DESARROLLO HISTORICO DE LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD

Manuel García Alvarez

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADISTICA

1.–MATEMATICA.

La Ciencia, la Etica y el Arte, sintetizan la búsqueda de lo verdadero, la voluntad de lo bueno y la sensibilidad para lo bello, y son precisamente la verdad, la bondad y la belleza los fines directos del alma humana en su acercamiento a Dios, perfección suprema.

En el cultivo de la verdad, la estructura o esqueleto de toda la filosofía natural lo forma la Matemática. El hombre empequeñecido ante la gran complejidad de los fenómenos naturales, ha tratado y sigue tratando, de sustituir esa complejidad por unos esquemas formados por entes abstractos sobre los cuales razona. Cuando ha elaborado esos entes de razón (que se aproximarán más o menos a la realidad) los convierte en los conceptos matemáticos puros.

La Ciencia y en particular la Matemática es un canto constante a la unidad, al orden y a la simetria. Decia el Profesor Puig Adam:" ¿Que es la ciencia sino un eterno esfuerzo para sistematizar el estudio de los fenómenos naturales, es decir para presentarlos ordenadamente a través de la unidad y armonia que le imprime la matemática? .

La Ciencia ha ejercido siempre una gran influencia en la cultura de los pueblos, pero hoy, en que el hombre busca los secretos más íntimos de la Naturaleza, esa influencia llega a sus más altos grados.

La lucha del hombre por la vida le obligó pronto a inventar "algo" de lo que hoy llamaríamos una *técnica*, para defenderse de los elementos de la Naturaleza y seguidamente aprovecharlos en su favor.

Según Aristóteles, las matemáticas se originaron porque la clase sacerdotal de Egipto tenía el tiempo necesario para estudiar; corroboración de ésto es la prueba matemática más antigua que se conoce, el papiro hoy conservado en el Museo Británico, y escrito por el sacerdote Ahmés, que se cree es de 2.000 a 3.000 años antes de Cristo. En él se resumen los conocimientos matemáticos de tres mil años en forma de ejercicios de aritmética y geometría.

A diferencia de Egipto, Mesopotamia desarrolla un comercio hacia el exterior, por la necesidad de adquirir muchas cosas de las que carecía: En el Líbano, cedros, en Asia Menor, oro, plata y otros metales, hacia la India, para adquirir tinturas, especias, etc. Así debieron surgir los primeros sistemas de contar y medir.

Babilonia, pueblo interesadísimo por la astronomía; los fenicios, el pueblo comerciante y marinero por excelencia que recorre, 1.500 años a.C. prácticamente todo el Mediterráneo, y más tarde los cartagineses, pioneros de una incipiente matemática.

Después los navegantes de lengua griega de Sicilia, de Creta, de Chipre, de la multitud de islas del Asia Menor y de la Grecia misma, empiezan a anular aquella hegemonía marítima y comercial y ya 400 años a.J.C. los griegos habian empezado a dibujar mapas geográficos de las costas mediterráneas. Pero los fenicios legan a los griegos algo más importante: el tipo de escritura, que estos adaptan a su lengua y forman el alfabeto.

El pensamiento científico humano y con él la Matemática en general, no encuentra su desarrollo racional y sistemático hasta la aparición de la cultura griega.

Se considera a Tales de Mileto como el primer hombre de ciencia. Esta había permanecido hasta entonces anónima.

Aristóteles en su Metafísica empieza tambien la historia de la filosofía con Tales. La ciudad de Mileto, costera del Asia menor, alcanza su esplendor en el siglo VI a. J.C. Las ricas colonias jónicas y las islas adyacentes del Egeo fueron la cuna de la cultura griega. Tales perteneció al grupo de hombres de la primera mitad de aquel siglo VI a los que se llamó "los siete sabios". Su principal mérito es el caracter *deductivo* que dió a la ciencia.

Ese repetido siglo VI a.J.C. se caracteriza por un verdadero despertar del espíritu humano. En la costa mediterránea aparecen las primeras escuelas griegas: La *jónica*, fundada por Tales, en Mileto; la *pitagórica*, en Crotona, sur de Italia, fundada por Pitágoras, y más tarde la de *Atenas*, con Platón y la de *Alejandría* con Euclides.

La civilización griega se caracteriza, por una fé total en el poder infinito de las ideas, por el amor desinteresado a la verdad, por el culto eterno de las cosas y por la sistematización de los resultados que obtienen. Por eso, a diferencia de los babilonios, asirios, caldeos, etc., que poseian verdades, los griegos profundizan más, quieren saber el porqué de esas verdades. Esto es la esencia de un sistema científico y por ello el origen de la Ciencia hay que buscarlo en Grecia. Durante ocho siglos la civilización griega fué cortando poco a poco muchos lazos que unian el misterio y la ciencia.

Aristóteles, el gran discípulo de Platón, fué filósofo y científico en una época en que no habia todavia divisiones en el conjunto de los conocimientos humanos. Supo combinar el saber especulativo con el conocimiento derivado de la experiencia sensible, siendo considerado como el creador de la lógica formal; y con Aristóteles terminó la gran época de la filosofia natural.

La época de mayor florecimiento científico se produce cuando a la muerte de Alejandro Magno y la subsiguiente división de su imperio, los sabios y filósofos de Grecia se trasladaron a Alejandría y así la civilización de Atenas se establece en Egipto, y la Escuela de aquella ciudad es durante mucho tiempo el foco de investigación científica.

Ese esplendor de Alejandria comienza a decrecer, cuando en el año 614 cae en poder de los árabes bajo el califato de Omar y la famosa biblioteca, que llegó a reunir más de setecientos mil volúmenes es pasto de las llamas.

Constantinopla y Persia empiezan a servir de refugio a los sabios procedentes de Alejandria, hecho que sirve de verdadera fuente a los árabes para el desarrollo de las matemáticas. Los árabes traducen con fervor las obras clásicas griegas, asimilan el sistema indio de numeración y cálculo y enriquecen los conocimientos con aportaciones propias.

Los número "arábigos" en los cuales el valor de un número depende de la posición de la cifra y el 0 como símbolo de carencia de unidades de un cierto orden son descubrimientos indios que datan del siglo V de nuestra era. En los árabes, se unen pues, la geometria de los griegos y la aritmética de los indios.

El pensamiento científico europeo llega en el siglo VII a su más bajo nivel y es poco a poco otra vez Europa la que recoge, fundamentalmente a través de las traducciones de los árabes, entre los que destacan los españoles, el caudal matemático que habia de servir de base al movimiento renacentista.

El Imperio romano de Occidente habia quedado destruido por la invasión de los bárbaros y como dice el Profesor Puig Adam, es San Isidoro de Sevilla el primer foco de cultura que alumbra al mundo visigodo. Su obra principal de caracter enciclopédico, las "Etimologías" u Orígenes de las cosas, están distribuidas en 20 libros, dedicando el 3º a las matemáticas.

Durante toda la Edad Media fueron las comunidades monacales, con una oscura y callada labor de copia, traducción y compilación, las depositarias de la cultura clásica. Son elementos valiosos las Escuelas establecidas en Granada, Córdoba, y Sevilla.

Debe citarse al arzobispo de Toledo, Raimundo, que al fundar una Escuela de traductores en 1150, hizo por medio de la lengua latina accesible a toda Europa, la mayoria de las obras de autores griegos y árabes.

El progreso es interno, el espíritu trabaja sobre sí mismo.

El primer traductor de Toledo es el español Juan de Luna ("Juan Hispalense") a quien se debe la primera versión latina de la incipiente Algebra. Esta implica un pensamiento nuevo, el afan de simplificar y dar fijeza a los procedimientos, operar rápidamente y simbolizar.

El siglo XIII es testigo del derrumbamiento de la dominación árabe en España y la cultura se extingue, aunque surgen brotes, como la gran figura de Alfonso X el Sabio, padre de la astronomia europea, cuyos trabajos se utilizaron en todas las Universidades de Europa durante más de 4 siglos, y las personalidades gigantes de un Alberto Magno, cultivador espléndido de la ciencia positiva, y un Tomás de Aquino, que en la *Summa Theologica,* y en la 2ª de las célebres "vias" para demostrar con la razón la existencia de Dios, se apoya en el *principio de la causalidad* (tan importante en la Teoria matemática de las Probabilidades), según el cual las cosas existen como causadas por otras y el encadenamiento ordenado conduce forzosamente a la Causa primera: Dios.

En la segunda mitad del siglo XV, comienza en Italia y luego se extiende por toda la Europa Occidental, el movimiento que se conoce con el nombre de Renacimiento, y que provoca un nuevo desarrollo cultural y científico, del cual participan las matemáticas, y los escritos de Euclides, Arquímides, Apolonio, etc.,se extienden por doquier, mientras nuevos descubrimientos matemáticos comienzan a tener su aplicación en la técnica y el arte.

Esos grandes movimientos intelectuales y espirituales del Renacimiento constituyen un capítulo muy importante en la historia de la cultura.

Los primeros matemáticos del Renacimiento van apartándose de las demostraciones geométricas y comienzan a estudiarse las ecuaciones, es decir, empieza a surgir el álgebra en su sentido clásico, aún cuando los primeros balbuceos ya se encuentran en Diofanto.

Son los siglos de un Leonardo de Pisa, de Galileo, de Tartaglia, de Cardano, de Vieta, de Descartes, de Fermat, de Cavalieri y de tantos otros que fueron colocando los pilares de la ciencia matemática. De Descartes es la afirmación: "Dios es el autor de las verdades eternas, tales como los principios de la Matemática".

En dicha época se habia abierto paso la noción de que el nuevo método de aislar procesos naturales sencillos durante el experimento, y de expresar después las leyes halladas en lenguaje matemático, abría un campo ilimitado a la investigación.

El descubrimiento del cálculo infinitesimal por Newton y Leibniz es el momento decisivo para la historia de la Humanidad. Con Galileo y Descartes forman los cuatro pilares de la Ciencia moderna.

La concepción leibniziana del cálculo infinitesimal se extiende por todo el continente europeo, demostrando su valor. Son los últimos años del siglo XVII y se está entrando en la época de oro de la Matemática. Pascal, Newton, Leibniz, los hermanos Bernouilli, D'Alembert, Euler y más tarde Laplace y Lagrange, a la cabeza de cientos de matemáticos, dan lugar a una ascensión rapidísima de la Matemática.

Así, apoyándose en los nuevos descubrimientos, florece el enfoque moderno de las ciencias naturales, ordenando sistemáticamente las experiencias sobre el mundo vegetal y animal, se construye el impresionante edificio de la mecánica newtoniana, se logran progresos decisivos en la comprensión de los fenómenos eléctricos, se sientan las bases de la química moderna y se conquistan una serie de importantes conocimientos astronómicos.

La ciencia a partir de esos momentos comienza a disgregarse en gran número de parcelas, pues un hombre solo no puede ya abarcarlo todo; aparece la especialización.

El siglo XVIII es en filosofía la era de la Ilustración. Se niega el método inductivo, tan peculiar de las ciencias naturales y de la matemática.

Dice el Profesor Werner Heisemberg, de Escocia: "El campo de las estructuras matemáticas que se ofrecía a la ciencia antigua aun era relativamente restringido; la ciencia griega buscaba leyes estáticas. La ciencia moderna ha demostrado que en el mundo que nos rodea lo permanente son las leyes dinámicas que determinan el acontecer natural. La infinita variedad de este acontecer, encuentra su imagen matemática fiel, en las infinitas soluciones de una ecuación como la ecuación diferencial de la mecánica de Newton. La filosofía antigua coordinaba los poliedros regulares con los átomos de los elementos; en cambio, a la partícula elemental de la física moderna corresponde una ecuación matemática.

