el siguiente esquema. En la sección segunda se establece el marco de análisis y se hace referencia a un conjunto de conceptos y de resultados previos que faciliten la lectura posterior. En la sección tercera se introducen las dos familias de índices de desigualdad objeto de estudio, se analizan sus propiedades, tratando de poner de manifiesto sus analogías y diferencias. Su fundamento normativo se aborda en la sección cuarta y se obtienen las funciones de preferencia social que permiten relacionar desigualdad y bienestar. Analizando el grado de concavidad de dichas funciones se deriva la actitud de los índices, a través de sus respectivas funciones de bienestar social, respecto a la desigualdad. En la última sección se sintetizan los resultados obtenidos y se incluyen algunos comentarios.

2. MARCO ANALÍTICO, NOTACIÓN Y CUESTIONES PRELIMINARES

Supondremos que la distribución de la renta en una población está representada mediante la variable aleatoria continua(4) X, cuyo recorrido es la semirrecta real positiva, $R^+=]0, \rightarrow[$, siendo F(.) su función de distribución, f(.)=F´(.) la función de densidad y $\mu = E(X) = \int_0^{\infty} x dF(x)$ su renta media.

La curva de Lorenz asociada, L(p), p=F(x), se define mediante:

(4) Suponer la continuidad de X facilita el tratamiento analítico. Los resultados obtenidos siguen siendo válidos para el caso discreto, pero su demostración es más laboriosa.

$$L:[0,1]\to[0,1]\ ,\ L(p)=\frac{1}{\mu}\int_0^x sdF(s)\ ,\ 0<p<1\ , \qquad [1]$$

siendo L(0)=0 y L(1)=1. Para cada p=F(x), L(p) es la proporción del volumen total de renta que acumula el conjunto de unidades con renta menor o igual que x. Es evidente que $L(p)\le p$, $0\le p\le 1$, L(p)=p, en caso de equidistribución y L(p)=0, $0\le p<1$, si la concentración es máxima.

La curva de Lorenz dual, $L^*(p)$, p=F(x), se define como:

$$L^*:[0,1]\to[0,1]\ ,\ L^*(p)=1-L(1-p)\ , \qquad [2]$$

por lo que $L^*(0)=0$, $L^*(1)=1$ y $L^*(p)\ge p$, siendo válida la igualdad si la distribución es igualitaria, mientras que $L^*(p)=1$, $0<p\le 1$, si la concentración es máxima. Para cada p, $L^*(p)$ es la proporción de la masa total de renta que acumula el conjunto de unidades con renta mayor o igual que y, siendo F(y)=1-p.

Además de su interés práctico, el conocimiento de la curva de Lorenz o el de su curva dual, junto al de la renta media, permiten caracterizar la distribución de la renta. En efecto, a partir de [1] y [2] resulta:

$$\begin{aligned}&\frac{dL(p)}{dp}=\frac{x}{\mu}\ ,\ \frac{d^2L(p)}{dp^2}=\frac{1}{\mu f(x)}\ ,\ 0<p=F(x)<1\\ &\frac{dL^*(p)}{dp}=\frac{y}{\mu}\ ,\ \frac{d^2L^*(p)}{dp^2}=-\frac{1}{\mu f(y)}\ ,0<1-p=F(y)<1\end{aligned} \qquad [3]$$

Las igualdades anteriores prueban que la curva L(p) es creciente y convexa, mientras que $L^*(p)$ es creciente y cóncava, y que la función de densidad de la distribución de la renta se obtiene a partir de la curvatura de la curva de Lorenz o de su curva dual, dada la renta media.

El coeficiente de desigualdad de Gini, G, se define como el doble del área del recinto limitado por la línea de equidistribución y la curva de Lorenz:

$$G=2\int_0^1(p-L(p))dp=1-2\int_0^1 L(p)dp\ , \qquad [4]$$

lo que es equivalente a:

$$G = 2\int_0^1 (L^*(p) - p)dp = \int_0^1 (L^*(p) - L(p))dp \,. \qquad [5]$$

$G \in [0, 1]$, siendo G=0 en caso de equidistribución y G=1 si la concentración es máxima.

Las medidas lineales de desigualdad, MLD, introducidas por Mehran (1976) se se definen como:

$$MLD = \int_0^1 (p - L(p))w(p)dp \,, \qquad [6]$$

siendo w(p) un peso no negativo, que puede variar a lo largo de la distribución de rentas. Observése que p-L(p), p=F(x), se puede interpretar como la diferencia entre la participación que tendría el conjunto de individuos con renta menor o igual que x en el volumen total de renta si la distribución fuese igualitaria y la participación que realmente tiene en la distribución considerada. Es evidente que el índice de Gini es un caso particular de [6] para $w(p) \equiv 2$. Integrando por partes y teniendo en cuenta la primera de las igualdades de [3], resulta que [6] es equivalente a:

$$MLD = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} (x - \mu)W(F(x))dF(x) \,, \qquad [7]$$

siendo $W(p) = \int_0^p w(q)dq$. Expresado de esta forma, MLD es lineal en las rentas y se obtiene como una suma ponderada de todas las diferencias locales relativas, $\frac{x - \mu}{\mu}$, entre la renta que percibe cada unidad y la que percibiría en caso de equidistribución.

3. LAS FAMILIAS DE ÍNDICES DE DESIGUALDAD ASOCIADAS A LOS MOMENTOS DE LA CURVA DE LORENZ Y SU CURVA DUAL

Como consecuencia de su definición y características, la curva de Lorenz asociada a una distribución F(.) y su curva dual pueden ser consideradas funciones de distribución cuando se extienden a toda la recta real de manera natural; es decir, L(p)=0, p<0, y L(p)=1, p>1. Sus respectivos momentos de orden $h \in N=\{1, 2, ..., n, ...\}$, respecto al origen, vendrán dados por:

$$M_h = \int_0^1 p^h dL(p) \ , \ M_h^* = \int_0^1 p^h dL^*(p). \qquad [8]$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta [2] y [3], las expresiones anteriores son equivalentes a:

$$M_h = 1 - h\int_0^1 p^{h-1} L(p)dp \ , \ M_h^* = h\int_0^1 (1-p)^{h-1} L(p)dp \qquad [9]$$

Bajo los supuestos introducidos en la sección anterior queda asegurada la existencia de estas integrales, para cada $h \in N$, y, en consecuencia, la de los momentos de cualquier orden asociados a las distribuciones inducidas por L(p) y $L^*(p)$. Ambas funciones quedarán caracterizadas por los conjuntos $\{M_h\}_{h\in N}$ y $\{M_h^*\}_{h\in N}$ (Kendall, Stuart y Ord (1994), Cap. 4).

