ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
Vol. 52, núm. 175, 2010, págs. 469 a 499

La distribución beta como esquema de ponderación en medidas de desigualdad(*)

por
LUIS JOSÉ IMEDIO OLMEDO
ELENA BÁRCENA MARTÍN
y
ENCARNACIÓN M. PARRADO GALLARDO
Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría, 68)
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Málaga

RESUMEN

En este trabajo se introduce y analiza, desde el punto de vista estadístico y normativo, una clase de medidas de desigualdad. Esta clase generaliza y engloba, como casos particulares, diferentes familias de índices ya conocidas en la literatura. Sus elementos se construyen ponderando la desigualdad local evaluada mediante la curva de Bonferroni. Se utilizan como pesos las funciones de densidad de las distribuciones beta sobre [0,1]. Como consecuencia de los diferentes esquemas de ponderación asociados a los índices, en ellos subyacen juicios de valor muy dispares en la medición de la desigualdad y del bienestar. En esta clase de índices es posible seleccionar elementos que centren su atención en un tramo determinado de la escala de rentas. Se realiza una ilustración empírica utilizando como fuente la Encuesta de Condiciones de Vida 2008.

(*) Agradecemos el apoyo recibido del Instituto de Estudios Fiscales, Ministerio de Economía y Hacienda.

Palabras clave: Curva de Lorenz, curva de Bonferroni, distribuciones de preferencias, aversión a la desigualdad, transferencias.

Clasificación AMS: 90A30.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se introduce y analiza una clase de medidas de desigualdad, cuyos elementos pueden expresarse como medias ponderadas de la desigualdad local existente en cada percentil de renta. Se utilizan como ponderaciones las funciones de densidad de las distribuciones beta definidas sobre el intervalo [0, 1], dependientes de dos parámetros reales positivos. Al variar estos parámetros las formas de las ponderaciones son muy variadas, por lo que generan actitudes muy diferentes en la valoración de la desigualdad y del bienestar asociados a una distribución de rentas. Ello da lugar a un conjunto o clase de índices que presentan propiedades comunes y un claro paralelismo formal, pero que al mismo tiempo difieren y se complementan en el ámbito normativo.

A esta clase pertenecen índices de uso habitual, como los de Gini (1914) y Bonferroni (1930) e incluye, como casos particulares, familias ya conocidas en la literatura, como los Gini generalizados (Kakwani (1980), Yitzhaki (1983)) o las propuestas más recientemente en Aaberge (2000, 2007) e Imedio y otros (2008, 2010). En los índices de las familias citadas las ponderaciones de la desigualdad local tienen un comportamiento monótono a lo largo de la distribución, de manera que asignan el mayor peso a uno de sus extremos. En la clase que proponemos las ponderaciones no son, necesariamente, monótonas. Pueden alcanzar su valor máximo o mínimo en cualquier percentil. Ello permite seleccionar medidas de desigualdad que sean más o menos sensibles a los cambios que se puedan producir en cualquier tramo de la distribución. Esta posibilidad de elección es, a nuestro juicio, una de las ventajas de nuestra propuesta.

Los aspectos normativos se estudian utilizando el enfoque de Yaari (1987, 1988), basado en la consideración de las distribuciones de preferencias sociales. Este enfoque para relacionar desigualdad y bienestar es más general que el clásico AKS (Atkinson (1970), Kolm (1976), Sen (1973)), y facilita la comparación del grado de aversión a la desigualdad(1), o preferencia por la igualdad, que incorporan los índices y, en algunos casos, permite su ordenación según este criterio. A la clase

(1) Un índice presenta aversión a la desigualdad si verifica el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton. Es decir, si tiene lugar una transferencia de renta desde un individuo hacia otro más pobre, sin que varíe la ordenación relativa entre ambos (transferencia progresiva), el valor del índice disminuye.

propuesta pertenecen familias cuyos elementos presentan una aversión creciente (resp. decreciente) a la desigualdad que tiende hacia la aversión máxima o leximin rawlsiano(2) (resp. indiferencia). Las distribuciones de preferencias facilitan también el análisis del comportamiento de los índices al considerar principios de transferencias más exigentes que el de Pigou-Dalton (PTPD), tales como el Principio de Sensibilidad Posicional de las Transferencias (PSPT) o el Principio de Transferencias Decrecientes (PTD).