Sigue pues tan viva en la ciencia moderna, la fé en la existencia de un núcleo matemático sencillo en todas las leyes naturales, incluso en aquellas que todavia no penetramos, que la sencillez matemática se considera el supremo principio heurístico a que hay que ceñirse al descubrir leyes naturales. La comprensión inmediata de la naturaleza estriba en recibir inconscientemente las estructuras matemáticas reproduciéndolas en el espíritu."

Fué tal la fecundidad de las matemáticas en el siglo XVIII que los analistas ocupados en añadir nuevos "pisos" al monumental edificio que se estaba construyendo dejaban numerosas fisuras, grietas y puntos débiles, pero la construcción seguía.

Si la ciencia matemática ha podido cumplir el progreso que todos sabemos, ha sido a costa de abandonar el ideal cartesiano y a la adopción de un punto de vista nuevo: el rigor.

Hacer rigurosa la Matemática es hacerla racional, construirla lógicamente. Este último aspecto tomado exhaustivamente conduce a la posición extrema de considerar la matemática como un aspecto de la Lógica formal. El prototipo de los logísticos es Rusell.

Pero centrando el problema, la lógica nutre a la Matemática de una serie de soluciones o fórmulas posibles y la ciencia matemática comienza cuando se escoge y se las reune en teorias generales. La Naturaleza le dá al botánico innumerables sujetos de estudio, y ellos no constituyen la botánica. Con la lógica no basta en las matemáticas.

Desde el punto de vista de la abstracción y de la pureza del razonamiento, el siglo XIX es la etapa más brillante en la historia de la matemática. La geometría resurgió en todo su esplendor, el análisis continuó su marcha ascendente abriendo nuevos procedimientos de cálculo y hubo tambien una filosofia de las matemáticas.

El gran matemático Cauchy cierra la Escuela francesa de esa primera mitad del siglo XIX y enlaza, por así decirlo, con el primer genio matemático alemán, Gauss, conocido con el sobrenombre de "Principe de la Matemática", científico completo, pues realmente abordó todas las ramas de la Ciencia.

Contemporáneos e inmediatamente seguidores de su colosal obra son Abel, Weierstrass, Galois, Riemann, Hamilton, Jacobi, Dedekind, Lie, Boole, Sylvester,etc.

Al finalizar este siglo XIX un excepcional matemático aparece procedente de la India. Es Ramanuján, que vivió sólo 33 años y que sin conocimiento ninguno de libros franceses ni alemanes resolvió con prodifiosa intuición numerosos problemas de análisis y de la teoria de números, con sencillez y elegancia.

Y en éste casi telegráfico desfile histórico, en ésta brevísima cabalgata matemática llegamos ya a la época inmediatamente anterior a nuestros dias, los últimos años del siglo XIX y los transcurridos del XX.

Peano, creador de la Lógica Matemática, autor de la primera axiomática del número natural; Cántor, creador de la Teoria de conjuntos; Rusell, uno de los lógicos más conspicuos; Hilbert, creador de la axiómatica y de la Metamatemática, Klein, Poincaré, Pasch, Einstein, Neumann, son hitos recientes que marcan ya la transformación completa de la matemática, con sistematización y rigor, en una disciplina totalmente estructurada.

Al comenzar el siglo XIX disciplinas dispersas se agrupaban bajo el nombre genérico de Matemáticas. Hoy, hay un edificio único: La Matemática. Sus características son: abstracción y unidad. Sus pilares: Conjuntos, Funciones y Grupos. Más aún, un solo concepto: *Estructuras.*

Hace relativamente poco tiempo afirmaba el Profesor Abellanas: "Nos encontramos con el hecho, que para muchos puede parecer sorprendente, de que el griego en la época clásica veía las mismas estructuras que la Matemática moderna ha vuelto a poner al descubierto. Esto autoriza a que nos hagamos la siguiente pregunta: Si dentro de la cultura griega podían caminar conjuntamente el pensamiento filosófico y el matemático, ¿no nos encontramos ahora en situación de que ocurra lo propio? ".

Actualmente se está llevando a cabo una reestructuración de los fundamentos de las ciencias, a fin de superar la crisis de principios que se ha producido, de una parte por el formalismo científico y de otra por el nominalismo filosófico. Toda esa reestructuración tiene como base en todas las disciplinas científicas, la moderna teoria abstracta de conjuntos. Y como además el método matemático es uno de los de mayor fuerza en la penetración hacia el mundo de lo desconocido, resulta ser la estructura matemática uno de los caminos más eficaces en el constante aprender de los humanos.

El hombre es consciente por los sentidos, del mundo que nos rodea. El ideal del matemático es construir un modelo útil de ese mundo, partiendo de esas ideas primarias de número, orden, distancia, tiempo, etc.

Platón, en el sexto libro de la República sostiene que el caracter esencial de la matemática es la naturaleza y grado peculiares de su abstracción.

Son además características típicas del método matemático el uso que hace de esa abstracción, tratando únicamente de situaciones hipotéticas; la necesidad de que pueda generalizarse; la desnudez de sus proposiciones; la dificultad y complicación de sus razonamientos; la exactitud de sus resultados; su completa universalidad sin restricciones, en fin, su infalibilidad práctica.

Benjamin Peirce fué el primero en definir en 1870 la matemática, como "la ciencia que obtiene conclusiones necesarias". Hoy, un siglo después, los estudios de filosofia de la matemática, reconocen que esa definición es sustancialmente correcta.

Los grandes descubrimientos matemáticos de todos los tiempos se han logrado buscando la verdad, sin asustarse de las consecuencias que esos descubrimientos podian traer al mundo. Prueba de ello es que los matemáticos nunca han impedido que las verdades descubiertas se aplicasen al mundo de la realidad.

La *matemática* se ha desarrollado a través del tiempo y por tanto tiene su historia, pero la Matemática como compendio de verdades es eterna, no tiene historia, ni es de Euclides o de Newton, sino que es la colección de verdades inmutables descubiertas por la mente del hombre en el transcurso de la Humanidad.

No resisto a la tentación de terminar ésta primera parte del trabajo, que figura bajo el genérico nombre de *Matemática,* sin transcribir un párrafo del Prof. Westrem Turnbull, de la Universidad de Sant Andrews: "En las matemáticas existe una grandeza que transciende las razas y el tiempo; las matemáticas pueden prestar humilde ayuda en el mercado, pero tambien alcanzan a las estrellas. La Matemática superior tiene la sencillez y la inevitabilidad de la poesia y la música supremas, encontrándose en la frontera entre todo lo que es maravilloso en ciencia y todo lo que es hermoso en Arte. Las matemáticas convierten la confluencia fortuita de los átomos en la traza del desde de Dios".

2.–A Z A R

El diccionario define la palabra *azar,* derivada del árabe "azahr", dado para jugar, como: casualidad, caso imprevisto o fortuito.

No es posible situar históricamente la aparición de los juegos de azar. Sólo se sabe que utilizando "tabas" o huesos estrágalos habia ya esa clase de juegos en las antiguas civilizaciones de Grecia, Egipto y Roma.

Los primeros filósofos discutieron mucho sobre la *necesidad* y la *contingencia* de las cosas y en el "Ars retórica" de Aristóteles figuran algunas consideraciones sueltas sobre lo que muchos siglos más tarde llevaría al concepto de probabilidad.

Una preocupación seria por lo incierto, por el azar, aparece por primera vez en los griegos.

En la Edad Media la idea cumbre del cristianismo de que todo está sometido a la Providencia fué interpretada como una condenación del azar; éste no existe puesto que todo lo que sucede en el mundo proviene de la mano de Dios. Pero Santo Tomás fijó claramente la posición al afirmar: Hay dos clases de causas, universales y particulares, y cualquier acontecimiento o suceso puede escapar a las últimas, pero no a las primeras. El verdadero esfuerzo del hombre consistia en intentar descubrir la Voluntad Divina y someterse a ella.

Suele conocerse con el nombre de *postulado de la causalidad* o principio de razón suficiente, la evidencia de que todos los sucesos y hechos que se producen en el mundo, dependen del concurso de ciertas causas y de la proporción en que éstas actúan.

Sin embargo, muchas veces aquellas causas escapan a nuestro conocimiento de tal forma que nos vemos obligados a emplear la palabra "azar" para justificar así la presentación o no de un suceso.

Todo lo que no es cierto físicamente, pueda producirse o no, lo llamamos, en nuestra ignorancia, *suceso fortuito* o dependiente del *azar.*

En la primera parte de su "Calcul des probabilités" Bertrand se pregunta: ¿Podemos hablar de leyes del azar? ¿No es el azar la antítesis de toda ley? . Sobre esta contradicción se ha escrito mucho.

Pero, para empezar, ¿Qué es el azar? . Los clásicos distinguian dos clases de fenómenos, los que obedecian a leyes armónicas y son por tanto previsibles en su repetición, y aquellos otros que aparentemente se rebelan a toda ley. Estos fueron atribuidos al azar y su previsión fué confiada a los horóscopos.

Se le dió al azar un sentido objetivo y esa posición determinista absoluta es falsa, porque hemos dicho que todo fenómeno por mínimo que sea tiene una causa y un Espíritu infinitamente poderoso, Creador de las leyes de la Naturaleza la ha previsto desde el principio de los siglos.

Henri Poincaré confiesa: "Es a causa de nuestra debilidad y de nuestra ignorancia que existe el azar para nosotros; el azar no es más que la medida de esa ignorancia, y el cálculo de probabilidades nos dará una información provisional sobre la presentación de los fenómenos fortuitos".

Aun cuando las leyes naturales no tuviesen secretos para el hombre, conoceríamos aproximadamente la situación inicial de un suceso, pero como una pequeña variación en aquella condición inicial puede engendrar una gran diferencia en la situación final, la predicción resulta imposible y tenemos otra vez que conformarnos con llamarle: fenómeno de azar.

El gran pensador del siglo XIX Jaime Balmes, aborda los problemas del conocimiento con un planteamiento moderno, presentando la *certeza* o posesión del saber, como condición indispensable de la integridad del espíritu y de la recta conducta, pues la *certeza* no es solo aquiescencia intelectual, sino dirección práctica, siendo sus fuentes: la conciencia, la evidencia y el sentido común.

En su "Essai philosophique sur les probabilités", Laplace confiesa: Una inteligencia que en un instante dado conociese todas las fuerzas que animan la naturaleza y la situación respectiva de los seres que la componen, y que fuera tan grande para someter esos datos al análisis, incluiría en la misma fórmula los movimientos de los mayores cuerpos del universo y los de los átomos más ligeros; nada sería incierto para ella y el porvenir como el pasado estarían presente ante sus ojos.

El espíritu humano ofrece, en la perfección que ha dado a la Astronomia, una débil muestra de esa inteligencia. Todos los esfuerzos en la búsqueda de la verdad tienden a aproximarlo sin cesar a la Inteligencia que hemos concebido, pero de la que siempre permanecera el hombre infinitamente alejado.

Pues bien, la Matemática de las probabilidades, cuando en un fenómeno se considera imposible de predecir cual será el "estado final" a partir del "inicial" y de las leyes conocidas de la Naturaleza, le llama *suceso aleatorio o de azar.*

Podiamos resumir en tres grandes grupos los sucesos que ocurren en la Naturaleza:

1º.–Aquellos cuyas causas conocemos y cuya realización está sujeta a las leyes físicas y matemáticas, que el hombre ha deducido, precisamente por conocer aquellas causas.

2º.–Sucesos cuyas causas conocemos solo parcialmente y cuya realización depende de leyes *empíricas,* que el hombre ha deducido y que están sujetas a error, por el desconocimiento de algunas de dichas causas.

3º.–Sucesos cuyas causas nos son totalmente desconocidas y la realización de los cuales se atribuye al *azar,* confesando así el desconocimiento completo que tenemos de aquellas.