Es inmediato comprobar que el rango de M_h es $\left[\frac{1}{h+1}, 1\right]$, mientras que el de M_h^* es $\left[0, \frac{1}{h+1}\right]$, ambos dependen de h, lo que supone un inconveniente de tipo práctico si se pretendiese utilizar estos momentos como índices de desigualdad. Esta limitación es fácilmente evitable mediante una transformación lineal de los mismos.

Definición. Para cada $h \in N$, sean:

$$I_h = \frac{h+1}{h} M_h - \frac{1}{h} \ , \ I_h^* = 1 - (h+1)M_h^*. \qquad [10]$$

Se comprueba fácilmente que el rango común de I_h y de I_h^* es, para todo $h \in N$, el intervalo [0, 1].

Por otra parte, a partir de la definición anterior y de [9], se obtiene:

$$I_h = (h+1)\int_0^1 p^{h-1}(p - L(p))dp = 1 - (h+1)\int_0^1 p^{h-1} L(p)dp, \qquad [11]$$

mientras que para los transformados de los momentos de la curva de Lorenz dual, resulta:

$$I_h^* = 1 - h(h+1)\int_0^1 (1-p)^{h-1} L(p)dp = h(h+1)\int_0^1 (1-p)^{h-1}(p - L(p))dp \qquad [12]$$

Nótese que para h=1 se obtiene, en ambos casos, el índice de Gini ordinario: $I_1 = I_1^* = G$.

La familia $\Im = \{I_h\}_{h\in N}$ fue introducida por Aaberge (2000) mediante el procedimiento descrito, mientras que $\Im^* = \{I_h^*\}_{h\in N}$ es el conjunto de índices de Gini generalizados (o S-Gini) para los valores enteros positivos del parámetro que interviene en su definición(5).

Es inmediato, a partir de [11] y [12], que para cada $h\in N$, I_h e I_h^* son índices de desigualdad Lorenz-consistentes. Esto es, si X e Y son distribuciones de renta tales que $L_X(p) \geq L_Y(p)$, $0\leq p\leq 1$, se verifica $I_{X,h} \leq I_{Y,h}$, $I_{X,h}^* \leq I_{Y,h}^*$. En Foster (1985) se caracterizan este tipo de medidas. Son índices relativos (invariantes si todas las rentas cambian en la misma proporción) que satisfacen las siguientes propiedades:

– Simetría o anonimidad: Invariantes frente a permutaciones de renta entre los individuos.

– Principio de población de Dalton: Invariantes frente a réplicas exactas de la población.

– Principio de transferencias de Pigou-Dalton: Si tiene lugar una transferencia de renta desde un individuo hacia otro con menor nivel de renta, sin que varíe la ordenación relativa entre ambos (transferencia progresiva), el valor de los índices disminuye.

Cumplen además, la propiedad de continuidad: pequeñas perturbaciones en la distribución de la renta dan lugar a pequeñas variaciones en el valor de los índices. Por la forma en que se han definido, también satisfacen la propiedad de normalización: sus valores pertenecen al intervalo [0, 1], siendo nulos en caso de equidistribución e iguales a la unidad si la concentración es máxima.

Dado que tanto el conjunto de momentos $\{M_h\}_{h\in N}$ como el conjunto $\Im$ determinan de forma unívoca la curva de Lorenz, L(p), y ésta junto a la renta media determina, a su vez, la distribución de la renta, el conjunto de índices $\Im$ caracteriza dicha distribución. Idéntico razonamiento justifica que la distribución de la renta también queda caracterizada por la familia $\Im^*$.

Las consideraciones anteriores se resumen en la siguiente proposición.

---

(5) Yitzhaki (1983) lo define como $G(\beta) = 1 - \beta(\beta+1)\int_0^1 (1-p)^{\beta-1} L(p)dp$, siendo $\beta>0$ un parámetro real. Por lo tanto, $I_h^* = G(h)$.

Proposición 1. Dada una distribución de renta con media positiva, los conjuntos numerables $\Im=\{I_h\}_{h\in N}$ y $\Im^*=\{I_h^*\}_{h\in N}$, cuyos elementos están definidos mediante las expresiones [11] y [12], respectivamente, caracterizan cada uno de ellos a dicha distribución y constituyen sendas familias de índices de desigualdad, consistentes con el criterio de ordenación de Lorenz.

Conviene observar que el haber probado que los índices de Gini generalizados se pueden obtener como transformaciones lineales de los momentos de la curva de Lorenz dual asociada a la distribución de rentas, permite afirmar que dichos índices caracterizan la distribución y que para ello basta considerar los valores enteros positivos de su parámetro. A esta caracterización, que se obtiene de forma sencilla con el enfoque aquí adoptado, no se llega en los trabajos de Donaldson y Weymarck (1980) y de Yitzhaki (1983).

Los tres primeros elementos de cada una de las familias $\Im$ y $\Im^*$ quedan determinados, respectivamente, por los tres primeros momentos de las curvas L y L^*, por lo que constituyen una síntesis de ciertas características (valor medio, dispersión y asimetría) de las distribuciones de probabilidad inducidas por ambas curvas.

Al comparar las expresiones [11] y [12] con la que define las medidas lineales de desigualdad (igualdad [6]) es inmediato que los índices I_h e I_h^* son casos particulares de tales medidas:

$$\begin{aligned} I_h &= \int_0^1 (p - L(p))w_h(p)dp \ , \ w_h(p) = (h+1)p^{h-1} \\ I_h^* &= \int_0^1 (p - L(p))w_h^*(p)dp \ , \ w_h^*(p) = h(h+1)(1-p)^{h-1}. \end{aligned} \qquad [13]$$

Si se considera la siguiente especificación biparamétrica del peso que pondera las diferencias de Lorenz a lo largo de la distribución:

$$w(h,q) = \frac{h(h+1)|q-p|^{h-1}}{q^{h+1} + (h+q)(1-q)^h} , \qquad [14]$$

con $h\in N$ y $0\le q\le 1$, se verifica $w(h,0) = w_h(p)$ y $w(h,1) = w_h^*(p)$. Esto es, los dos conjuntos de índices forman parte de una misma familia de medidas lineales de desigualdad. Sin embargo, el comportamiento de sus respectivos pesos es muy diferente excepto para h=1, $w_1(p) = w_1^*(p) = 2$, caso que corresponde al índice de Gini en el que las diferencias de Lorenz se ponderan de manera uniforme a lo largo de la escala de rentas.