El trabajo sigue el esquema siguiente. Esta introducción incluye, a continuación, el marco analítico junto a las definiciones y principales propiedades de las curvas de Lorenz y de Bonferroni. En la sección segunda se define la clase de medidas de desigualdad que proponemos y expresiones equivalentes de las mismas, indicando los pesos utilizados para ponderar la desigualdad local a lo largo de la distribución. Se identifican índices concretos y familias de índices ya conocidos en la literatura como casos particulares. Por otra parte, se pone de manifiesto que la clase propuesta permite la selección de medidas de desigualdad que centren su atención en cualquier tramo prefijado de la distribución. Los aspectos normativos se abordan en la sección tercera. A través de las distribuciones de preferencias asociadas a los índices se establecen comparaciones entre ellos según su grado de aversión a la desigualdad, y se estudia su respuesta frente a Principios de Transferencias sensibles a la posición de los individuos involucrados en ellas. En la sección cuarta, utilizando como fuente la Encuesta de Condiciones de Vida (ECV) de 2008 para España, se incluye una ilustración empírica del grado de sensibilidad de los índices y de sus correspondientes funciones de bienestar social a los cambios que puedan producirse en la distribución, según el rango de rentas en el que ese cambio tenga mayor incidencia. En la última sección figuran las conclusiones y algunos comentarios.

1.1 Marco de análisis. Las curvas de Lorenz y de Bonferroni(3)

La renta está representada por la variable aleatoria X, cuyo dominio es la semirrecta real positiva, $R^{+} = [0, \infty)$, F su función de distribución(4) y

(2) Centra su interés en la situación de los individuos con menor nivel de renta. Entre dos distribuciones prefiere aquella cuya renta mínima es mayor o, en caso de igualdad, aquella en que la renta mínima presente menor frecuencia. Este enfoque deriva de la teoría sobre la justicia social defendida por Rawls (1971).

(3) El contenido de este epígrafe puede verse de forma detallada en Imedio y otros (2009).

(4) En ocasiones, para facilitar la obtención de resultados teóricos, se supondrá la continuidad de F. En tal caso, $f(x) = F'(x)$ es la función de densidad de la distribución.

$\mu = E(X) = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$ su renta media. La curva de Lorenz de F, $L(\cdot)$, se define mediante:

$$L : [0,\ 1] \to [0,\ 1], \quad L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^x s dF(s) = \frac{1}{\mu}\int_0^p F^{-1}(t) dt, \quad 0 \le p \le 1,$$

siendo $F^{-1}(\cdot)$ la inversa por la izquierda de F, $F^{-1}(0) = 0$. Para cada $p = F(x)$, $L(p)$ es la proporción del volumen total de renta que acumula el conjunto de unidades con renta menor o igual que x. Es evidente que $L(p) \le p,\ 0 \le p \le 1$.

Una sencilla transformación de la curva de Lorenz da lugar a una interpretación alternativa de la información contenida en ella. Bonferroni (1930), al definir su índice de desigualdad, considera la curva(5):

$$B : \ [0,\ 1] \to [0,\ 1], \quad B(p) = \begin{cases} \dfrac{L(p)}{p}, & 0 < p \le 1, \\ 0\ , & p = 0. \end{cases}$$

Se verifica $B(p) \le 1$, $0 \le p \le 1$. Si $p=F(x)$ es la proporción de población cuya renta es menor o igual que x, B(p) es el cociente entre la renta media de ese grupo y la media de la población.

La curva de Bonferroni, al igual que la de Lorenz, proporciona una representación gráfica de la desigualdad y aunque cada una de estas curvas queda determinada por la otra, la información que ofrecen es diferente. Los valores de L(p) son participaciones en la renta total, mientras que los de B(p) se refieren a niveles relativos de renta.

Cuando cada una de las curvas anteriores, L(p) o B(p), se compara, en un percentil $x=F^{-1}(p)$, $0 \le p \le 1$, con su curva correspondiente en caso de equidistribución, se obtiene una valoración de la desigualdad acumulada hasta ese percentil. Si la curva utilizada es la de Lorenz

$$D_L(p) = p - L(p), \quad 0 \le p = F(x) \le 1, \qquad [1]$$

(5) En la siguiente expresión, si la renta mínima es $x_0 > 0$ entonces $B(0) = \lim_{x \to 0^+} (L(p)/p) = L'(0^+) = x_0/\mu$.

es la diferencia entre la participación que tendría el conjunto de individuos con renta menor o igual que x, en el volumen total de renta, si la distribución fuese igualitaria, y su participación real en la distribución considerada.