Aún cuando a mediados del siglo XVI, el matemático italiano Cardano, escribió su "Liber de Ludo Aleae" (Libro de los juegos de azar) en el que aparecía el primer estudio de los principios de probabilidad, en realidad el primer autor que trata del azar, como concepto, es Abraham de Moivre en su "Doctrine of Chances", publicada en 1718.

Al obtener éste, mediante razonamiento matemático, la verdadera solución numérica de la ley de los grandes números y deducir la noción del orden del mundo, coincide con Süssmilch que llegaba a la misma noción mediante la observación.

Para Galileo, Newton y más tarde Laplace, las leyes de la Naturaleza están sometidas al *determinismo,* es decir, la vida de un astro, su masa, el campo en que está sumergido, etc, están rigidamente determinados. Pero éstas ideas están hace mucho tiempo superadas; aquella confluencia de ideas de Süssmilch y de Moivre contribuyó precisamente, al enriquecer la inteligencia, a considerar la idea de la fluctuación, es decir que las magnitudes son aleatorias, están contenidas en una zona fluctuante.

Los grandes y recientes avances de la Bioquímica y de la Biología moderna han abierto paso a la teoría de la evolución. La tabla sistemática de todos los códigos genéticos posibles puede explicar el determinismo de todas las estructuras específicas conocidas y las modificaciones accidentales del código genético fundamental provocaria mutaciones bruscas y explicarian la población de la bioesfera por diversas especies. La microevolución sola dependeria de las selecciones naturales.

Esas mutaciones sobre el código genético, haciendo que la transformación incida sobre la estructura fundamental del ADN (Acido desoxi–ribo nucleico), pueden ser producidas por el azar y encadenar así la evolución de las especies. Otra vez el azar sustituye a la confesión de desconocimiento.

Pero donde se ha llegado al colmo de la "divinización" del hombre ha sido en la atribución del origen de la vida al azar. Es decir se sustituye a Dios por el azar.

Porque como el problema máximo es el *origen del código genético* y el *mecanismo de traducción* de las células consiste por lo menos en 50 constituyentes macromoleculares que están ellos tambien codificados en el ADN y el código solo se puede traducir por productos de traducción, ¿cuándo y como ese bucle se ha cerrado sobre si mismo? Imposible de concebir, probabilidad nula. Salvo que negándose a creer en una Inteligencia infinita y creadora, se "salga uno por la tangente" diciendo "Fué el Azar".

Decia recientemente el sabio francés R.P. Georges de Nantes: ¿El Azar creó el sistema nervioso central del hombre, calculadora prodigiosa de diez billones de relés electrónicos y de un billón de interconexiones? ¡Y el cerebro cien mil veces más poderoso que la más potente máquina cibernética, se fabricó sólo, gracias al Azar! .

Más la *Ciencia objetiva* a medida que avanza descubre más a Dios. Pascal decía: "Todas las cosas encierran algún misterio, todas las cosas son velos que cubren a Dios".

3.–PROBABILIDAD

Es imposible saber cuando y en que región del globo el hombre empleo por primera vez la palabra "probable", de la que más tarde se derivaría la de probabilidad.

Para Aristóteles, "lo probable es lo que ocurre con frecuencia". Más tarde se traducia por "igual a verdad", y algún tiempo despues por "con apariencia de verdad" o "semejante a la verdad".

En el siglo XVII "probable" era un punto intermedio entre lo falso y lo verdadero, entre la imposibilidad y la certeza.

Los vocablos "probabilidad" y "probable" los empleamos todos en nuestra conversación cotidiana y sin embargo se han escrito y se seguirán escribiendo miles de páginas buscando una definición aceptable por todos.

Fué Augusto de Morgan, matemático inglés del siglo XIX, el que expuso con bastante rigor el concepto de "probable". Se refiere, para él, al estado de ánimo referente a algo que, por falta de información, no se tiene de ello completa certeza o conocimiento. Entonces el grado de certidumbre de una proposición, su "probabilidad", es el *grado de creencia* con el que se mantiene. Es posible aplicar los grados de creencia si se define la probabilidad aritméticamente como la razón entre el número total de alternativas "favorables" de un suceso y el número total de alternativas equiprobables. Interpretación clásica.

Según él, la transición de ésta definición a la anterior se basa en el principio de razón suficiente o indiferencia, de acuerdo con el cual dos proposiciones son igualmente probables si la fuerza de nuestra creencia se divide por igual entre ambas.

Una segunda interpretación de la probabilidad es la adoptada por la escuela del economista Keynes. Para él, dos proposiciones cualesquiera están relacionadas, no sólo por las relaciones corrientes de la lógica tradicional, sino por una "relación directamente intuible" denominada probabilidad. Esa relación puede tener grados, pero en general no podrán compararse ni medirse.

Una tercera interpretación de la probabilidad, tiene como idea central la frecuencia relativa del suceso y surgió a consecuencia de las aplicaciones de las probabilidades a la Estadística y a la Física, siendo sus promotores R.A. Fisher y Von Mises.

El Profesor Ernest Nagel, mantiene a la vista de esas tres interpretaciones la opinión de que el término probabilidad no es un término unívoco, puesto que tiene distintos significados según se refiera al concepto empleado en la vida diaria, en el campo de la estadística aplicada, en el contexto de las teorias físicas y biológicas, en la comparación de las teorias por sus respectivos grados de probabilidad y en la rama de las matemáticas que constituye el Cálculo de probabilidades. Entonces cree que la interpretación frecuencialista es la más satisfactoria en general, aunque en ciertas teorias como la ondulatoria de la luz, no se encuentra base suficiente para mantener que sea ese el significado más correcto de probabilidad.

Según Good, hay cuatro criterios principales para sintetizar las diversas teorias sobre la probabilidad:

1°.– Dependencia o no de un sistema axiomático.
2°.– Criterio objetivo o subjetivo.
3°.– Noción de frecuencia o grado de creencia.
4°.– Asociarse o no a la idea de número.

No es nuestra intención examinar detenidamente las distintas interpretaciones de la probabilidad, las cuales están muy bien explicadas en el artículo que en ésta misma obra publica nuestro compañero el Profesor Gutierrez Cabria y en otros documentados trabajos suyos.

Solo quisiera destacar que aunque el desarrollo del Cálculo de probabilidades corresponde a los matemáticos, los filósofos vieron pronto en él un campo muy amplio, en el cual intervenian los principios del conocimiento. Nunca, sin embargo, ha habido una separación concreta de las dos cuestiones, matemática y filosófica.

Desde el punto de vista lógico, dos problemas distintos comprende el estudio de la probabilidad. El primero está constituido por el conocimiento de las relaciones entre la hipótesis y los problemas que se deducen, la estructura lógica, la manera de llegar al concepto, etc. El segundo se ocupa de la conexión entre la probabilidad y la realidad, es decir, de la validez de los resultados obtenidos al ser aplicados a los hechos del mundo real.

Sin embargo debe decirse, en seguida, que los dos grupos mencionados de problemas no son independientes, sino que están entrelazados.

En 1923 Borel escribía: "Se podria considerar una teoria puramente lógica sin preocuparse de la posible existencia de sus aplicaciones, pero tal teoría seria un puro juego del espíritu, sin interés, y que no merecería el nombre de ciencia".

Precisamente los trabajos de Borel, Von Mises, Kolmogoroff y Fréchet, han convertido hoy el Cálculo de probabilidades en una rama de la matemática pura, lógicamente construida a partir de un sistema axiomático apoyado en la teoria de conjuntos.

En los siglos transcurridos desde que se creó la teoria, ninguna rama de la matemática ha sido investigada con tanta asiduidad y ninguna ha encontrado un campo tan amplio de aplicación. Está íntimamente ligada con los acontecimientos cotidianos y el papel que ha desempeñado en el desarrollo de las ciencias físicas, de la naturaleza y en los estudios socio–económicos es bien conocido.

Laplace escribía: "Es extraordinario que una ciencia que empezó con la importancia de un juego se haya elevado a los más importantes objetos del conocimiento humano. Ese conocimiento, que partiendo de observaciones nos conduce a establecer leyes y predecir, objetivo principal de toda ciencia".

De la importancia adquirida en nuestros días por la Teoría de Probabilidades baste decir, que apoyándose en ella explica la física moderna, las propiedades más importantes de la materia y de la energía; los biólogos obtienen consecuencias importantísimas en las leyes de la herencia y de la evolución; los agrónomos pueden seleccionar razas y tipos de animales y plantas; en el campo de la economía y de la previsión tiene aplicación constante; en astronomía para el descubrimiento de nuevas leyes del Universo; numerosas propiedades de las funciones son estudiadas hoy por los matemáticos, gracias a esa teoria y es en fin, herramienta indispensable, para el demógrafo, para el sociólogo, para el estadístico, para el médico,para el filólogo, etc.

4.– HISTORIA

El cálculo de probabilidades, que tuvo su nacimiento en problemas surgidos en la observación de los juegos de azar, presenta en su desarrollo cronológico, una etapa prehistórica, de la que practicamente no se conoce nada sino conjeturas, y cuatro periodos, a nuestro juicio, bastante definidos: El primero que podríamos señalar con el distintivo de *Iniciación del cálculo de probabilidades*, se extiende desde los balbuceos del calculo hasta la publicación del "Ars Conjectandi" en 1713; el segundo, *Formación de una Teoria de Probabilidades*, abarca aproximadamente todo el siglo XVIII; un tercer periodo se extiende hasta los primeros años del siglo XX y se caracteriza por la *Profundización y primeros pasos de sistematización;* y el último ó contemporáneo, establecimiento de la *Teoria de la probabilidad sobre bases* *matemáticas rigurosas,* y que constituye la investigación de los últimos 40 años.

Nos proponemos ir señalando en cada una de esas etapas, las principales características, avances y logros de esta rama de las Matemáticas, la más joven y "frivola" según acertada calificación del Profesor Sixto Ríos.

Etapa prehistórica. Juegos de azar.–

Suelen discriminarse los juegos, que no constituyen deporte, en juegos de cálculo, de azar y de habilidad, si bien es dificil encajarlos en uno de los grupos, pues casi todos tienen una parte de cálculo, de habilidad y de azar.

En los llamados de *azar,* predomina éste de manera casi absoluta sobre las otras modalidades y son ejemplo de ellos, el "baccará", "golfo", "loteria", "póker", "ruleta", "dados", etc.

El juego de azar ha sido algo, en cierto modo, innato en el hombre, generalmente como diversión y distracción, y muchas veces dándole un sentido mágico, religioso o mitico.

Nunca se podrá saber en que época de la Prehistoria se inventaron la mayoria de los juegos, aun cuando hay que suponer que los más simples y sencillos son tan antiguos como la Humanidad misma. Algunos aparecerían ya en el Paleolítico Inferior, otros en el Superior, pero seguramente su desarrollo fué a más en el Neolítico, fase de la Prehistoria en que comienzan los rudimentarios grupos urbanos de población.

Con esos juegos (al igual que en nuestros tiempos se observa en las civilizaciones más primitivas) el hombre debia distraerse mucho tiempo. Es muy probable, según los historiadores, que para aquellos primeros entretenimientos se utilizasen los huesos "astrágalos" de los animales con pezuñas, que es mucho más simétrico que el de los que tienen piés, y que ha llegado hasta nuestra época con el nombre de "taba".

Por las pinturas y como resultado de excavaciones se sabe que el astrágalo se usó como juego en las civilizaciones de Egipto, Grecia y Roma. Se han encontrado por ejemplo, pinturas en las que aparece un hombre equilibrando cuidadosamente un astrágalo sostenido sobre la punta de un dedo y a otro grupo de hombres enfrente de él, a modo de tribunal.

Además de los astrágalos se han encontrado varillas de madera con incisiones y primitivos dados más o menos irregulares.

Aunque Herodoto hace alusiones al invento de esos juegos por los griegos, parece más lógico que procediesen de Egipto. Homero y Platón tambien hacen referencias a los juegos de tabas.