Si h>1, $w_h(p)$ es una función estrictamente creciente de p. Con ello, el índice I_h, h>1, al ir aumentando el nivel de renta asigna mayor peso a la desigualdad local representada por p-L(p), diferencia entre la proporción que en la población supone el conjunto de individuos con renta menor o igual que una dada y la proporción de la renta total que perciben. Por el contrario, para h>1, $w_h^*(p)$ es una función estrictamente decreciente de p, por lo que el índice I_h^* asigna mayor peso a la desigualdad existente en la cola inferior de la distribución y disminuye la ponderación al aumentar el nivel de renta.

Aunque no es el objeto de esta sección el entrar en valoraciones éticas, las consideraciones anteriores ponen de manifiesto que los índices de las familias $\Im$ y $\Im^*$ evalúan de distinta forma la desigualdad local a lo largo de la escala de rentas. Los elementos de $\Im$ dan mayor importancia a la desigualdad existente en las rentas altas, los de $\Im^*$ a la existente en las rentas bajas, mientras que el índice de Gini sirve de frontera entre ambos criterios y asigna una ponderación constante, para todo nivel de renta, a la diferencia entre la línea de equidistribución y la curva de Lorenz. En la sección siguiente, al estudiar el fundamento normativo de ambos conjuntos de índices, se justificará que sus funciones de bienestar asociadas incorporan diferentes grados de aversión hacia la desigualdad y se analizará también el comportamiento de I_h y de I_h^* al aumentar el parámetro h.

Para concretar en qué sentido, que no tiene por qué ser necesariamente el único, las medidas de desigualdad $\Im$ y $\Im^*$ generalizan el coeficiente de Gini, $G=I_1=I_1^*$, nos basaremos en una propiedad definitoria de este coeficiente. Es un resultado conocido que G se puede expresar en términos de la covarianza entre las rentas y sus respectivos rangos(6):

$$G = \frac{2}{\mu}\mathrm{Cov}(X, F(X))$$

igualdad equivalente a:

$$G = -\frac{2}{\mu}\mathrm{Cov}(X, 1-F(X))$$

Para los índices I_h e I_h^*, h>1, es válido un resultado análogo al considerar las potencias de exponente h de F y de 1-F.

(6) Para una demostración del mismo, véase Lambert (2001), pags. 33 y 34.

Proposición 2. Se verifican las igualdades:

$$\begin{aligned} I_h &= \frac{h+1}{h\mu}\mathrm{Cov}\left(X, (F(X))^h\right), \\ I_h^* &= -\frac{h+1}{\mu}\mathrm{Cov}\left(X, (1-F(X))^h\right), \ h \in N. \end{aligned} \qquad [15]$$

Demostración. Integrando por partes en [11] y [12], haciendo p=F(x) y utilizando la primera de las igualdades de [3], se obtiene:

$$I_h = -\frac{1}{h} + \frac{h+1}{h}\int_0^1 L'(p)p^h dp = \frac{h+1}{h\mu}\int_0^\infty x(F(x))^h dF(x) - \frac{1}{h},$$

$$I_h^* = 1 - (h+1)\int_0^1 L'(p)(1-p)^h dp = 1 - \frac{h+1}{\mu}\int_0^\infty x(1-F(x))^h dF(x).$$

El enunciado es inmediato teniendo en cuenta las expresiones de las covarianzas:

$$\mathrm{Cov}\left(X, (F(X)^h\right) = E\left(X(F(X)^h\right) - E(X)E(F(X)^h) = \int_0^\infty x(F(x))^h dF(x) - \frac{\mu}{h+1},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\left(X, (1-F(X)^h\right) &= E\left(X(1-F(X)^h\right) - E(X)E((1-F(X)^h) = \\ &= \int_0^\infty x(1-F(x))^h dF(x) - \frac{\mu}{h+1}. \end{aligned}$$

El siguiente resultado proporciona una relación entre ambas familias de índices que permite obtener cualquier elemento de una de ellas a partir de los elementos de la otra.

Proposición 3. Cada índice del conjunto $\mathfrak{I}^*$ se puede expresar como combinación lineal de índices de la familia $\mathfrak{I}$, y recíprocamente.

Demostración. A partir de [12], utilizando la fórmula del binomio de Newton, resulta:

$$I_h^* = 1 - h(h+1)\int_0^1 (1-p)^{h-1} L(p)dp =$$

$$= 1 - h(h+1)\sum_{i=1}^{h} (-1)^{i-1} \binom{h-1}{i-1} \int_0^1 p^{i-1} L(p)dp =$$

$$= 1 + (h+1)\sum_{i=1}^{h} (-1)^{i} i \binom{h}{i} \int_0^1 p^{i-1} L(p)dp ,$$

y teniendo en cuenta [11], se obtiene:

$$I_h^* = 1 + (h+1)\sum_{i=1}^{h} (-1)^{i} \binom{h}{i} \frac{i}{i+1} (1 - I_i) \ , \ h \in N . \qquad [16]$$

La igualdad anterior también permite obtener, de modo iterativo, cada I_h como combinación lineal de los I_i^* , $i \leq h$. Por ejemplo, para los tres primeros índices de cada familia se tiene:

$$I_1^* = I_1 = G$$

$$I_2^* = 3I_1 - 2I_2 \qquad I_2 = \frac{3}{2} I_1^* - \frac{1}{2} I_2^*$$

$$I_3^* = 6I_1 - 8I_2 + 3I_3 \qquad I_3 = 2I_1^* - \frac{4}{3} I_2^* + \frac{1}{3} I_3^* \ .$$

Por construcción, los elementos de las familias $\Im$ y $\Im^*$ constituyen lo que en la literatura se conoce como “medidas objetivas de desigualdad”, cuyo interés se centra en la determinación del grado de concentración de las distribuciones de renta objeto de estudio. Algunos representantes de medidas de este tipo son: la varianza, el coeficiente de variación, la desviación relativa media, la varianza de los logaritmos y el índice de Gini. En principio, presentan una clara diferencia con los llamados “índices éticos o normativos”, que miden la desigualdad en términos de la pérdida de bienestar social debida a la dispersión de las rentas, por lo que para su definición es necesario utilizar alguna función de bienestar social, FBS en adelante, que incorpore de forma explícita un conjunto de juicios de valor. La familia de índices de Atkinson son las medidas de este tipo de uso más frecuente.

Aunque la distinción entre medidas objetivas y normativas de desigualdad es importante desde el punto de vista conceptual, a partir del trabajo de Dalton (1920) y, sobre todo, de la aportación pionera de Atkinson (1970), es generalmente aceptado que en cualquier medida de dispersión de rentas subyace alguna noción de bienestar social, en el sentido de que incorpora criterios sobre el peso que se asigna a la desigualdad a lo largo de la escala de rentas.

La sección siguiente se ocupa de aspectos normativos en relación a las medidas de desigualdad de $\Im$ y de $\Im^*$.