Si se utiliza la curva de Bonferroni, la función

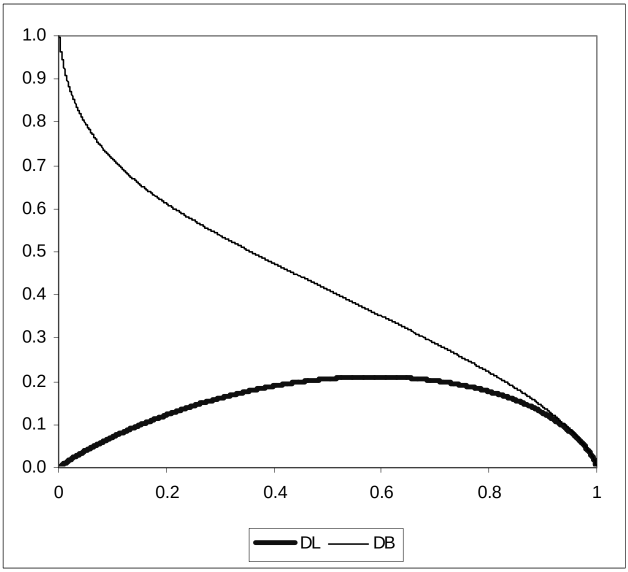
$$D_B(p) = 1 - B(p) = \frac{\mu - E(X | X \leq x)}{\mu}, \quad 0 \leq p = F(x) \leq 1 \qquad [2]$$

mide la diferencia relativa entre la renta media de la población y la renta media de quienes están situados por debajo del nivel de renta x.

En la Figura 1 se representan las funciones D_L y D_B para la distribución de la renta disponible en España para 2007, ECV (2008).

Figura 1

FUNCIONES D_L Y D_B PARA LA DISTRIBUCIÓN DE LA RENTA DISPONIBLE EN ESPAÑA EN 2007



Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008

Aunque las funciones L(p) y B(p) se determinan mutuamente, la selección de una u otra para medir la desigualdad local, introduce juicios de valor al asignar más o menos importancia a la desigualdad existente en los diferentes tramos de la distribución. $D_L(p)$ y $D_B(p)$ valoran en mayor medida la desigualdad local en la parte intermedia y en la cola izquierda de la distribución, respectivamente.

La clase de índices de desigualdad que se introduce en la sección siguiente, principal objetivo de este trabajo, se obtiene ponderando, a lo largo de la distribución, la desigualdad local evaluada mediante la función $D_B(p) = D_L(p)/p$.

2. LA CLASE β DE MEDIDAS DE DESIGUALDAD

El planteamiento genérico de nuestra propuesta para la construcción de medidas de desigualdad es el siguiente. Para una variable como la descrita en el apartado anterior, sea $D:[0,\ 1] \to R$ una función en la que para cada $p \in [0,1]$, D(p) mide la desigualdad acumulada hasta el percentil p y sea $\omega:[0,\ 1] \to R_0^+$ una función peso, no negativa y tal que $\int_0^1 \omega(p)dp = \int_0^\infty \omega(F(x))dF(x) = 1$.

Es evidente que el número real

$$I_{D,\omega} = \int_0^1 D(p)\,\omega(p)dp$$

mide la desigualdad de la distribución F. Su valor depende de las funciones D y ω, que incorporan, respectivamente, una forma de evaluar la desigualdad local acumulada y un criterio para promediar dicha desigualdad a lo largo de la distribución. Este procedimiento para generar índices de desigualdad subyace, de forma implícita, en los trabajos de Amato (1948) y Piccolo (1991).

El enfoque anterior para la definición "constructiva" de medidas de desigualdad se concreta, en nuestra propuesta, del siguiente modo. La desigualdad local se mide mediante la función $D_B(p) = 1 - B(p) = D_L(p)/p$, definida en [2], y se utilizan como ponderaciones las funciones de densidad de las distribuciones beta en [0, 1]. Es decir:

$$\omega_{(s,t)}:[0,\ 1] \to R_0^+,\ \ \omega_{(s,t)}(p) = (B(s,t))^{-1}\, p^{s-1}(1-p)^{t-1},\ s > 0,\ t > 0, \qquad [3]$$

siendo B(s,t) la función beta de Euler.

Lo anterior conduce a las siguientes definiciones.

Definición 1. Para cada $(s,t) \in R^{+} \times R^{+}$, el índice de desigualdad $I(s,t)$ viene dado por:

$$I(s,t) = \int_0^1 D_B(p)\,\omega_{(s,t)}(p)\,dp = (B(s,t))^{-1} \int_0^1 (1 - B(p))\,p^{s-1}(1-p)^{t-1} dp\,. \qquad [4]$$

Definición 2. Al conjunto biparamétrico $\beta = \{I(s,t)\}_{s,t>0}$, le llamaremos clase beta de medidas de desigualdad.

Es inmediato que para cada $(s,t) \in R^{+} \times R^{+}$, $I(s,t)$ es un índice relativo de desigualdad(6), siendo $I(s,t) = 0$ si existe equidistribución e $I(s,t) = 1$ si la concentración es máxima. A la vez, $\mu I(s,t)$ es una medida absoluta(7), por lo que $I(s,t)$ es un índice de compromiso(8).