La "taba" se fué redondeando hasta llegar al dado. Este juego parece ya bastante generalizado en la dinastia de Ptolomeo (300 años antes de J.C.). Se atribuye generalmente a los etruscos la invención de los juegos de dados.

En la Grecia clásica y en Roma era habitual el uso de los 4 astrágalos en los templos; el sacerdote interpretaba el tiro de los cuatro huesos, que según las inscripciones encontradas en Asia Menor, llegaban a ser también muchas veces, cinco. Se vé aquí la utilización del juego para predecir el porvenir, como algo sagrado, de rito religioso.

Los juegos con la pelota también son mencionados en escritos de Homero y Platón.

En tiempos de la dominación romana en Europa, los juegos de suerte fueron una distracción y recreo del pueblo y entre ellos destaca el de dados. Los dioses influían en el desarrollo de los acontecimientos e interferían en el juego de dados, manifestando así sus deseos "La Fortuna", "El Destino", y "Los Hados".

En "Las vidas de los Césares" Seutonio hace varias alusiones a la pasión que por los juegos de azar sentian los emperadores, a pesar de que debido a los excesos a que se llegaba muchas veces en ellos se habian dictado leyes restringiéndolos e incluso prohibiéndo algunos.

En estratos sociales relativamente cultos había gran afición a los pasatiempos y entretenimientos con los cuadros numéricos, que por una serie de propiedades aritméticas presentan resultados realmente curiosos. En las obras de Fermat, editadas en París en 1894 aparece un escrito a Mersenne en el que le dice: "Yo no encuentro nada más bello en Aritmética que esos números que algunos llaman planetarios y otros mágicos, y he visto varios talismanes en los cuales aparecen uno de esos cuadrados ordenados de la suerte.

Esos cuadrados mágicos han desempeñado en la Astrología y en la tradición popular un gran papel y junto con la tirada de dados constituian la base de problemas de adivinación.

Sin embargo, un conjunto de supersticiones, una serie de barreras religiosas y morales y una practicamente nula todavía teoría combinatoria, fue causa de que no se pensase nada que relacionase el azar con el cálculo matemático, buscando leyes por rudimentarias que fuesen.

Por unas razones bastante semejantes, las primeras investigaciones que se hicieron de tipo estadístico (en lenguaje de hoy) tales como censos y empadronamientos, años vividos por los hombres, esperanza de vida, etc., ni remotamente se pensaba en relacionarlas con la matemática conocida enconces y cuya conexión siglos más tarde daría lugar al gran desarrollo del cálculo de probabilidades.

Citemos de pasada, como casi el único documento histórico que poseemos, la tabla de Ulpiano, prefecto del Pretorio en tiempos de Alejandro Severo y en la que, a base de empadronamientos realizados en diversas épocas obtiene los años que quedan de vida a los distintos grupos de edades.

Muy oportunamente el Profesor Arnaiz Vellando señalaba en su discurso de ingreso en la Academia de Ciencias Morales y Políticas, como las tablas de Mortalidad de Halley, construidas a base de datos de mortalidad en la ciudad de Breslau eran intentos muy plausibles de llegar a la hoy fecundísima teoria del muestreo. Las diferencias de mortalidad en los distintos grupos de edad las achacaba Halley a la "suerte".

Siendo Emperador romano Cayo Julio César Octavio Augusto I el año 577 de la fundación de Roma, se promulgó el edicto que ordenaba el Censo general de toda la población del Imperio, obligando a cada habitante a empadronarse en el lugar de su nacimiento.

Con motivo del traslado de Maria y José para cumplir ese requisito nació en Belen Nuestro Señor Jesucristo. El Evangelista San Juan nos dice: "Et ibant omnes ut profirentur singuli in suam civitatem".

De los primeros siglos del Cristianismo se han encontrado también vestigios concretos de los juegos de dados, astrágalos, palillos para lanzar, juego de tablas, etc.; el juego de *pares* y *nones* se utilizaba mucho con fines adivinatorios, más en esa época, desde el punto de vista moral el Cristianismo rechazaba todo lo que fuera subordinación a lo aleatorio y los juegos de azar estaban moralmente prohibidos.

Los conceptos de contar y de enumeración se iban asentando sobre bases cada vez más firmes, aunque naturalmente no con el concepto de número que hoy tenemos. Sin embargo seguía sin establecerse ninguna relación numérica con los resultados de los juegos de azar.

Hay una gran confusión sobre el pensamiento de los filósofos católicos en el espinoso problema del azar. Ya hemos indicado en la primera parte de éste trabajo, como a nuestro juicio, Santo Tomás dejó las cosas bastante claras. San Bernardino enumera en 15 "espacios" "malignitates impiisimi ludi", males morales, como frivolidades, amores contrariados, corrupción de menores, blasfemias, etc., y no dice nada sobre impiedad de los juegos de fortuna.

Hasta el siglo XIV no se inventaron los juegos de naipes, más como por el precio de las cartas no eran asequibles al jugador medio, aunque fueron poco a poco desplazando a los dados tardaron muchísimos años en hacerlo del todo.

Aunque nada en concreto se sabe sobre el periodo inicial de la imprenta y aun cuando en 1423 se daba a conocer el primer grabado en madera, el invento de los tipos movibles se atribuye corrientemente a Gutenberg, impresor de Maguncia hacia el año 1450.

El rápido desarrollo de la imprenta a lo largo de toda la segunda mitad del siglo XV, con el intercambio y conocimiento entre los pueblos del pensamiento humano en su multitud de facetas, hace que las referencias escritas a los juegos de suerte aparezcan ya en numerosas ocasiones. Pearson y Kendall, en un estudio histórico citan como curioso un escrito del gran filósofo francés François Rabelais, hombre muy al día en los juegos de fortuna, en el que dice: "Entonces estudiaron el Arte de la Pintura y Escultura e introdujeron el uso del antiguo juego de mesas, como Leonicus ha escrito de él y como nuestro buen amigo Lascaris jugaba a él". Andrés Juan Lascaris, sabio filósofo griego que reunió muchos manuscritos griegos de gran valor y autor entre otras obras de los "Epígramas griegos y latinos" es muy posible que conociese bien el desarrollo de los distintos juegos de fortuna.

A pesar de los variados escritos en que se describen y se hace referencia a distintos juegos de azar, no hay el menor vestigio en todo el siglo XV de algo que se parezca a un rudimentario Cálculo de Probabilidades.

1^er^ periodo histórico. Iniciación del Cálculo de Probabilidades.

Los problemas generales de enumeración que suelen agruparse bajo el hombre de análisis combinatorio no parecen haber sido tratados hasta los últimos siglos de la Antigüedad clásica; sólo la fórmula

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

es conocida desde el siglo III de nuestra Era. La general $\binom{n}{h}$ parece es estudiada por el matemático hindú Bhaskara en el siglo XII.

En un manuscrito de Leví ben Gersen, en los comienzos del siglo XIII, se presenta un estudio más sistemático, obteniendose la fórmula recurrente de las variaciones de n objetos tomados de h en h, las permutaciones y otras relaciones deducidas. Más, como si esos resultados hubiesen sido desconocidos, hasta tres siglos después no empiezan a redescubrirse las principales fórmulas del Cálculo combinatorio.

Transcurría el siglo XVI y entre los matemáticos de aquel tiempo, pero principalmente entre los italianos, se buscaba afanosamente la solución de la ecuación cúbica. Es entonces cuando se establece el célebre pugilato entre Niccolo Fontana, más conocido por Nicolás Tartaglia, Escipión del Ferro y Jerónimo Cardano, sobre prioridades en el descubrimiento de aquella. Dicha solución se publica por vez primera en 1545 en Nuremberg en el tratado de Algebra "Ars Magna" de Cardano.

El matemático italiano citado anteriormente, Nicolás Fontana, natural de Brescia, es conocido con el pseudónimo de Tartaglia, debido al defecto físico que le afectaba, su tartamudez ("tartaja") ocasionada por una herida que recibió cuando siendo aun muy niño su ciudad natal fué ocupada y saqueada por Gastón de Foix; se hallaban en la Catedral y al ser asaltada por los franceses resultó muerto su padre, y él no pereció gracias a los cuidados que le prodigó su madre arriesgando su propia vida. Vivió 57 años, del 1500 al 1557 y fué el primero que aplicó el cálculo matemático a problemas de artilleria. Aparte de sus obras fundamentales, escribió una larga colección de recreaciones matemáticas y entre ellas figuraban problemas del juego de dados.

El otro gran matemático italiano contemporáneo de Tartaglia es Jerónimo Cardano, nacido en Pavía en 1501, uno de los sabios más notables del Renacimiento, pues fué además gran filósofo, médico e ingeniero. Para tener una idea de su fecundidad basta considerar que escribió 222 tratados. Su contribución al Algebra fué de gran importancia: demuestra la regla de Tartaglia y resuelve la ecuación general de tercer grado; estudia los valores positivos y negativos de las raices de una ecuación, las soluciones imaginarias, la reducción de grado por el conocimiento de una raiz, relaciones entre coeficientes y raices, vislumbra la posterior regla de Descartes y comienza también a estudiar la resolución de una ecuación de 4º grado.

Cardano demuestra que el número de partes no nulas de un conjunto de n elementos es $2^n - 1$, es decir, se anticipa así en cuatro siglos al concepto de partes de un conjunto esto es, la familia o conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de él, incluidos el propio conjunto y el conjunto nulo.

Como Cardano era un jugador empedernido, del cultivo matemático de la combinatoria y del planteamiento de problemas de juegos con 2 y 3 dados, obtiene una serie de resultados que plasma en su manuscrito "Liber de Ludo Aleae" (Libro de juegos de azar), hallado después de su muerte que acaeció en 1576 y fué publicado en Lyon en 1663.

En ese manuscrito que, en parte, es como un manual del jugador de dados, Cardano, que no tiene aún muy claro el concepto de abstracción matemática, demuestra una extraordinaria perspicacia para los primeros problemas de probabilidad, discute la equiprobabilidad, la esperanza matemática y forma tablas de frecuencia en el juego de dados e incluso hay un esbozo de la llamada más tarde Ley de los grandes números. Afirmaba que el número de ocurrencias de un acontecimiento en n tentativas independientes, es aproximadamente igual a np, siendo p, "constante de probabilidad", de que ocurra el acontecimiento en una prueba.

No puede pues quitársele a Cardano el mérito de haber sido el pionero en el campo de la probabilidad y junto con Tartaglia deben considerarse como los *iniciadores* del Cálculo de probabilidades, hecho que hasta hece poco tiempo se situaba siempre en el periodo Pascal — Fermat, quizás porque aquellos primeros estudios y resultados de los matemáticos italianos fueron muy poco conocidos y evidentemente apenas influyeron en el desarrollo ulterior del estudio de la probabilidad.

Las investigaciones realizadas en el siglo XVI en torno a ese vago concepto de probabilidad estaban relacionadas con una más o menos idea de búsqueda de la "verdad", y de la "certeza", proviniendo la idea de caminos diferentes, entre los que podemos destacar: en los juegos de azar, la medida de la suerte ("mensura sortis"); en los nacimientos, la observación de la regularidad de la proporción de sexos; en las investigaciones astronómicas, la distribución de los errores de observación; en los procesos judiciales el valor de los testimonios, etc.

En las numerosas sociedades o academias que en Italia cultivaban en los siglos XVI y XVII, arte, literatura, ciencias, se hablaba y discutía de diversos problemas de los juegos de fortuna tan en boga en aquella época. El gran astrónomo Galileo Galilei (1564–1642) también intervino en esos problemas y dió solución al de tirar tres dados y ver las distintas posibilidades de obtener una suma de 10 o de 9 puntos. Sobre esos estudios hay un manuscrito suyo que titula. "Sopra le Scoperte dei Dadi" posiblemente escrito entre 1613 y 1623. En la colección casi completa de sus trabajos publicada en 1718 aparece el libro "Considerazione sobre il Giuoco dei Dadi".