4. FUNDAMENTO NORMATIVO DE LOS ÍNDICES

El enfoque más habitual en la literatura para establecer la relación entre índices que miden la desigualdad en la distribución de la renta y FBS es el desarrollado por Atkinson (1970)-Kolm (1976)-Sen (1973)(7), que denominaremos AKS, basado en el concepto de renta equivalente igualmente distribuida(8) (REID), a través del cual a cada distribución de renta se le asigna un número real que representa el nivel medio de bienestar que proporciona a la población sobre la que incide. En Blackorby y Donaldson (1978) se demuestra que si I es un índice relativo de desigualdad, la expresión que relaciona bienestar, evaluado mediante la REID, y desigualdad para la distribución X es:

$$W_X = \varphi(\mu_X(1-I_X)), \qquad [17]$$

siendo φ cualquier transformación monótona creciente. En adelante se supondrá que φ es la identidad, lo que no es restrictivo a efectos de ordenación.

A partir del procedimiento AKS, la FBS se expresa en términos de sólo dos características de la distribución de rentas: su media y una medida de desigualdad,

(7) Un enfoque alternativo es el de Dagum (1990) a través de lo que este autor denomina ecuación fundamental de la renta.

(8) Si $\mathbf{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i \geq 0$, es una distribución de renta sobre una población de tamaño n, su REID, x_e, se define como el nivel de renta mínimo que si fuese percibido por cada individuo proporcionaría idéntico bienestar social que la distribución **x**. Esto es, si W es la FBS considerada, se verifica:

$$W(x_1, x_2, ..., x_n) = W(x_e, x_e, ..., x_e).$$

La REID es una cardinalización de W. En Chakravarty (1990) se demuestra que si W es regular y estrictamente S-cóncava (favorable a las transferencias progresivas) se verifica $x_e<\mu$, siendo $\mu-x_e$ el coste de la desigualdad en términos de bienestar social.

verificándose la condición de consistencia entre el índice I y W. Es decir, si X e Y son dos distribuciones con idéntica media, se cumple:

$$W_X \leq W_Y \Leftrightarrow I_X \geq I_Y . \qquad [18]$$

Por otra parte, en el enfoque utilizado por Yaari (1988) para proporcionar un fundamento normativo a las medidas de desigualdad, el bienestar asociado a una distribución de rentas se identifica con el valor medio de una función de distribución $\Phi(F(x))$, que representa las preferencias del evaluador social(9). Esto es:

$$W_X = \int_{R^+} x d\Phi(F(x)) . \qquad [19]$$

La función Φ asigna pesos a las rentas de los individuos según sus posiciones en la distribución y sus características están relacionadas con la actitud del evaluador social frente a la desigualdad. A este respecto, en el citado trabajo de Yaari (1988) se demuestra que la concavidad de Φ es equivalente a que la FBS asociada sea favorable al principio de transferencias de Pigou-Dalton, lo que se expresa diciendo dicha función muestra aversión hacia la desigualdad (o preferencia por la igualdad). Al aumentar la concavidad de Φ mayor es la ganancia de bienestar derivada de una transferencia progresiva de renta, de una cuantía dada, y mayor será la reducción del índice de desigualdad consistente con la FBS.

La expresión [17] permite calcular la REID correspondiente a cada uno de los índices de las familias $\Im=\{I_h\}_{h\in N}$ y $\Im^*=\{I_h^*\}_{h\in N}$ y, con ello, los respectivos niveles medios de bienestar asociados a una distribución de rentas. El imponer la condición de que esos niveles coincidan con el valor medio de la distribución de preferencias nos va a permitir obtener sendas familias de funciones de preferencia, $\wp=\{\Phi_h\}_{h\in N}$ y $\wp^*=\{\Phi_h^*\}_{h\in N}$, para las cuales, teniendo en cuenta [17] y [19], se cumplirá:

$$\begin{aligned} I_h &= 1-\frac{W_h}{\mu} = 1-\frac{1}{\mu}\int_{R^+} x d\Phi_h(F(x)) \\ I_h^* &= 1-\frac{W_h^*}{\mu} = 1-\frac{1}{\mu}\int_{R^+} x d\Phi_h^*(F(x)) . \end{aligned} \qquad [20]$$

(9) Si $\Phi(p) = 2p - p^2$ teniendo en cuenta [3] y [4] e integrando por partes, se obtiene la REID asociada al índice de Gini: $W = \int_{R^+} x d(2p - p^2) = \mu(1-G)$.

Si las funciones de preferencia son de clase C^2 en]0, 1[, dos veces diferenciables con continuidad, las igualdades anteriores, haciendo p=F(x), utilizando [3] e integrando por partes, se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} I_h &= 1-\Phi_h'(1)+\int_0^1 \Phi_h''(p)L(p)dp \\ I_h^* &= 1-\Phi_h^{*\prime}(1)+\int_0^1 \Phi_h^{*\prime\prime}(p)L(p)dp\,. \end{aligned} \qquad [21]$$

Al imponer que el rango de cada índice sea el intervalo [0, 1] (normalización), de las igualdades anteriores resulta $\Phi_h'(1^-)=\Phi_h^{*\prime}(1^-)=0$. Esas mismas igualdades demuestran que la consistencia de los índices con el criterio de ordenación de Lorenz equivale a la concavidad de las funciones de preferencia.

En definitiva, las funciones de $\wp$ y de $\wp^*$ han de satisfacer [21], pasar por los puntos (0,0) y (1,1), siendo su derivada primera positiva (estrictamente crecientes) y su derivada segunda negativa (estrictamente cóncavas) en]0, 1[y nula la derivada primera por la izquierda en p=1.

Proposición 4. Las familias de funciones de preferencia:

$$\begin{aligned} \Phi_h(p) &= \frac{1}{h}\left((h+1)p-p^{h+1}\right) \\ \Phi_h^*(p) &= 1-(1-p)^{h+1}\ ,\ h\in N, \end{aligned} \qquad [22]$$

satisfacen las condiciones anteriores(10) y, por lo tanto, proporcionan una justificación normativa a las familias de índices $\Im$ y $\Im^*$.