La clase β a través de los pesos $\omega_{(s,t)}(\cdot)$ incorpora un conjunto muy amplio de criterios con relación a la importancia que el evaluador puede asignar a la desigualdad local acumulada en los diferentes tramos de la distribución. Estos criterios son consecuencia de la amplia variedad de formas de la función $\omega_{(s,t)}(\cdot)$, según los distintos valores de los parámetros(9) s y t.

Cuando la desigualdad local se mide a partir de las diferencias de Lorenz, $D_L(p) = p - L(p) = pD_B(p)$, una expresión equivalente de los índices es:

$$I(s,t) = (B(s,t))^{-1} \int_0^1 (p - L(p))\,p^{s-2}(1-p)^{t-1} dp\,. \qquad [5]$$

(6) La curva de Lorenz y, por lo tanto, la de Bonferroni son invariantes frente a cambios de escala.

(7) Es invariante frente a cambios de origen. Basta tener en cuenta que si se considera la variable X+a, a>0 ó $-\mu$<a<0, su curva de Bonferroni asociada es: $B_{X+a}(p) = (1/\mu_{X+a})(\mu B_X(p) + a)$.

Con ello resulta $D_{B,X+a}(p) = 1 - B_{X+a}(p) = (\mu/\mu + a)(1 - B_X(p)) = (\mu/\mu + a)D_{B,X}(p)$.

Por lo tanto se cumple $(\mu + a)I_{X+a}(s,t) = \mu I_X(s,t)$.

(8) Un índice relativo, I, es de compromiso si μI es un índice absoluto. Un índice absoluto, J, es de compromiso si J/μ es un índice relativo (Blackorby y Donaldson, 1978).

(9) Para esta cuestión puede verse Casas y Santos (1995), donde también figuran las representaciones gráficas de algunas de estas funciones. También son muy ilustrativas las gráficas de este tipo que se presentan en G. Barbancho (1992).

Sin embargo, I(s,t) no es realmente una media ponderada de $D_L(p)$ ya que al utilizarse como pesos las funciones

$$\pi_{(s,t)}:[0,\ 1]\rightarrow R^{+},\ \ \pi_{(s,t)}(p)=\frac{\omega_{(s,t)}(p)}{p}=(B(s,t))^{-1}p^{s-2}(1-p)^{t-1},\ s>0,\ t>0\ ,\quad [6]$$

se tiene $\int_0^1 \pi_{(s,t)}(p)\,dp=(s+t-1)/(s-1)\neq 1.$

La igualdad [5] prueba que los elementos de β son medidas lineales de desigualdad en el sentido de Mehran(10) (1976). Es decir, pueden expresarse a partir de las desviaciones de las rentas respecto a la renta media, $F^{-1}(p)-\mu$, $0\leq p\leq 1$, en la forma

$$I(s,t)=\frac{1}{\mu}\int_0^1 (F^{-1}(p)-\mu)\Pi_{(s,t)}(p)\,dp\ ,$$

siendo

$$\Pi'_{(s,t)}(p)=\pi_{(s.t)}(p),\ 0<p<1,\ ,\ \int_0^1 \Pi_{(s,t)}(p)\,dp=0\,.$$

La última condición equivale, para índices normalizados, a $\Pi_{(s,t)}(1)=1$.

La siguiente proposición resume los resultados anteriores.

Proposición 1. La clase β es un subconjunto de las medidas lineales de Mehran. Sus elementos son índices relativos de compromiso.

(10) Se expresan como $I=\frac{1}{\mu}\int_0^1 (F^{-1}(p)-\mu)k(p)\,dp=\int_0^1 (p-L(p))\,dk(p)$, siendo k(p) una función que no depende de la función de distribución F y, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que cumple la condición de normalización $\int_0^1 k(p)\,dp=0$. Además, si k(p) es continua, no decreciente y k(1)=1, entonces 0≤I≤1, donde I=0 representa la perfecta igualdad e I=1 la desigualdad extrema. Este es el caso de los índices de β.