Transcurre cerca de un siglo, hasta mediados del XVII, sin que se conozca ningún nuevo estudio o aportación en los problemas matemáticos derivados de los juegos de dados.

El medio siglo comprendido entre 1635 y 1688 es la fuente y plataforma del auge de las matemáticas modernas. Ese gran despegue se produce en cinco lineas generales: *Cálculo diferencial e integral* (Newton y Leibniz), *Geometría Analítica* (Descartes y Fermat); *Aritmética superior* (Fermat); *Análisis combinatorio y Teoría de Probabilidades* (Fermat y Pascal), y *Dinámica y Gravitación universal* (Newton).

La matemática se desarrollaba apoyada en su propia esencia. Por eso, la trivial aritmética de las combinaciones y permutaciones y las observaciones dispersas y nada sistematizadas de los juegos de azar, pueden explicar con suficiente lógica la aparición súbita de los principios básicos del cálculo de probabilidades.

Blas Pascal, nacido en Clermont — Ferrand en 1623, fué de una extraordinaria precocidad para los estudios matemáticos. La característica esencial de su obra científica no es la de constituir un cuerpo de doctrina, sino la de contener los gérmenes y las primeras ideas que condujeron a sus sucesores a los grandes descubrimientos de Matemáticas y Física.

Pedro de Fermat, natural de Beaumont de Lomagne, es el otro gran matemático francés contemporáneo (1601 – 1665) de Pascal y a quien éste admiraba mucho. Aunque la aportación fundamental de Fermat a la matemática es la Teoria de los Numeros sentó, junto con Pascal, las bases de la naciente teoria de probabilidades.

Aun cuando es casi seguro que los Arabes en el siglo XIII y los Chinos en el XIV, conocían la relación entre los $\binom{n}{h}$ y la fórmula de la potencia de un binomio, fueron Pascal y Fermat los que sistematizaron aquellas relaciones y obtuvieron las principales propiedades de los números combinatorios, encontrando el método de cálculo por recurrencia del llamado "triángulo aritmético".

Un noble francés, Antonio Gomband, conocido en la historia por el Caballero de Mèré, era un hombre de gran habilidad y experiencia en los juegos de azar, y le propuso a Pascal diversos problemas con ellos relacionados, pidiéndole explicaciones sobre algunas contradicciones aparentes entre su razonamiento teórico y las observaciones que habia recogido en el juego.

Una de las primeras preguntas hechas por Mèré a Pascal fué el que se llama "Problema de los puntos", que en síntesis consiste: Dos personas participan en un juego de azar, ganando la apuesta la primera que logre acumular un cierto número de puntos. Si los jugadores se ven forzados a suspender el juego antes de que éste haya terminado, dado el número de puntos que ha acumulado cada uno de ellos ¿Cómo deberá dividirse la apuesta? . Pascal le comunicó a Fermat este problema y lo resolvieron separadamente, aunque con demostraciones distintas, pues mientras Pascal sirviéndose de su triángulo aritmético fué haciendo hipótesis sobre las puestas de cada uno, Fermat se apoyó en el naciente cálculo combinatorio.

Otra consulta, hoy clásica, de Mèré a Pascal, es la pregunta de por qué en el juego de tirar 3 dados, le aparecía más frecuentemente la suma 11 que la 12, cuando la probabilidad es "igual" porque hay 6 maneras de sacar ambas sumas. La respuesta de Pascal fué naturalmente que aunque el número de descomposiciones de 11 y 12 en tres sumandos es ciertamente 6 en ambos casos, la combinación $4 + 4 + 4$ no tiene más que una posibilidad de salir y su probabilidad es, por tanto, 1/216, pero en cambio, por ejemplo la $3 + 3 + 5$ puede aparecer también como $3 + 5 + 3$ y como $5 + 3 + 3$, con lo que las probabilidades son ya 3/216. Las probabilidades finales de las sumas 11 y 12 son entonces distintas.

La correspondencia privada entre Fermat y Pascal con motivo de la resolución de esos problemas de juegos de azar, de los que hemos señalado dos como botones de muestra, se considera la fundamentación de la teoria de probabilidades. Nacían las "matemáticas del azar" (Pascal las denominó Geometría del azar), que hoy día son la base de todo análisis estadístico. Bertrand diría dos siglos después: "Los grandes nombres de Pascal y Fermat decoran la cuna de ésta ciencia".

Toda aquella correspondencia tenía lugar en el año 1654. Pascal, hombre de principios rígidos, se habia retirado voluntariamente a Port Royal, pues deseaba meditar sobre "la miseria y la grandeza de los hombres" y aunque no gustaba de los juegos de azar, acogía con simpatía los problemas de ellos derivados para recrearse en su resolución matemática. Al escribir en los últimos años de su vida sus "pensamientos" trata de la probabilidad en el séptimo capítulo.

Pero si Pascal y Fermat habian puesto los primeros cimientos del nuevo edificio que se estaba empezando a construir, un impulso fundamental a la obra es dado por el físico, geómetra y astrónomo holandés Christian Huygens. Aunque unos años más joven que Pascal, pues había nacido en la Haya en 1629, pasó a Francia poco después de los 20 años y vivió en Paris durante 30 años, aunque parece no tuvo contacto con Fermat y Pascal, sí con otros matemáticos y llegó a tener conocimiento de la citada correspondencia entre aquellos. No olvidemos que la juventud y vida posterior de Huygens coinciden con un periodo histórico de gran resurgimiento científico, en el que la matemática, la física y la astronomía están orientadas por astros de primera magnitud como Descartes, Galileo, Pascal, Fermat, Newton, Leibniz. A pesar de ello el talento de Huygens le convierten pronto en una de las figuras que dá más empuje al progreso científico del siglo XVII.

En 1657 publica en holandés una memoria titulada "De Ratiociniis in Ludo Alae", primer trabajo impreso dedicado exclusivamente a probabilidades y en el que aparecen muchas resoluciones de las efectuadas por Pascal y Fermat (a veces con distinto enfoque) y otros problemas interesantes y bastante difíciles acerca de las probabilidades en los juegos de azar.

A él se debe el concepto de esperanza matemática tan fecundo posteriormente.

El compatriota de Huygens, Schooten, tradujo al latín aquel trabajo y lo publicó como parte final de su libro "Exercitaciones Mathematicae".

En 1669 publicó también Huygens el trabajo "Application of Matematical of probability to expectation of human life".

Pronto encontraron aplicación los nacientes estudios de la teoria de probabilidades, en la construcción de tablas de mortalidad, para rentas vitalicias, etc., aun cuando ya casi tres siglos antes había tablas de interés compuesto. Es a finales de éste siglo XVII cuando surgen las Compañías de Seguros.

En 1668, el gran matemático aleman Godofredo Guillermo Leibniz publica su trabajo "Dissertatio de arte combinatoria", en el que establece de una manera sistemática la teoria combinatoria sobre base científica. Citemos también en ésta época, por estudios parecidos a los anteriores, a Lobkowitz y al jesuita español Juan Caramuel.

En la primera mitad del siglo XVII y durante una violenta persecución de los protestantes en los Paises Bajos y Bélgica con motivo de la Reforma, huye de Amberes trasladándose a Francfort una familia cuyo apellido habría de brillar durante casi dos siglos en la investigación matemática: los Bernouilli. Por lo menos nueve miembros de ella lograron preeminencia en las matemáticas y en la física, recibiendo varios de ellos distinciones y premios de las principales Academias europeas.

Por el gran confusionismo que ha producido muchas veces el asignar determinada investigación o descubrimiento a Bernouilli, sin concretar a cual de ellos se refiere, hacemos una síntesis de la generación: El hijo mayor de los huidos de

Amberes se instaló en Basilea, en la frontera suiza; de sus hijos destacamos a Jacobo (Jaime ó Santiago), Nicolás y Juan (le denominaremos Juan I). Nicolás tuvo dos hijos, el varón también Nicolás (Nicolas I). Juan tuvo otros tres hijos, Nicolas II, Daniel I y Juan II, y éste a su vez tuvo como descendientes a Juan III, Daniel II y Jacobo II.

El primer matemático fué Jacobo, nacido en 1654, pues aunque en principio estudió Teología y Humanidades, una inclinación viva hacia las Matemáticas, le hicieron abandonar el primer camino, venciendo una obstinada resistencia de su padre. Viaja por Francia, Holanda, Bélgica e Inglaterra buscando enterarse y establecer contacto con los más eruditos en el cultivo de la astronomía, de la física y de la matemática.

A su regreso a Suiza, llega en 1686 a ocupar una Cátedra de Matemáticas en la Universidad de Basilea y como fruto de su constante investigación, publica numerosos trabajos sobre series, cónicas, cicloides, curvas transcendentes, isoperimetria, probabilidades, combinatoria, etc.

Quizás, entre sus muchos descubrimientos, el más singular es el de la espiral equiangular o logarítmica $r = a^{\theta}$, curva que se halla en la trama de la tela de araña, en las conchas y en las espiras de las nebulosas; la espiral cruza sus radios formando un ángulo constante y sus propiedades son realmente maravillosas. En la vejez, Jacobo Bernouilli estaba tan enamorado de su curva, que repetía que para él era el símbolo de su tenacidad y fé en la matemática, deseando que fuese grabada en su tumba. Así fué en efecto, y toscamente aparece en ella la espiral con la célebre leyenda "Eadem mutata resurgo".

Sus estudios sobre probabilidades, a base de lo escrito por Pascal y Huygens le absorbieron gran parte de su vida; según confesión propia, solamente a su célebre teorema, más tarde conocido como "ley de los grandes números" dedicó más de veinte años.

Fruto de todo aquel trabajo fué su famoso libro "Ars conjectandi" (Arte de conjeturar) en el que establece los principios fundamentales de esas dos ramas de la Matemática, que son el cálculo de probabilidades y la teoria combinatoria.

El "Ars conjectandi" se componía de cuatro partes. La primera es casi una simple reproducción del tratado de Huygens de 1657 con alguna simplificación en las demostraciones y la incorporación de algunos problemas propuestos por el mismo Bernouilli en distintas ocasiones; tal es el que sugirió en el "Journal de Sçavants" en 1685 y que resolvió primero él y después Leibniz. En su solución va revelada la presencia de series de potencias cuyos exponentes forman una progresión geométrica de 2º orden, tipo de series que se encuentran más tarde en la teoria de las funciones elípticas.

La segunda parte del libro está dedicada al cálculo combinatorio y en ella aparecen ya fórmulas, como la que dá la suma de las potencias de 2º, 3er, etc., grado, de los primeros n números naturales, destacando que en ese desarrollo figuran unos coeficientes numéricos, conocidos después con el nombre de "Números de Bernouilli". La 3ª parte está dedicada a aplicaciones de esa teoria, principlamente a cuestiones sugeridas por los juegos de cartas, que por aquel entonces estaban en gran uso, casi, como los juegos de dados.

La 4ª parte es la más importante, pero quedó incompleta y en realidad es la que puede considerarse como la verdadera base del cálculo de probabilidades; se titula: "Tradens usum et applicationes praecedentis doctrinae in civilus, moralibus et ecco - nomicis".

La definición de probabilidad que aporta Jacobo es en esencia, la clásica que ha llegado hasta nuestros dias, es decir: "Si existen n casos igualmente probables y que se excluyen mutuamente, de un suceso S, y entre ellos hay m favorables a un cierto acontecimiento A, la probabilidad matemática de A es el cociente $\frac{m}{n}$ ". Esta definición ha sido impugnada principalmente desde mediados del siglo XIX, aunque ya Leibniz le puso a Bernouilli la objeción de la poca aplicación práctica a distintos campos científicos y no sólo a los juegos de azar.