Demostración: Es evidente que las funciones anteriores pasan por el origen de coordenadas y por el punto (1,1). Son dos veces derivables en]0, 1[. Son estrictamente crecientes:

$$\Phi_h'(p)=\frac{h+1}{h}\left(1-p^h\right)>0\ ,\ \Phi_h^{*\prime}(p)=(h+1)(1-p)^h>0\ ,\ 0<p<1,$$

(10) Estas funciones no son únicas, como tampoco lo son las FBS que resultan al aplicar el enfoque AKS. Por ejemplo, si $\Phi(p)$ satisface las condiciones señaladas, también las cumple $a\Phi(p)+(1-a)p$, a>0. Sin embargo, más relevante que su unicidad es la existencia de familias de funciones que cumplan las condiciones requeridas.

y se verifica $\Phi_h'(1^-) = \Phi_h^{*'}(1^-) = 0$. También se satisface la condición de concavidad estricta:

$$\Phi_h''(p) = -(h+1)p^{h-1} < 0 \ , \ \Phi_h^{*''}(p) = -h(h+1)(1-p)^{h-1} < 0 \, , 0 < p < 1.$$

Finalmente, a partir de [11] y [12], es inmediato comprobar que se satisface [21]:

$$1 + \int_0^1 \Phi_h''(p)L(p)dp = 1 - (h+1)\int_0^1 p^{h-1}L(p)dp = I_h \ ,$$
$$1 + \int_0^1 \Phi_h^{*''}(p)L(p)dp = 1 - h(h+1)\int_0^1 (1-p)^{h-1}L(p)dp = I_h^* \, .$$

Cada una de las familias de funciones obtenidas generaliza, de distinta forma, la función de preferencia asociada al coeficiente de Gini (véase nota 9), ya que para h=1 resulta $\Phi_1(p) = \Phi_1^*(p) = 2p - p^2$, $0<p<1$.

El resultado anterior prueba que los índices de las familias $\Im$ y $\Im^*$, así como las FBS consistentes con los mismos, presentan aversión hacia la desigualdad. La forma en que varía esa actitud al pasar de un elemento a otro dentro de una misma familia o al comparar índices de familia diferente, es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 5. Las familias $\wp = \{\Phi_h\}_{h \in N}$ y $\wp^* = \{\Phi_h^*\}_{h \in N}$ están ordenadas de forma monótona según el grado de concavidad de sus elementos. Al aumentar h las funciones de $\wp$ presentan menor concavidad, mientras que para $\wp^*$ sucede lo contrario. Para $h \neq 1$ toda función de $\wp^*$ es más cóncava que cualquier función de $\wp$.

Demostración. Se realizará en dos etapas. En primer lugar se demostrará que la sucesión de funciones $\wp = \{\Phi_h\}_{h \in N}$ es estrictamente decreciente en el intervalo]0, 1[, mientras que $\wp^* = \{\Phi_h^*\}_{h \in N}$ es estrictamente creciente en dicho intervalo. Es decir:

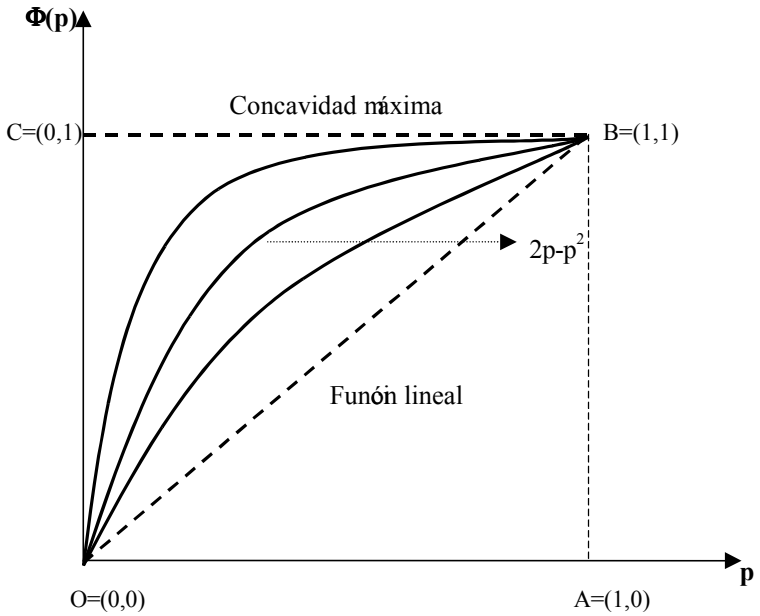
$$\Phi_{h+1}(p) < \Phi_h(p) \, , 0 < p < 1 \, , h \in N,$$
$$\Phi_{h+1}^*(p) > \Phi_h^*(p) \, , 0 < p < 1 \, , h \in N.$$

A partir de la primera de las igualdades de [22], se comprueba que $\Phi_h(p) - \Phi_{h+1}(p) > 0$, $0<p<1$, equivale a que la función $g(p) = 1 + hp^{h+1} - (h+1)p^h$ sea positiva en el intervalo]0, 1[, condición que se satisface al ser g(1)=0 y g(p) estrictamente decreciente en dicho intervalo ya que $g'(p) = h(h+1)p^{h-1}(p-1) < 0$. La segunda de las desigualdades es inmediata: $\Phi_h^*(p) - \Phi_{h+1}^*(p) = (1-p)^{h+1}(p-1) < 0$, $0<p<1$.

Como consecuencia de lo anterior las funciones de la familia $\wp$ presentan una concavidad decreciente al aumentar h. En efecto, dado que Φ_h y Φ_{h+1} son estrictamente crecientes y estrictamente cóncavas, con $\Phi_h(0)=\Phi_{h+1}(0)=0$ y $\Phi_h(1)=\Phi_{h+1}(1)=1$, la condición $\Phi_{h+1}(p) < \Phi_h(p)$, $0<p<1$, implica que la gráfica de Φ_h es más arqueada que la de Φ_{h+1}, por lo que su concavidad es más pronunciada. En la siguiente Figura se pone de manifiesto esta situación.

Figura 1

FUNCIONES DE PREFERENIA JERARQUIZADAS SEGÚN SU CONCAVIDAD



Con las funciones de la familia $\wp^*$ se presenta la situación contraria. Al ser $\Phi^*_{h+1}(p) > \Phi^*_h(p)$, $0<p<1$, al aumentar h su concavidad es creciente. Es inmediato que para todo $h\neq1$ la gráfica de cualquier función de $\wp^*$ queda situada por encima de la de cualquier función de la familia $\wp$: $\Phi^*_i(p) > \Phi_j(p)$, $i,j\geq2$. En consecuencia, para $h\neq1$ toda función de $\wp^*$ es más cóncava que cualquier función de $\wp$. La gráfica de la función de preferencia asociada al índice de Gini, separa ambas familias.

A partir de este resultado es inmediato que los índices de $\Im=\{I_h\}_{h\in N}$ presentan una aversión decreciente hacia la desigualdad, mientras que para los de $\Im^*=\{I_h^*\}_{h\in N}$ sucede lo contrario. Para comprobar que las dos familias, conjuntamente consideradas, cubren todo el espectro de la aversión hacia la desigualdad, desde la indiferencia a la aversión máxima, habrá que analizar su comportamiento en los casos extremos.