2.1 Identificación de índices y de familias ya conocidas

La clase β contiene no sólo índices conocidos, sino también familias de medidas de desigualdad habituales en la literatura. Para $(s,t)=(1,1)$ y $(s,t)=(2,1)$ se obtienen los coeficientes de Bonferroni (1930), B, y de Gini (1914), G, respectivamente:

$$I(1,1)=\int_0^1 (1-B(p))\,dp = B\,, \qquad [7]$$

$$I(2,1)=2\int_0^1 (p-L(p))\,dp = G\,. \qquad [8]$$

Para s=2 resulta la familia de los índices de Gini Generalizados ((Kakwani (1980), Yitzhaki (1983)), $\gamma=\{I(2,t)\}_{t>0}$, siendo

$$I(2,t)=t(t+1)\int_0^1 (1-B(p))\,p(1-p)^{t-1}dp = t(t+1)\int_0^1 (p-L(p))(1-p)^{t-1}dp =$$

$$=1-t(t+1)\int_0^1 (1-p)^{t-1}L(p)\,dp\,,\ t>0\,. \qquad [9]$$

Si t=1 y $s\in N=\{1,2,...\}$ es un entero positivo se obtiene la familia numerable $\alpha=\{I(s,1)\}_{s\in N}$ definida en Aaberge(11) (2007). A esta familia pertenecen B y G. Sus elementos se expresan como:

$$I(s,1)=s\int_0^1 (1-B(p))\,p^{s-1}\,dp = s\int_0^1 (p-L(p))\,p^{s-2}\,dp = 1-s\int_0^1 p^{s-2}L(p)\,dp,\ s>0\,. \qquad [10]$$

(11) En Aaberge (2000) se introduce, a partir de los momentos respecto al origen de la curva de Lorenz, una familia numerable de índices de desigualdad, λ. Los elementos de esta familia son los de α excepto el índice de Bonferroni. Esto es, $\lambda=\alpha-\{B\}$.

Otra familia de interés es la que resulta para s=1. Sus elementos son:

$$I(1,t) = t\int_0^1 (1-B(p))(1-p)^{t-1}\,dp = t\int_0^1 (p-L(p))\,p^{-1}(1-p)^{t-1}\,dp =$$

$$= 1 - t\int_0^1 (1-p)^{t-1} B(p)\,dp,\ t>0\,. \qquad [11]$$

A ella también pertenece B. En Imedio y otros (2008, 2010) se introduce y analiza la familia numerable $\delta=\{I(1,t)\}_{t\in N}$, comparándola desde el punto de vista normativo con α y con $\gamma_{\mathbf{N}}=\{I(2,t)\}_{t\in N}$, restricción de γ a los valores enteros positivos de su parámetro.

En los índices de las familias α y δ tanto las diferencias $D_B(p)$ como $D_L(p)$ se ponderan de forma monótona a lo largo de la distribución. Lo mismo sucede al obtener los elementos de γ a partir de las diferencias de Lorenz. Sin embargo, al considerar la clase β es posible seleccionar índices cuyo grado de sensibilidad sea más acentuado en un tramo prefijado de la distribución e incluso en un percentil concreto. Por ejemplo, si el evaluador quiere centrar su atención en ambos extremos de la distribución, asignando menos peso a la desigualdad que acumulan las rentas intermedias, debe seleccionar un índice $I(s,t)$ con $(s,\ t)\in(0,\ 1)\times(0,\ 1)$. En este supuesto, al aumentar t (resp. s), fijado el valor de s (resp. t) el valor mínimo de la ponderación se alcanza para valores de p cada vez más próximos a 1 (resp. 0). En particular, si $s=t$ ese mínimo se presenta en $p=0{,}5$. Si, por el contrario, el evaluador quiere utilizar un índice más sensible a los cambios que puedan producirse en la parte intermedia de la distribución, debe considerar una medida en la que $(s,\ t)\in(1,\ +\infty)\times(1,\ +\infty)$. Ahora, fijado un valor de s (resp. t) la ponderación máxima se asigna a un punto tanto más próximo a p=0 (resp. p=1) cuanto mayor sea t (resp. s). En particular, si $s=t$ la ponderación es campaniforme y simétrica respecto $p=0{,}5$, donde alcanza su valor máximo. Por lo tanto, los parámetros s y t incorporan diferentes posturas en la valoración de la desigualdad.

2.2 La subclase β_N

Cuando los parámetros s y t son ambos enteros positivos, $(s,t)\in N\times N$, se obtiene el conjunto de índices que designaremos por β_N, $\beta_N\subset\beta$. Aunque el cardinal de β_N es de orden menor(12) que el de β, el conjunto de criterios que sus elementos incorporan en la evaluación de la desigualdad sigue siendo muy amplio. Entre

(12) Se pasa de la clase β, cuyo cardinal es el del conjunto de los números reales, a β_N que es numerable.

sus elementos permanecen los índices clásicos, B y G, familias que los generalizan, junto a índices que no son de uso habitual pero que tienen un interés propio. La clase β_N se representa en el siguiente esquema triangular.

Esquema 1

LA SUBCLASE β_N

I(1,1)

I(1,2) I(2,1)

I(1,3) I(2,2) I(3,1)

I(1,4) I(2,3) I(3,2) I(4,1)

....