Aparece en dicha última parte del "Ars conjectandi" el teorema que históricamente lleva el nombre de su descubridor, Teorema al que Poisson le dió el nombre de "Ley de los grandes números" y que fué el primer intento para deducir medidas estadísticas a partir de probabilidades individuales, que ha permitido más adelante la aplicación de las probabilidades a distintas ramas de la estadística. El teorema decía en síntesis: Si la probabilidad constante de un suceso es p y al realizar la experiencia n veces, dicho suceso tiene lugar m veces, el cociente $\frac{m}{n}$ se acerca tanto como se quiera a p , con tal de que el número n de pruebas sea suficientemente grande.

Este teorema, que es caso particular del central del límite, ha tenido numerosos verificadores experimentales, como Buffon, De Morgan, Charlier, Uspensky, Hoar, Wolf, etc. Wolf fué el que hizo a mediados del siglo XIX experiencias de lanzar una aguja de 36 mm. sobre fajas de 45 mm. de ancho. La probabilidad matemática de intersecciones es $72/45\ \pi\ =\ 0{,}5093$. Hizo la prueba 5.000 veces y la aguja cortó a las líneas 2.532 veces, por lo que la frecuencia relativa es 0,5064, es decir, una discrepancia de sólo 0,0029.

Hay que destacar por último, que Jacobo Bernouilli murió el año 1705 y dejó, como hemos dicho, su obra sin terminar, obra que ocho años más tarde, en 1713 fué publicada en Basilea por su sobrino Nicolás.

2º Período histórico.– Formación de una teoria de probabilidades.

La última parte del siglo XVII y los primeros años, del XVIII es una época notabilísima en el desarrollo de las distintas ramas de la Matemática. No solamente es el genio de Newton, la mayor parte de cuyos descubrimientos fueron entre 1665 y 1686, sino el empuje creador del gran filósofo Leibniz, la dinastia de los Bernouilli y las grandes aportaciones de Euler, los que materializan esa época dorada, primera plataforma de la expansión matemática de los siglo XVIII y XIX.

Ya hemos indicado anteriormente que junto a Jacobo destacan también en la historia de la matemática diversos miembros de la familia Bernouilli. Así, su hermano Juan, trece años más joven, profesor de Euler y amigo de De Moivre, Montmort e Huygens, con los cuales discutió problemas de probabilidades; la mayor parte de su obra está contenida en la publicación hecha en 1742 bajo el nombre de "Opera Omnia".

Su sobrino Nicolás I en 1709, antes de publicar la obra de su tio, editó trabajos sobre probabilidades y su aplicación a la proporción entre los sexos y a problemas jurídicos.

Otro descendiente destacado fué Daniel I, hijo de Juan, que fué profesor en San Petersburgo y en Basilea, y ha dejado numeroso testimonio escrito de sus investigaciones, introduciendo el concepto de "esperanza moral", que aplica al célebre "problema de San Petersburgo", y que en 1713 habia planteado su hermano Nicolás, siendo además el primero que hace aplicación del cálculo infinitesimal a la teoria de probabilidades.

Contemporáneo de los primeros Bernouilli es el matemático francés Pedro Raimundo de Montmort, que estudió el algoritmo de las diferencias finitas y diversos problemas sobre probabilidades, publicando en 1708 su "Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazard", libro por tanto anterior al "Ars conjectandi".

El siguiente paso en el avance de las probabilidades lo dió Abraham de Moivre, que aunque francés, desde los 18 años se trasladó a Inglaterra. Allí publica en 1711 un trabajo inicial "De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus". A éste matemático se debe el fundamental teorema de la probabilidad compuesta y al inventar medios de aproximación para las funciones, llegó a aproximar la distribución binomial por la curva normal, por lo que hoy se le considera como el autor de la idea de esta importante distribución. En 1718 publicó su obra "Doctrine of chances" de contenido parecido al "Ars conjectandi", con problemas sobre juegos, seguros de vida y otras aplicaciones de la probabilidad a las cuestiones sociales.

De Moivre limitó sus aplicaciones más ambiciosas de la probabilidad a establecer la credulidad de una "Gran Causa Primera". Consideraciones análogas condujeron al Rv. Thomas Bayes, matemático inglés a obtener la fórmula de la probabilidad inversa, publicada en 1763, sobre las probabilidades de causas desconocidas.

Bayes desarrolló en forma completa la IV parte del "Ars conjectandi", que Bernouilli habia tejado sin terminar y fué el primero que utilizó la probabilidad matemática en el razonamiento inductivo, determinando asimismo la probabilidad de que la probabilidad de un suceso (conocida ésta y en un gran número de pruebas) estuviese comprendida entre unos límites prefijados. Dos memorias destacan entre sus aportaciones (fueron conocidas, después de su muerte gracias al Rv. Price) y dos siglos después, aún continuarían las discusiones en torno a sus premisas, siendo la mayoria de las críticas de orden lógico y filosófico.

Moivre tuvo un digno continuador en Tomás Simpson. Se debe a él, entre otras, la obra "The Nature and laws of Chance", en donde expone las ideas básicas de De Moivre, aunque de forma algo más abstracta y con aplicación del valor medio a problemas astronómicos.

Es en ésta primera mitad del siglo XVIII cuando surgen las primeras investigaciones en lo que más tarde sería la teoria de errores. Estos primeros trabajos son debidos al también matemático inglés Rogelio Cotes, profesor de Cambridge, quien en su "Opera miscellanea" habla sobre un método para determinar el valor más probable de un cierto número de observaciones, estableciendo también el concepto de "peso" de una observación.

En ésta época y ligado con el cálculo de probabilidades aparece muchas veces el estudio de las diferencias finitas e interpolación, aspectos sobre los que publicaron trabajos, Leibniz, Newton, Taylor, Cotes, Stirling, Euler, Nicole, etc.

Un tema que dió lugar a profundizaciones en el cálculo de probabilidades fué el de la verificación de la validez de los testimonios aportados ante los Tribunales de Justicia.

¿Hasta que punto nuestro raciocinio deja de ser esclavo de nuestras impresiones? decia el Marqués de Condorcet y en el año 1772, Voltaire, en un folleto sobre probabilidades afirmaría: Casi todo lo que se relaciona con la vida humana, depende de probabilidades.

Son igualmente de esta etapa las primeras investigaciones que se hicieron sobre la aplicación del cálculo diferencial a la Geometria, planteadas en el estudio de las lineas geodésicas por Euler y Juan Bernouilli. Es el famoso naturalista Conde de Buffón, el que plantea el primer problema de "probabilidad geométrica", es decir aquel en que los casos posibles y favorables dejan de ser números finitos.

Naturalmente, además de los propios matemáticos no faltaron los aficionados a la naciente teoría que publicaron diversos trabajos, la mayoría de ellos con consideraciones morales, filosóficas y hasta teológicas.

Y en éste caminar a través de la historia llegamos a la mitad del siglo XVIII. En un pueblo de Normandía nace en 1749 Pedro Simón Laplace, Marqués de Laplace, el que sería el gran matemático de la Escuela francesa del siglo XVIII. La Escuela inglesa va a sufrirun eclipse en beneficio de un auge de la Escuela continental.

Al poco tiempo de llegar a París, llama la atención de D'Alembert y por recomendación de éste entra como profesor de Matemáticas en la Escuela Militar. Sus descubrimientos en Astronomía y Mecánica celeste le han hecho pasar a la posteridad como astrónomo inmortal. Su primera obra fué publicada en 1796, seguida de otras magistrales, despues de haber presentado numerosas Memorias a la Academia de Ciencias de París. Escribe también sobre matemática pura, cálculo y ecuaciones diferenciales.

En 1774 Laplace hace una exposición muchos más sencilla que la de Bayes sobre los límites de la probabilidad en un número grande de pruebas, pero es en 1812 cuando publica su "Théorie analytique des probabilités" en la que partiendo de los resultados obtenidos en este campo desde Pascal y Fermat, trata los problemas del azar por los métodos analíticos más difíciles y de mayor categoría. Dos años más tarde publica el "Essai philosophique sur les probabilités", en el cual el genio de Laplace se muestra en todas sus dimensiones. Considera la certeza como límite ideal que el espíritu humano se esfuerza en esperar en todos los dominios de su actividad, y sus consideraciones filosóficas y profundos análisis y reflexiones colocan a éste libro a una brillante altura.

La primera de las obras, es decir la "Théorie analytique" es considerada como la mayor aportación que un solo hombre haya hecho a la *Probabilidad.* La obra se caracteriza por el libre uso que hizo del análisis matemático, pues con algoritmos adecuados y eficaces, aplica la *función generatriz* a las probabilidades y resuelve el doble problema de obtener los valores de los coeficientes por medio de la interpolación ó del conocimiento de ellos llegar a formar la función generatriz.

Se encuentra asimismo en la obra el "método de mínimos cuadrados", que aunque ya en forma empírica habían iniciado Legendre y Gauss al estudiar los problemas de las pruebas repetidas, Laplace publica la demostración exacta del principio que luego ha sido la base de toda la teoria de errores accidentales, aunque él no tuviera éxito en el logro de determinar la ley de probabilidad de ellos. Trata con gran elegancia matemática los problemas de partición, los teoremas de Bernouilli y Bayes, numerosas aplicaciones a cuestiones estadísticas y obtiene los valores de las integrales definidas que desempeñan modernamente un gran papel en la teoría de la probabilidad, de la que Laplace diria que no es "mas que el sentido común reducido al cálculo". Se han hecho también célebres sus últimas palabras: "Lo que conocemos es poca cosa, lo que ignoramos es inmenso".

Consideramos sin duda a Laplace, como el creador del Cálculo de Probabilidades.

Los años en que Laplace comenzaba a destacar, coinciden con la publicación por el también matemático francés D'Alembert de los ocho volúmenes de su obra "Opuscules Mathématiques", cuatro de los cuales están dedicados al cálculo de probabilidades y tablas de mortalidad; tuvo discusiones con muchos de sus contemporáneos y muchos aspectos de la naciente teoría fueron objeto de su crítica, en bastantes casos justificada.

Fueron contemporáneos de Laplace, Lagrange y Legendre y en la última etapa de su vida, Gauss.

José Luis Lagrange, otro de los genios matemáticos del siglo XVIII se ocupó también de la teoría de las observaciones, si bien en el aspecto concreto de la astronomía; sus estudios figuran entre otras en "Miscellanea Taurinensia" aparecida entre 1770 y 1773. Perfeccionó el cálculo con diferencias finitas, aportando ideas para extender a las ecuaciones lineales entre aquellas los métodos de integración, teoría de la que años después diria Poisson era "una de las más bellas obras de Lagrange". En 1795 y en "Lecciones elementales sobre las matemáticas" se encuentra la famosa fórmula de interpolación que lleva su nombre.

Legendre enunció el método de "mínimos cuadrados" en sus "Nouvelles Méthodes" publicado en 1806, pero a resultados análogos había llegado en 1795 el "Principe de las matemáticas" el sabio alemán Carlos Federico Gauss (1777–1855), aunque no lo publicó hasta 1809, por lo que se produjo la natural discusión sobre la prioridad. Fué Gauss también el que postuló que cuando se obtienen un número de medidas de una "magnitud" (incógnita) que sean "igualmente dignas de confianza", el valor más probable es la media aritmética de aquellas.

Tanto Gauss como Legendre, entre otros, ensancharon los campos de aplicación de la probabilidad a las rentas, seguros, tablas de mortalidad, supervivencia, etc.

Se había iniciado ya el siglo XIX con la *Teoría de Probabilidades* creada con base firme por los grandes matemáticos del siglo XVIII.

3^er^ Periodo histórico: Profundización y primeros pasos de Sistematización

La ciencia matemática, con cada vez mayor independencia y alcanzada su mayoria de edad, empieza a diversificarse en ramas con vida propia y que van a ir permitiendo con la especialización la profundización en ellas.