Al aumentar h, resulta a partir de [22] que las funciones de $\wp$ convergen hacia la identidad en [0, 1], representada por la línea OB en la Figura 1:

$$\lim_{h\to\infty}\Phi_h(p)=p\ ,\ 0\le p\le 1.$$

En tal caso, el bienestar asociado a cualquier distribución se identifica con su renta media:

$$\lim_{h\to\infty}W_h=\int_{R^+}x\,dp=\mu\ ,$$

y las transferencias progresivas no tienen incidencia sobre el bienestar. Para la medida de desigualdad se verifica:

$$\lim_{h\to\infty}I_h=0\ ,$$

no porque la distribución de la renta sea igualitaria sino debido a que la FBS asociada es indiferente a la desigualdad.

Las funciones $\wp^*$, cuya concavidad es creciente, convergen hacia CB, excluido el punto C (Figura 1):

$$\lim_{h\to\infty}\Phi_h^*(p)=\begin{cases}0\ ,\ p=0\\ 1\ ,\ 0<p\le 1,\end{cases}$$

función que presenta la concavidad máxima. En este otro caso extremo el bienestar se identifica con la renta mínima de la distribución(11):

$$\lim_{h\to\infty}W_h^*=x_m\ ,$$

(11) Es el resultado de calcular [19] , en el sentido de Rieman-Stieltjes, para la función de preferencia anterior.

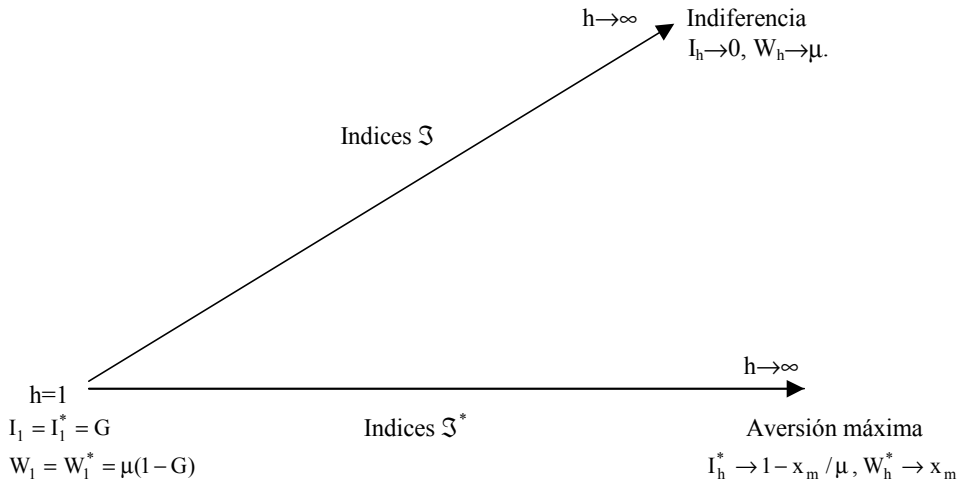
de manera que para la FBS sólo son relevantes las transferencias de renta dirigidas hacia el individuo más pobre de la población, postura que corresponde al denominado leximin rawlsiano(12). Para el índice de deasigualdad, resulta:

$$\lim_{h\to\infty} I_h^* = 1 - \frac{x_m}{\mu}.$$

En la siguiente Figura se resume el comportamiento de ambas familias de índices frente a la desigualdad.

Figura 2

ACTITUDES DE LAS FAMILIAS $\Im$ Y $\Im^*$ FRENTE A LA DESIGUALDAD



A partir del índice de Gini, los elementos de $\Im$ muestran una actitud hacia la desigualdad tendente a la indiferencia, mientras que los de $\Im^*$, a partir del mismo índice, presentan una aversión creciente que tiende hacia el leximin rawlsiano. En este sentido se tiene una situación análoga a la que se da en la familia de índices de Atkinson. En ella aparece, en la expresión de cada índice, un parámetro real

(12) Centra su interés en la situación de los individuos con menor nivel de renta. Considera que la distribución F es preferible a G si la renta mínima de F es mayor que la correspondiente a G, o si, en caso de igualdad entre ellas, su frecuencia en F es menor. Este enfoque deriva de la teoría sobre la justicia social defendida por Rawls (1971).

positivo cuyo valor representa explícitamente el grado de aversión a la desigualdad(13). Existe, sin embargo, una diferencia fundamental entre unos y otros. Los de Atkinson se definen a partir de la REID asociada a una FBS previamente especificada(14), de manera que son índices normativos cuya actitud hacia la desigualdad está prefijada. Los índices I_h e I_h^* se introducen como medidas de dispersión de rentas en las que, a posteriori, se recupera la FBS subyacente.

Una característica que comparten los elementos de las familias de índices $\Im$ y $\Im^*$ es la de ser índices de compromiso(15).

Proposición 6. Los índices obtenidos al multiplicar I_h o I_h^* por la renta media de la población, μ, son índices absolutos, invariantes frente a cambios de origen en la distribución de la renta.

Demostración. Si $L_X(p)$ es la curva de Lorenz asociada a la variable X, la correspondiente a la variable X+a, a>0, viene dada por:

$$L_{X+a}(p) = \frac{1}{\mu + a}(\mu L_X(p) + ap) .$$

Sustituyendo la expresión anterior en [11], mediante un cálculo directo se obtiene:

$$I_{h,X+a} = \frac{\mu}{\mu + a} I_{h,X} . \qquad [23]$$

(13) En el caso continuo su expresión viene dada por $A(\alpha) = 1 - \frac{1}{\mu}(\int_0^\infty x^{1-\alpha} dF(x))^{1/1-\alpha}$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ y $A(1) = 1 - \frac{1}{\mu}\exp(\int_0^\infty \ln x dF(x))$, siendo α el citado parámetro. Se verifica: $\lim_{\alpha \to 0} A(\alpha) = \mu$ y $\lim_{\alpha \to \infty} A(\alpha) = = 1 - \frac{x_m}{\mu}$.

(14) En concreto, $A(\alpha)$, $\alpha \neq 1$, se define a partir de la FBS utilitarista que resulta de la función de utilidad $U_\alpha(x) = a + b\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, b>0, y para A(1) se considera $U_1(x) = a + b\ln x$. Estas funciones de utilidad se obtienen al imponer que la elasticidad de la utilidad marginal de la renta, respecto de la propia renta, sea constante e igual a α.

(15) Un índice relativo de desigualdad, I, se denomina de compromiso si μI es un índice absoluto. Análogamente, un índice absoluto J es de compromiso si J/μ es un índice relativo. Las FES asociadas a este tipo de índices son distributivamante homotéticas (véase Imedio (1996), pags. 31 y 32).