I(1,s+t-1) I(2,s+t-2) .... I(s+t-2,2) I(s+t-1,1)

....

Interés rentas bajas **Interés rentas altas**

El vértice del triángulo es el índice de Bonferroni, B=I(1,1). En el lado derecho figura la familia $\alpha=\{I(s,1)\}_{s\in N}$. En el lado izquierdo del triángulo cuyo vértice es el coeficiente de Gini, G=I(2,1), están los índices $\gamma_N=\{I(2,t)\}_{t\in N}$, que son los Gini generalizados con parámetro entero positivo. Los elementos de la familia $\delta=\{I(1,t)\}_{t\in N}$ se sitúan en el lado izquierdo del triángulo.

Otras familias de interés pertenecientes a β_N son aquellas cuyos elementos son los índices situados en cada una de las filas del esquema triangular. En cada una de estas familias (finitas) la suma de los parámetros de sus índices es constante. En la fila n−1, n≥2, figuran los n−1 índices $\{I(s,t)\}_{s+t=n}$:

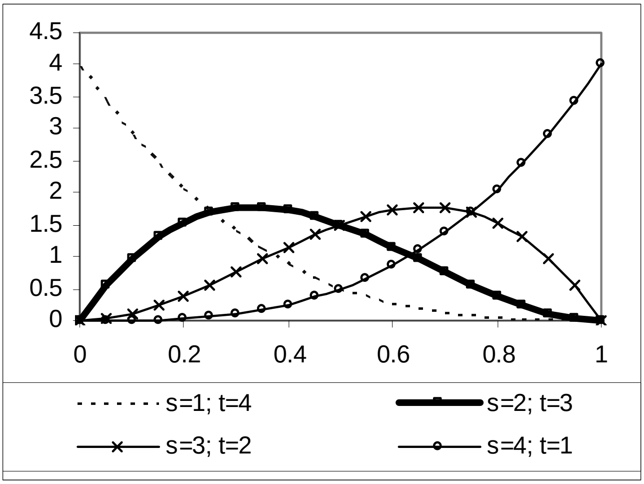
$$I(1,\ n-1),\ \ I(2,\ n-2),\ ......,\ \ I(n-2,\ 2),\ \ I(n-1,\ 1)\,.$$

El peso que en cada índice pondera la desigualdad local acumulada, valorada mediante $D_B(p)$,

$$\omega_{(s,n-s)}(p)=\frac{(n-1)!}{(s-1)!(n-s-1)!}p^{s-1}(1-p)^{n-s-1},$$

es estrictamente decreciente para s=1, campaniforme con un máximo en $p=(s-1)/n-2$, $2\le s\le n-2$ y estrictamente creciente si s=n−1. Por lo tanto, fijada la suma $s+t$, al aumentar el parámetro s se asigna una ponderación cada vez menor a la desigualdad existente en las rentas bajas, ponderando más la desigualdad en las rentas intermedias y altas. En el siguiente gráfico se representan las ponderaciones de los cuatro índices $\{I(s,t)\}_{s+t=5}$.

Figura 2
PONDERACIONES DE LOS ÍNDICES $\{I(s,t)\}_{s+t=5}$



Una propiedad interesante que, en cierto modo, contribuye a reforzar el significado del índice de Bonferroni como elemento "generador" de la familia β_N es la siguiente.

Proposición 2. Para cada $n \in N$, $n \geq 2$, la media aritmética de los índices $\{I(s,t)\}_{s+t=n}$ es el índice de Bonferroni. Es decir, B es la media de cada fila del esquema triangular:

$$\sum_{s=1}^{n-1} I(s, n-s) = (n-1)B\ .$$

Demostración. A partir de los valores de la función beta cuando sus parámetros son enteros positivos y aplicando la fórmula del binomio de Newton, se tiene:

$$\sum_{s=1}^{n-1}(B(s,n-s))^{-1}p^{s-1}(1-p)^{n-s-1}=(n-1)\sum_{s=1}^{n-1}\binom{n-2}{s-1}p^{s-1}(1-p)^{n-s-1}=$$
$$=(n-1)\sum_{s=0}^{n-2}\binom{n-2}{s}p^{s}(1-p)^{n-s-2}=(n-1)\left[p+(1-p)\right]^{n-2}=n-1\,.$$

De la igualdad anterior y de [4], resulta:

$$\sum_{s=1}^{n-1}I(s,n-s)=\sum_{s=1}^{n-1}(B(s,n-s))^{-1}\int_0^1(1-B(p))p^{s-1}(1-p)^{n-s-1}\,dp=$$
$$=(n-1)\int_0^1(1-B(p))\,dp=(n-1)B\,.$$

Una propiedad semejante a la anterior la satisface el índice de Gini, G=I(2,1), cuando en cada fila del esquema triangular se suprime el índice correspondiente a s=1.