A finales del siglo XVIII existian evidentemente muchas publicaciones de Academias, Universidades y Sociedades Científicas, pero será en el XIX cuando aumente considerablemente el número de publicaciones, memorias y revistas específicamente matemáticas y más aun especializadas en distintas ramas.

Toda la matemática de la primera mitad del siglo XIX gira alrededor de las investigaciones del ya citado repetidamente Gauss, que en su faceta probabilística, con su método de "mínimos cuadrados" condujo a la ley normal al estudiar la distribución de los errores. Ese método es hoy un caso particular del de máxima verosimilitud, de R. Fisher. Se consideró así durante mucho tiempo que todas las distribuciones estadísticas se aproximaban a la ley normal, si se disponía de un número suficientemente grande de observaciones, bien recogidas.

Los estudios sobre la teoria combinatoria empiezan a orientarse hacia su aplicación a los determinantes y simultáneamente a separarse del cálculo de probabilidades.

Destaquemos ahora al matemático Francés Simeón-Denis Poisson, que a los 18 años publicó una memoria sobre diferencias finitas. Entre sus muchas obras figura la publicada en 1837, "Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, precedées des règles générales du Calcul des Probabilités".

Von Mises en 1928 y refiriendose a esa obra achaca a Poisson parte de la confusión creada respecto a las llamadas leyes de los grandes números, a causa precisamente de su ley, pues Poisson llama a dos proposiciones diferentes con el mismo nombre, creyendo sin duda que eran conceptos idéntidos.

Citaremos también en ésta etapa como trabajos tanto de teoria como de aplicaciones, los de Lacroix, Gompertz, Woolhouse y Fourier y sobre todo a Adolfo Quetelet, astrónomo belga a quien se considera como el fundador de la Estadística moderna, pues fué el primero que basó sus investigaciones numéricas en el cálculo de probabilidades. Entre sus numerosos trabajos destacamos su obra: "Lettres sur la théorie des probabilités" aparecida en 1846.

El mejor representante de la escuela inglesa en esa época es Augusto de Morgan, que publicó en 1838 "An Essay on probabilities and on their applications to life contingences and insurance offices", pero la mayoria de sus trabajos están reunidos en "Mathematical Papers of the Morgan".

Antonio–Augusto Cournot que vivió los primeros 76 años del siglo XIX, aunque publicó primeramente un ensayo filosófico sobre las probabilidades, tiene como obra importante "Exposition de la théorie des chances et des probabilités" editada en Paris en 1843 y en la que desarrolla una serie de consideraciones conducentes a dar una definición distinta de la clásica. Si en condiciones constantes se realizan m pruebas u observaciones y un cierto suceso se presenta n veces, llama probabilidad de ese suceso al límite a que tiende el cociente $\frac{n}{m}$ cuando m crece indefinidamente.

Deben desfilar también en ésta etapa, aunque sea citando solamente sus nombres, Bertrand, Boole, Ellis, Venn, Edgeworth, Peirce, que escriben sobre probabilidades, buscando demostraciones más sencillas de muchos teoremas, tratando el aspecto lógico y filosófico de los problemas y tambien intentando encontrar definiciones más satisfactorias de probabilidad que la clásica de Laplace, llena de frases como "igualmente probables" "dignos de la misma confianza" que levantaban críticas cada vez mayores, por el círculo vicioso que suponian.

La escuela rusa tiene en éste siglo XIX un primer y entusiasta representante: Pafnuty Tchébycheff, que nacido en Borovsk en 1821 fué un fecundo matemático, destacando en el cálculo de probabilidades y llegó a ser Profesor de la Universidad de San Petersburgo, en cuya ciudad murió en 1894. A los 24 años de edad publicó ya un tratado de Cálculo de probabilidades.

Para demostrar el teorema fundamental del límite, Tchébycheff ideó un método ingenioso, conocido como "método de los momentos" que fué más tarde completado y dado en forma más sencilla, por su discípulo Markoff.

La proposición para encontrar la distribución aproximada de la probabilidad para sumas formadas por un gran número de componentes independientes, con distribuciones casi arbitrarias, esto es, que si X_1, X_2 .... X_n [$E(X) = 0$] son variables independientes y σ es la dispersión de su suma, el cociente

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n}{\sqrt{\sigma}}$$

tiende a ser normal, o sea la función de distribución de ese cociente tiende al límite

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t} e^{1/2\, u^2} \, du$$

cuando n tiende a ∞, tuvo muchas tentativas frustradas de demostración, correspondiendo el mérito de lograrlo a Liapounoff, coronando una tarea conjunta con sus colegas rusos Tchébycheff y Markoff.

Son igualmente conocidas las desigualdades de Tchébycheff, sobre la probabilidad de una variable casual, publicada en 1867, aunque 14 años antes había enunciado su lema en Paris, Bienaymé.

El siglo XIX avanza y aunque se han logrado profundizaciones en la investigación de la teoria de la probabilidad y se han demostrado y sistematizado muchas propiedades, el progreso desde Laplace no ha sido ni mucho menos espectacular.

En los años finales del siglo pasado, un matemático francés alcanza un gran renombre: Enrique Poincaré. Había nacido en Nancy en 1854 y casi puede decirse que no hay rama de la matemática pura o aplicada a la cual no contribuyera de alguna forma, pero es igualmente conocido por sus importantes contribuciones a la astronomia y a la física y además como un gran filósofo científico. Sus primeros trabajos comenzaron a conocerse en 1880, un año despues de doctorarse en la Universidad de Paris, de cuya Facultad de Ciencias sería también Profesor,así como en la Sorbona, llegando a ser a lo largo de su vida miembro de honor de casi todas las Sociedades y Academias científicas de Europa y América.

Dió un gran impulso a la teoria de las probabilidades publicando en 1896 un tratado titulado "Calcul des Probabilités", resolviendo distintos problemas y paradojas, entre ellas la de Bertrand.

Las probabilidades geométricas que habían tenido su incipiente planteamiento en el famoso problema de la aguja, de Buffon (siglo XVIII) no alcanzan su verdadero desarrollo hasta los trabajos de Crofton en 1885. Es el primero que define para conjuntos de puntos y rectas del plano una densidad y como integral de la misma una medida con la propiedad de ser invariante respecto al grupo de los movimientos. Son continuadores Cartan, Czuber y Blaschke, entre otros. Y es Poincaré el primero que introduce la idea de considerar como elementos, sistemas de ejes coordenados rectangulares y medir conjuntos de los mismos, lo que permite medir conjuntos de figuras cualesquiera. Busca la expresión de esa medida, que luego se llamaría *médida cinemática.*

Han sido brillantes continuadores de esta rama de las probabilidades geométricas, el ya citado Blaschke, Deltheil y nuestro compatriota Luis A. Santaló. Comienza a desarrollarse la Geometria integral.

El general español Diego Ollero y Carmona publicó en 1879 un Tratado del Cálculo de Probabilidades, que ponía al alcance de los lectores en castellano, la situación de esa teoria en aquella época.

Desde los comienzos del siglo XX el *número* ha ido entrando poco a poco en todas las ciencias, y en la aplicación a éstas del método estadístico va implícita la *probabilidad.* Este método se convertía así en una matemática social, que quería analizar las reacciones y movimientos de las masas, sean éstas seres humanos ó simplemente átomos.

Varias escuelas de estadísticos y probabilísticos van a ir definiéndose en el primer tercio de nuestro siglo: la francesa, con nombres tan destacados como Lévy, Fréchet, Borel, Darmois, etc; la rusa, con Markoff, Liapounoff, Tschuproff, Kolmogoroff, Bernstein, etc; la anglosajona, con K. Pearson, Yule, "Student", R.A. Fisher, Jefreys, Keynes, Rusell, Kendall, Neyman, Nagel, Polya, etc; la escandinava, con Gram, Thiele, Charlier, Cramer, Wold, etc; la alemana con Reinchembach y Von Mises, entre otros; la italiana, con Castelnuovo, Gini, De Finetti, etc.

Son los años precursores del espectacular avance científico y técnico que va a tener lugar en el siglo XX. La Física, la Química, la Biologia, la Matemática, emprenden nuevas rutas revolucionarias, nuevos descubrimientos, nuevos enfoques y el mundo de la probabilidad y de la estadística va abriendo los caminos a las nacientes teorias y a sus inmediatas aplicaciones.

Periodo contemporáneo. Teoria de la Probabilidad sobre bases matemáticas rigurosas.

A principios del siglo la Estadística y la Teoria de la Probabilidad, como ramas de la matemática, estaban en un acusado estancamiento. En Inglaterra, por ejemplo, sólo Karl Pearson investigaba sobre estadística en un laboratorio biométrico y el tratar precisamente de introducir el método estadístico matemático en Biología le proporcionó bastantes amarguras por la oposición que encontraba.

La contribución de Pearson a la teoria estadística y del azar es realmente asombrosa, no solo teórica sino en sus múltiples aplicaciones, principalmente a los estudios de herencia, sociales y eugenésicos. Creador de la revista "Biométrika" en 1900, en unión de Weldon, sus libros, artículos, memorias y trabajos esparcidos por múltiples revistas, pasan de los 125.

Al desarrollar métodos estadísticos–matemáticos realizó grandes adelantos en el Cálculo de probabilidades y su vida la resume el Profesor argentino L. Gaspar en: Inteligencia, energía y voluntad. Murió en 1936.

Entusiasta colaborador de Pearson, fué uno de sus primeros discípulos, George Undy Yule, que igualmente ha aportado al método estadístico numerosas y fecundas ideas. Fué hasta 1940 Profesor de Estadística de la Universidad de Cambridge, y entre sus muchos trabajos citaremos la obra: "Introduction to the Theory of Statistics", cuya primera edición apareció en 1911, y después de numerosas ediciones fué completamente revisada por M.G. Kendall, publicándose como obra de ambos autores. Kendall publicó en 1946 una gran obra: "Advanced Theory of Statistics".

Otro valor firme en los estudios sobre Biología y Estadística es el Profesor de Genética, también de Cambridge, Ronald A. Fisher, fallecido en 1962 y que fué el primero que colocó sobre una base sólida la probabilidad matemática inductiva.

Junto con "Student" iniciaron el tratamiento de los problemas de inferencia estadística. Empleó ya el concepto estadístico de frecuencia relativa para la definición de probabilidad.

Entre los años 1906 y 1912 un intelectual inglés, el economista John Maynard Keynes, jugador empedernido, escribió un "Treatise on Probability", muy documentado, con numerosas especulaciones filosóficas y en el que hace una severa crítica a la clásica teoria de la probabilidad que habían elaborado primero Bernouilli y luego Laplace.

Todavia hacia los años veinte Borel escribía, que aunque podría considerarse una teoria de la probabilidad puramente lógica, sin preocuparse de las aplicaciones, ello constituiría un puro juego del espíritu, sin interés y que no merecía el nombre de Ciencia.

Son, sin embargo los trabajos de Von Mises, desde 1919, los del propio Borel en 1924 y los de Kolmogoroff en 1933 los que hicieron al fin, del Cálculo de Probabilidades, una rama de las matemáticas construida de forma lógica, a partir de unos ciertos axiomas.

David Hilbert, uno de los más preclaros matemáticos del siglo XX, natural de Gotinga, calificado como el "monstruo" de la matemática, es el creador del método axiomático por excelencia, haciendo fórmulas de todas las proposiciones matemáticas, y entonces el razonamiento deductivo se produce a partir de los axiomas fundamentales. En realidad el método axiomático es invención de la civilización griega. Gödel, genial matemático austríaco, en 1931 llegó a una mayor radicalización, asignando a cada fórmula, a cada signo, y a cada prueba de un sistema axiomático, un número, es decir aritmetizó la axiomática.