Sustituyéndola en [12], y teniendo en cuenta que $\int_0^1 (1-p)^{h-1} p\,dp = \frac{1}{h(h+1)}$, resulta:

$$I^*_{h,x+a} = \frac{\mu}{\mu + a} I^*_{h;x} \quad . \qquad [24]$$

En definitiva, $\Im_A = \{\mu I_h\}_{h\in N}$ y $\Im^*_A = \{\mu I^*_h\}_{h\in N}$ son dos familias numerables de medidas absolutas de desigualdad. Por otra parte, a partir de [17] resulta que, cuando se relaciona desigualdad y bienestar mediante el enfoque AKS, para cualquier distribución de renta que no sea igualitaria, los índices absolutos:

$$\begin{aligned} \mu I_h &= \mu - W_h \\ \mu I^*_h &= \mu - W^*_h \ , \ h \in N, \end{aligned} \qquad [25]$$

representan el coste de la desigualdad en términos de bienestar social (véase nota 8). En los casos extremos resulta:

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to\infty} \mu I_h = 0 \\ &\lim_{h\to\infty} \mu I^*_h = \mu - x_m \ . \end{aligned} \qquad [26]$$

El coste de la desigualdad es nulo en el caso de indiferencia y es máximo, la diferencia entre las rentas media y mínima de la distribución, cuando lo es la aversión hacia la desigualdad.

Los elementos de $\Im^*_A$ pueden interpretarse como medidas de privación relativa (Duclos (2000), Bárcena y otros (2003)) cuando la privación social media, partiendo de la definición de Hey y Lambert (1980), se obtiene aplicando un esquema de ponderación a la privación asociada a cada nivel de renta. Los índices absolutos del conjunto $\Im_A$ admiten una interpretación análoga en términos de satisfacción relativa.

Siguiendo el enfoque de Hey y Lambert (1980), la satisfacción de un individuo con renta x al compararse con otro con renta z, $S_{HL}(x,z)$, se define como:

$$S_{HL}(x,z) = \begin{cases} x - z, & x > z \\ 0, & x \le z. \end{cases} \qquad [27]$$

Con ello, la satisfacción de un individuo con un determinado nivel de renta es nula respecto a quienes tienen rentas mayores que la suya y se identifica con la diferencia de rentas al compararse con quienes tienen una renta menor.

La satisfacción media asociada al nivel de renta x, $S_{HL}(x)$, es el valor esperado de $S_{HL}(x,z)$:

$$S_{HL}(x) = \int_0^{\infty} S_{HL}(x,z)dF(z) = xF(x) - \mu L(F(x)) = F(x)(x - \mu(x^{-})), \qquad [28]$$

siendo $\mu(x^{-}) = \frac{\mu L(F(x))}{F(x)}$ la renta media del conjunto de individuos cuya renta es menor o igual que x. Por lo tanto, $S_{HL}(x)$ coincide con el producto de la proporción de individuos con renta menor que x y la diferencia entre x y la renta media de ese grupo. Es inmediato que $S_{HL}(x)$ es una función creciente y convexa de la renta, siendo $S_{HL}(x_m)=0$, $S_{HL}(x_M)=x_M-\mu$, siendo x_m y x_M las rentas mínima y máxima de la distribución, respectivamente.

La satisfacción media para el conjunto de la sociedad viene dada por:

$$E(S_{HL}(X)) = \int_0^{\infty} S_{HL}(x)dF(x) = \mu G, \qquad [29]$$

el índice absoluto de Gini.

A partir de la expresión [28] se puede generalizar el proceso de ponderación para calcular la satisfacción social media, aplicando a $S_{HL}(x)$ un peso, $\omega_h(p)$, que incorpore juicios de valor de carácter distributivo. Si este peso es:

$$\omega_h(p) = p^{h-1}\ ,\ h \in N, \qquad [30]$$

para h=1 es $\omega_1(p)=1$ y estamos en el supuesto de Hey y Lambert, mientras que si h>1 al ser $\omega_h^{'}(p) > 0$, se asigna mayor peso a la satisfacción asociada a los niveles altos de renta.

Proposición 7. La satisfacción media para el conjunto de la sociedad al aplicar a $S_{HL}(x)$ el esquema de ponderación $\omega_h(p)$, $S_\omega(X)$, coincide con el índice absoluto de desigualdad μI_h.

Demostración. Haciendo p=F(x), la expresión [28] se puede escribir en la forma:

$$S_{HL}(x) = \mu(pL^{'}(p) - p),$$

con lo cual:

$$S_{\omega}(X) = \int_0^{\infty} S_{HL}(x)\omega_h(F(x))dF(x) = \mu\left[\int_0^1 p^h L'(p)dp - \int_0^1 p^{h-1}L(p)dp\right] \qquad [31]$$

Integrando por partes la primera de las integrales del último miembro, se obtiene:

$$\int_0^1 p^h L'(p)dp = 1 - h\int_0^1 p^{h-1}L(p)dp\ .$$

Sustituyendo en [31] y teniendo en cuenta [11], resulta:

$$S_{\omega}(X) = \mu\left[1 - (h+1)\int_0^1 p^{h-1}L(p)dp\right] = \mu I_h\ , \qquad [32]$$

lo que concluye la demostración.

En definitiva, también en los aspectos normativos existe una dualidad entre el comportamiento de los elementos de $\Im$ y de $\Im^*$, que se traslada a los de $\Im_A$ y $\Im^*_A$ cuando estos se interpretan como medidas de privación/satisfacción.

4. COMENTARIOS FINALES

Al considerar la curva de Lorenz asociada a una distribución de rentas y su curva dual como funciones de distribución, sus respectivos momentos generan dos familias de medidas de desigualdad. Se trata de índices que al ser casos particulares de las medidas lineales tienen una interpretación sencilla a partir de las diferencias entre la línea de equidistribución y la curva de Lorenz, lo que no sucede con otros índices de uso habitual tales como los de la familia de Atkinson o los de entropía.

Ambas familias incluyen entre sus elementos el índice de Gini pero, excepto para esta medida, los índices pertenecientes a cada una de las familias difieren en el modo en que ponderan las diferencias de Lorenz a lo largo de la escala de rentas. Unos asignan a esas diferencias un peso creciente con el nivel de renta, mientras que los de la otra familia siguen el criterio contrario en la asignación de ponderaciones.

Las familias de funciones de preferencia que permiten obtener funciones de bienestar consistentes con los índices de desigualdad están ordenadas de forma monótona según su grado de concavidad, lo que implica que esta ordenación se traslade a los índices en términos de aversión hacia la desigualdad. En este senti-

do, se ha demostrado que ambas familias cubren todo el espectro: desde la indiferencia hasta la aversión máxima.