Proposición 3. Para cada $n\in N$, n≥3, el índice de Gini es una media ponderada de los índices $\{I(s,\ t)\}_{s\geq 2,s+t=n}$: I(2,n–2), I(3, n–3), ..., I(n–1,1). Se satisface:

$$\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{s=1}^{n-1}(s-1)I(s,n-s)=G\,,\qquad \frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{s=1}^{n-1}(s-1)=1\,.$$

Demostración. Es análoga a la anterior. En este caso, se tiene:

$$\frac{1}{(n-1)(n-2)}\sum_{s=2}^{n-1}(s-1)(B(s,n-s))^{-1}p^{s-2}(1-p)^{n-s-1}=\sum_{s=2}^{n-1}\binom{n-3}{s-1}p^{s-2}(1-p)^{n-s-1}=$$
$$=\sum_{s=0}^{n-3}\binom{n-3}{s}p^{s}(1-p)^{n-s-3}=\left[p+(1-p)\right]^{n-3}=1\,.$$

Teniendo en cuenta la expresión [5], resulta:

$$\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{s=1}^{n-1}(s-1)I(s,n-s)=2\int_0^1(p-L(p))\,dp=G,$$

siendo

$$\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{s=1}^{n-1}(s-1)=1 .$$

Por lo tanto, el índice B es una media simple de los índices de cada fila, mientras que G es una media ponderada de esos mismos índices, excepto el correspondiente a s=1. En esa media las ponderaciones crecen al hacerlo el parámetro s, de manera que ponderan más los índices que centran su atención en las rentas altas.

Las proposiciones anteriores prueban la existencia de relaciones algebraicas entre los elementos de β_N. Esta determinación mutua(13) desde el punto de vista del cálculo es independiente de los aspectos éticos que subyacen en los índices de las distintas familias.

En la sección siguiente se abordan algunos de los aspectos normativos que incorporan los elementos de β.

3. FUNDAMENTACIÓN NORMATIVA

La relación entre desigualdad y bienestar se establece mediante el enfoque de Yaari (1987, 1988). Si F es la distribución de la renta y $\phi:[0,\ 1]\rightarrow R$ es una función de distribución(14) que representa las preferencias sociales, la función de bienestar social de Yaari (FBSY) viene dada por

$$W_\phi(F)=\int_{R^+} x\, d\phi(F(x))=\int_0^1 F^{-1}(p)\, d\phi(p)=\int_0^1 \phi'(p)F^{-1}(p)\, dp .$$

La expresión anterior indica que W_ϕ es aditiva y lineal en las rentas, ponderándolas según la posición que asignan a los individuos en la distribución. El peso correspondiente a la renta del individuo con rango p, 0<p<1, es $\phi'(p)\geq 0$. Yaari (1988) demuestra que $W_\phi(F)$ presenta aversión a la desigualdad si, y sólo si, $\phi'(p)$ es decreciente, lo que equivale a la concavidad de ϕ.

(13) En Imedio y otros (2010) se demuestra que a partir de los elementos de una cualquiera de las familias α, δ o γ_N, se pueden obtener los de las restantes.

(14) La supondremos de clase C^2, dos veces derivable con continuidad. Cuando sea necesario en resultados posteriores, se admitirá la existencia de derivadas de orden superior.

Si μ es la media de la distribución F y L(p) su curva de Lorenz, la FBSY se puede expresar como una función de bienestar asociada a una medida lineal de desigualdad. Se verifica

$$W_\phi(F) = \mu\left[1 - I_\phi(F)\right],$$

siendo

$$I_\phi(F) = \int_0^1 (p - L(p))\,\pi_\phi(p)\,dp\;, \quad \pi_\phi(p) = -\phi''(p)\;, \qquad [12]$$

lo que proporciona una relación explícita entre la distribución de preferencias y la ponderación de las diferencias de Lorenz.

La expresión $\mu\left[1 - I_\phi(F)\right]$ es, según el enfoque de Blackorby y Donaldson (1978), la renta equivalente igualmente distribuida(15). En tal caso $\mu I_\phi(F)$ es la pérdida de bienestar debida a la desigualdad.

Si $\Im_\beta = \{\phi_{(s,t)}\}_{s,t>0}$ es la familia de las distribuciones de preferencias asociadas a los elementos de β, teniendo en cuenta las expresiones [6] y [12], se tiene:

$$\phi''_{(s,t)}(p) = -\pi_{(s,t)}(p) = -(B(s,t))^{-1}\,p^{s-2}\,(1-p)^{t-1},\; s>0,\; t>0\;. \qquad [13]$$

Las funciones de $\Im_\beta$ son estrictamente cóncavas, por lo que en todos los índices de la clase β, así como en sus respectivas FBSY, subyace una preferencia (aversión) por la igualdad (desigualdad). Es decir, satisfacen el PTPD. Esta postura común presenta, sin embargo, distintos grados de intensidad según el índice.