Richard Von Mises, nació en Austria en 1883 y fué Director del Instituto de Matemática Aplicada en la Universidad de Berlin, teniendo que huir a Turquia, a causa del triunfo hitleriano y de la segunda guerra mundial, para pasar por fin a la Universidad de Harvard, muriendo en 1953.

Por sus investigaciones sobre la probabilidad y su posterior desarrollo sobre el concepto de colectivo puede considerarsele como el primero que convierte la teoria de la probabilidad en ciencia matemática. Su bibliografia es vasta, siendo en "Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung", publicado en 1919 donde esboza ya su teoria frecuencialista de la probabilidad. Pero su obra destacada es "WahrscheinlischKeit, Statisk und Wahrheit" editada en 1928 y de la que existe la traducción castellana por Grimberg, "Probabilidad, Estadística y Verdad".

Un colectivo apropiado, dice, para la aplicación de la teoria de la probabilidad debe satisfacer dos condiciones (axiomas): la frecuencia relativa debe poseer límite y éste límite debe mantenerse en todas las sucesiones parciales que pueden seleccionarse de la original. En ese primer proceso de conceptualización, en los axiomas opera solo con entes abstractos, para pasar después en un proceso de desconceptualización, a la realidad.

Cramer y Wald le pusieron varias objecciones descubriendo algunos fallos de la teoria. El segundo, matemático rumano introduce subconjuntos dentro del colectivo y sistemas numerables dentro de los subconjuntos; las familias de subconjuntos, constituyen en las probabilidades geométricas los conjuntos medibles en el sentido Peano–Jordan.

Es en 1926 cuando el ya anteriormente citado Bernstein publica la primera demostración rigurosa del teorema del límite en la distribución normal de 2 dimensiones, como límite de distribuciones de probabilidad de sumas de vectores independientes, demostrando además que es válido el teorema aunque los vectores sean dependientes, si se satisfacen ciertas condiciones adicionales.

El paso definitivo lo dá en 1933, el matemático ruso Kolmogoroff, que abundando y perfeccionando las ideas de Mises parte de la propiedad aditiva de las frecuencias y establece una axiomática, que junto con las aportaciones magistrales de Fréchet es hoy casi universalmente admitida. La ley del azar queda así planteada como la regularidad de las frecuencias relativas que tienden a estabilizarse, al aumentar indefinidamente el número de pruebas.

Hemos llegado a los años en que un Einstein, considerado como el mayor sabio de todos los tiempos, crea la teoria de la relatividad, descubriendo la equivalencia de la masa y de la energía, o un John von Neumann, uno de los mejores matemáticos del mundo, fallecido en 1957, que hace aportaciones fabulosas a la teoria de los operadores funcionales, a la de los grupos, a la topología, a la cibernética, a la teoria de la información, a la teoría y práctica de los cerebros electrócnicos, a la aplicación de la teoria de juegos a los problemas económicos, etc.

Como hemos indicado con anterioridad, ésta pequeña historia de las probabilidades se complementa con el artículo de nuestro querido amigo y compañero el Profesor Gutiérrez Cabria, que figura en esta monografía y con la cual pretende el Instituto Nacional de Estadística conmemorar los XXV años de la promulgación de la Ley de Estadística, que abrió nuevos cauces y perspectivas a la investigación estadística española.

No quisiéramos terminar éste relato sin citar, aún a riesgo de olvidar alguno importante, los nombres de Profesores españoles que con gran tesón y eficacia han luchado desde hace veinticinco años por elevar constantemente la altura de la Estadística y de la Teoria de la Probabilidad en nuestra Patria: Fernández Baños, Artigas, Cansado, Ros Jimeno, Orts, Nieto de Alba, Angel Vegas, Sixto Rios, Arnáiz, Azorín, Alcaide, Béjar, García Barbancho, Gutierrez Cabria, Fernández de Trocóniz, Zoroa, Sales Vallés, Sánchez–Crespo, Pena, Torres–Ibern, Anós, etc., a los que hemos ayudado otros, en plan más modesto y en la medida de nuestras fuerzas.

La estadística tiene que estar apoyada en el cálculo de probabilidades, y éste ha llegado a un grado serio de madurez, aunque todavía suenen las palabras del lógico y matemático Bertrand Rusell, que con su característica ironía no exenta de sarcasmo decía en 1929: "la probabilidad es el concepto más importante de la ciencia moderna, especialmente porque nadie tiene la más ligera idea de su significado".

El hombre cristiano sabe que todos los acontecimientos se desarrollan de acuerdo con la voluntad y los planes de la Providencia.

El Papa Pio XII al saludar al Congreso Internacional de Ciencias Históricas, en 1955, les recordaba las palabras de San Agustín: Lo que Dios se propone, lo hace, lo lleva a cabo; aunque se realice con trabajo poco a poco, se realiza constantemente.

Dios, les decía, es en verdad, el Señor de la Historia.

B I B L I O G R A F I A

Sería extensísimo y poco útil el dar la relación de todas las obras, monografías y revistas consultadas, por lo que nos limitamos a reseñar a continuación las más importantes, por orden alfabético de sus autores.

AITKEN, M.A.— Statistical Mathematics. New York 1947.

ARLEY, N. con BUCH, R.— Introducción a la teoría de la probabilidad y de la estadística (traduc.). Madrid 1968.

ARNAIZ VELLANDO, G.— Introducción a la Estadística Teórica. Valladolid 1965.

AYUSO OREJANA, J. y GARCIA ALVAREZ, M.— Estadística.— Madrid 1946.

AZORIN POCH, F.— Curso de Muestreo y Aplicaciones. Madrid 1962.

BELL, E.T.— Historia de las Matemáticas (traduc.). Méjico 1949.

BERNSTEIN, S.N.— The Petersburg school of the theory of probability. Annals Math. 1940.

BERTRAND, J.— Calculs des probabilités. París 1889.

BOREL, E.— El azar. Descubrimiento, aplicación y valor de las leyes del azar (traduc.). Buenos Aires 1945.

BOREL, E.— Traité du calcul des probabilités et de ses Applications (15 volúmenes). París 1924—1939.

BOOLE, G.— Studies in Logic and Probability.— Londres 1952.

BOURBAKI, N.— Eléments d'Histoire de Mathématiques. París 1969.

GALOT, G.— Cours de Calcul des Probabilités. París 1964.

CANSADO, E.— Variables aleatorias. Madrid 1944.

CANSADO, E.— Curso elemental de Estadística. Madrid 1951.

CASTELNUOVO. Calcolo delle probabilitá.– Bolonia 1928.

COLOQUIO DE PROBABILIDADES (Univ. Ginebra 1937) (Frèchet, Feller, Mises, Steffenson, Wald y De Finetti). Paris 1938.

COPELAND, A.– Fundamental concepts of the Theory of Probability.– American Mathematical Monthly 1941.

CRAMER, H.– Elementos de la Teoría de Probabilidades y alguna de sus Aplicaciones (traduc.). Madrid 1958.

CZUBER, E.– Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig 1891.

DAVID, F. N.– Games, Gods, Gambling. Londres 1962.

DE FINETTI, B.– Théorie des Probablités. París 1939.

DE FINETTI, B.– La funzione vivificatrice della matematica.– Universidad de Trieste 1949.

DE FINETTI, B.– La probabilitá e il comportamiento di fronte all'incertezza. Roma 1955.

DELTHEIL.– Probabilités geométriques. París 1926.

DWASS, M.– Probability and Statistics. New York 1970.

EDGEWORTH, F.– Probability. Encyclopedia Britannica 11^{a} edic.

FELLER, W.– An introduction to Probability Theory and its Applications. New York 1950.

FISHER, R.A.– Statiscal Methods for Research Workers. Londres 1927.

GALAN.– Cálculo de probabilidades. Madrid 1923.

GARCIA ALVAREZ, M. y AYUSO, J.– Estadística.– Madrid 1946.

GARCIA ALVAREZ, M.– La lógica en el cálculo de probabilidades. Concepto subjetivo de la probabilidad. (Revista Las Ciencias). Madrid 1962.

GARCIA ALVAREZ, M.– Probabilidades contínuas (Revista Matem. Hispano-Americana). Madrid 1951.

GARCIA ESPAÑA, E y SANCHEZ–CRESPO, J.L.– Estadística descriptiva.

GARCIA RUA, J.– La Matemática: Importancia de su estudio y evolución de su didáctica (Reunión Matemáticos Españoles. Monografías del Ministerio de Educación Nacional). Madrid 1964.

G. DU PASQUIER.– Calcul des probabilités. París 1936.

GOOD, I.J.– Probability and the Weighing of Evidence. Londres 1950.

GUTIERREZ CABRIA, S.– Consideraciones en torno al concepto de probabilidad e incertidumbre (Estadística Española n^{o} 41). Madrid 1968.

HEISENBERG, W.– Los nuevos fundamentos de la Ciencia (traduc.) Madrid 1962.

HILLER. H.– Espacio. Tiempo. Materia. Infinito. (Traduc.). Madrid 1968.

HOGBEN, L.– 25.000 años de matemáticas (traduc.). Madrid–Barcelona 1957.

JEFFREYS, H.– Theory of Probability.– Oxford 1948.

KENDALL, M.– On the reconciliation of theories of probability. Biométrika 1949.

KEYNES, J.M.– A treatise on Probability. Londres 1921.

KNOPF. O.-- Cálculo de probabilidades (traduc.) Barcelona 1942

KOLMOGOROFF, A.— Foundations of the Theory of Probability. New York 1950.

LAPLACE, P.S.— Essai philosophique sur les probabilités. Paris 1921.

LEVY, P.— Calcul des Probabilités. Paris 1925.

LORIA, G.— Historia de las matemáticas (traduc.). 1942.

LOWELL, J.— An introduction to Mathematical Probability. Londres 1942.

MISES, R. von,— On the foundations of Probability and Statistics.— Annals of Mathematical Statistics. 1941.

MISES, R. von.— Probabilidad, Estadística y Verdad (traduc.) Buenos Aires 1946.

MONTIAS, H.— Descartes. París 1969.

MORGAN, A.— On the Theory of errors of observation.— Philosophical Transactions. Cambridge 1864.

NEYMAN, J.— First Course in Probability and Statistics — New York 1950.

NEWMAN, J.— Sigma. El mundo de las matemáticas (traduc. 6 vol.) Barcelona 1968.

NIETO DE ALBA, U.— Introducción a la Estadística. Madrid 1958.

OLLERO, D.— Tratado de cálculo de probabilidades. Segovia 1879.

PEARSON. Studies in the History of Statistics and Probability. Londres 1971.

PETIAN, G.— Oeuvres de Henri Poincaré. París 1956.

POINCARE, H.— Calcul des probabilités. París 1896.

PUIG ADAM, P.— Apéndice histórico (Matemáticas Bachillerato). Madrid 1945.

REY PASTOR, J. PI CALLEJA y TREJO.— Análisis matemático. Buenos Aires 1959.

REY PASTOR, J.— Evolución de la Matemática en la edad contemporánea. Madrid 1916.

RIOS, S.— Métodos Estadísticos (2 vol.) Madrid 1961.

RIOS, S.— Progresos recientes en la Teoria y Aplicaciones de la Estadística. (Conferencia) Madrid 1951.

SANCHEZ—CRESPO, J.L. y GARCIA ESPAÑA, E.— Estadística descriptiva.

SAUVY, A.— Límites de la vida humana. Barcelona 1964.

SKOLEM, Th.— Sobre la naturaleza del razonamiento matemático. C.S.I.C. Madrid 1952.

THIELE. Theorie of the Observations. Londres 1903.

TODHUNTER, I.-- A History of the Mathematical Theory of Probability. New Yok 1949.

USPENSKY, J.V.— Matemáticas de las Probabilidades (Traduc) Buenos Aires 1947.

YULE, G y KENDALL, M.G.— Introducción a la Estadística Matemática (trad. de Ros Jimeno). Madrid 1954.