Dado que los primeros momentos de una distribución proporcionan información acerca de algunas características importantes de la misma, la utilización de los primeros índices de cada una de las familias estudiadas puede ser una selección adecuada para "sintetizar" la curva de Lorenz, permitiendo, a la vez, realizar valoraciones de la desigualdad relativa de acuerdo a distintos juicios distributivos.

Aunque en nuestra definición ambas familias de índices son numerables, desde el punto de vista formal no hay inconveniente en extender el rango de variación del parámetro al conjunto de los números reales positivos. De hecho, en la definición habitual del índice de Gini generalizado ese es el rango considerado y nada impide proceder del mismo modo para los índices de la otra familia. Conviene observar, sin embargo, que para la caracterización de la curva de Lorenz y, a través de ella, de la distribución de rentas, bastan los índices asociados a los momentos respecto del origen, conjunto que es numerable.

Quedan pendientes, al menos, dos cuestiones de interés. Una sería analizar qué condiciones ha de cumplir la distribución de la renta, en cuanto a la forma de su función de densidad o de distribución, para que los índices I_h e I_h^* satisfagan el principio de transferencias decrecientes, según el cual un índice de desigualdad disminuye en mayor cuantía, como consecuencia de una transferencia de renta entre individuos con una diferencia de renta dada, si dicha transferencia involucra a individuos cada vez más próximos a la cola inferior de la distribución(16). La otra cuestión pendiente es la descomposición de los índices inducida por una partición finita arbitraria de la población total. Dagum (1997) obtiene una descomposición de este tipo para el índice de Gini, $G= I_1=I_1^*$, cuantificando la desigualdad dentro y entre las subpoblaciones de la partición. La mayor dificultad que se presenta al tratar de generalizar ese resultado al caso h>1, es la de definir una magnitud que permitiese identificar la desigualdad existente entre las subpoblaciones de la partición y que generalizase, para estos índices, la denominada diferencia media de Gini(17).

(16) Ni el índice de Gini ni los de Gini generalizados cumplen este principio para una distribución cualquiera. Tampoco la cumplirán, en general, los I_h, h>1, al presentar menor aversión hacia la desigualdad que los anteriores.

(17) Si X e Y representan dos distribuciones de renta con funciones de distribución F_X y F_Y, respectiamente, la diferencia media de Gini entre ellas, $\Delta_{X,Y}$, se define como $\Delta_{X,Y} = E(|X-Y|) = \int_0^\infty \int_0^\infty |x-y| dF_Y(y) dF_X(x)$, y el índice de Gini entre ambas distribuciones, $G_{X,Y}$, se expresa mediante $G_{X,Y} = \frac{\Delta_{X,Y}}{\mu_X + \mu_Y}$, siendo μ_X y μ_Y las rentas medias.

REFERENCIAS

AABERGE, R. (2000): «Characterizations of Lorenz curves and income distributions», *Social Choice and Welfare*, 17: 639-653.

ATKINSON, A. B. (1970): «On the measurement of inequality», *Journal of Economic Theory*, 2: 244-263.

BÁRCENA, E., IMEDIO, L. y MARTÍN, G. (2003): «Privación relativa, imposición sobre la renta e índice de Gini generalizado», Papeles de Trabajo, 6/2003, Instituto de Estudios Fiscales.

BLACKORBY, C. y DONALDSON, D. (1978): «Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare», *Journal of Economic Theory*, 18: 59-80.

CHAKRAVARTY, S. R. (1990): «Ethical social index numbers», Springer.

DAGUM, C. (1990): «Relationship between income inequality measures and social welfare functions», *Journal of Econometrics*, 43: 91-102.

DAGUM, C. (1997): «A new decomposition of the Gini income inequality ratio», *Empirical Economics*, 22: 515-531.

DALTON, H. (1920): «The measurement of inequality of incomes», *Economic Journal*, 30: 348-361.

DONALDSON, D. y WEYMARK, J. A. (1980): «A single parameter generalization of the Gini indices of inequality», *Journal of Economic Theory*, 22: 67-86.

DUCLOS, J. Y. (2000): «Gini indices and redistribution of income», *International Tax and Public Finance*, 7: 141-162.

FOSTER, J. E. (1985): «Inequality measurement», en Fair Allocation (ed. H. P. Young), Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. 33.

GINI, C. (1912): «Variabilità e mutabilità», Studi Economico-giuridici, Università di Cagliari, III.

HEY, J. D. y LAMBERT, P. J. (1980): «Relative deprivation and the Gini coefficient: comment», Quarterly Journal of Economics, 95: 567-573.

IMEDIO OLMEDO, L. J. (1996): «Distancias entre distribuciones de renta. Aplicación a la imposición», Servicio de Publicaciones de la Universidad de Málaga.

KENDALL, M., STUART, A. y ORD, K. (1994): «Advanced theory of Statistics, Vol. 1, Edward Arnold, London.

KOLM, S. C. (1976): «Unequal inequalities, I, II», *Journal of Economic Theory*, 12: 416-442; 13: 82-111.

LAMBERT, P. J. (2001): «The distribution and redistribution of income», Manchester University Press.

MEHRAN, F. (1976): «Linear measures of inequality», *Econometrica*, 44: 805-809.

MULIERE, P. y SCARSINI, M. (1989): «A note on stochastic dominance and inequality measures», *Journal of Economic Theory*, 49: 314-323.

NEWBERY, D. M. (1970): «A theorem of the measurement of inequality» *Journal of Economic Theory*, 2: 264-266.

RAWLS, J. (1971): «A theory of justice», Harvard University Press, Cambridge.

SEN, A. K. (1973): «On economic inequality», Clarendon Press, Oxford.

SHORROCKS, A. F. (1980): «The class of additively decomposable inequality measures», *Econometrica*, 48: 613-625.

SHORROCKS, A. F. y FOSTER, J. E. (1987): «Transfer sensitive inequality measures», *Review of Economic Studies*, 54: 485-497.

YAARI, M. E. (1988): «A controversial proposal concerning inequality measurement», *Journal of Economic Theory*, 44: 381-397.

YITZHAKY, S. (1983): «On an extension of the Gini index», *International Economic Review*, 24: 617-628.

MEASUREMENT OF THE INEQUALITY VIA THE MOMENTS OF THE LORENZ CURVE AND ITS DUAL CURVE

ABSTRACT

The object of this work is studying two families of inequality indexes wich are obtained as linear transformations of the moments with respect to the origin of the Lorenz curve and its dual curve, when we consider such curves as functions of distribution. We present a unified view of both families, trying to clarify their parallelism and divergencies. In the normative approach, we compute the preference functions wich relate, in each case, welfare and inequality. This allows us to analyze its degree of aversion to inequality.

Key words: Characterization of Lorenz curve, linear measures of inequality, aversion to inequality, relative deprivation/satisfaction.

AMS Classification: 90A30