Aunque para demostrar algunas propiedades normativas de los índices no sea siempre necesario el conocimiento explícito de sus distribuciones de preferencias, la obtención de éstas es conveniente para abordar ciertas cuestiones. Por ejemplo, la ordenación de un conjunto de índices según su grado de aversión a la desigualdad, equivale a la ordenación de sus respectivas funciones de preferencia según su grado de concavidad.

(15) Es el nivel de renta que asignado por igual a todos los individuos de la población proporcionaría idéntico bienestar, según la FBS especificada, que la distribución existente. Este concepto es la base del enfoque AKS (Atkinson (1970), Kolm (1976), Sen (1973)) para relacionar bienestar y desigualdad.

3.1 Distribuciones de preferencias

Las expresiones de las funciones $\phi_{(s,t)}$ cuando $(s,t) \in N \times N$ se calculan fácilmente a partir de [13] integrando dos veces. Las constantes de integración se determinan al imponer que las distribuciones de preferencias pasen por los puntos (0, 0) y (1, 1). Con ello, resulta:

$$\phi_{(1,t)}(p) = \begin{cases} p - p\ln(p) \;\;,\;\; t = 1 \\ t\left[p - p\ln(p) + \sum_{i=1}^{t-1} \frac{(-1)^i}{i}\binom{t-1}{i}\left(p - \frac{p^{i+1}}{i+1}\right)\right] \;\;,\;\; t \geq 2 \;. \end{cases}$$

$$\phi_{(s,t)}(p) = (B(s,t))^{-1} \sum_{i=0}^{t-1} \frac{(-1)^i}{s+i-1}\binom{t-1}{i}\left(p - \frac{p^{s+i}}{s+i}\right), s \geq 2, t \geq 1 \;.$$

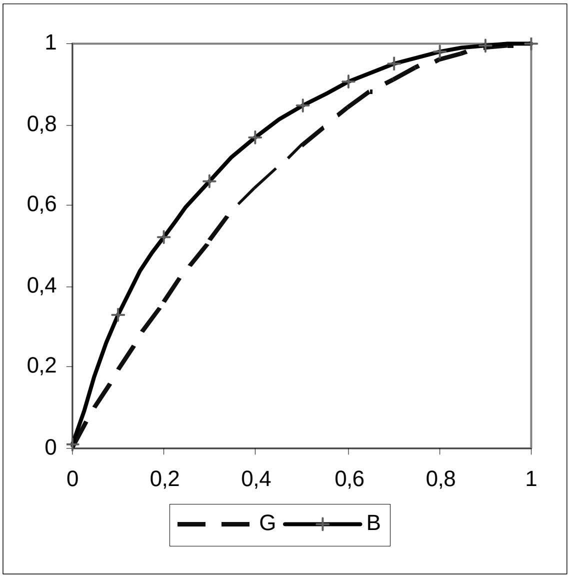
En particular, las distribuciones de preferencias de los índices de Bonferroni y de Gini, son:

$$\phi_B(p) = \phi_{(1,1)}(p) = p - p\ln(p),\; 0 < p \leq 1,\; \phi_{(1,1)}(0) = 0 \;.$$

$$\phi_G(p) = \phi_{(2,\,1)}(p) = 2p - p^2,\; 0 \leq p \leq 1.$$

Ambas funciones son estrictamente crecientes y estrictamente cóncavas en el intervalo (0,1), pero el grado de concavidad de ϕ_B es mayor que el de ϕ_G, como muestra la Figura 3.

Figura 3
DISTRIBUCIONES DE PREFERENCIAS DE LOS ÍNDICES DE GINI Y DE BONFERRONI



Ello implica que B presenta mayor aversión a la desigualdad que G, lo que incide en las propiedades normativas de ambos índices(16); por ejemplo, en su distinto comportamiento frente a principios de transferencias más exigentes que el de Pigou-Dalton.

El tipo de relación existente entre B y G respecto a su grado de preferencia por la igualdad, se extiende a los índices de las familias γ_N, α y δ. En Imedio y otros (2008, 2010) se demuestra que las funciones de $\Im_{\gamma_N} = \{\phi_{(2,t)}\}_{t\in N}$, $\Im_{\alpha} = \{\phi_{(s,1)}\}_{s\in N}$ y $\Im_{\delta} = \{\phi_{(1,t)}\}_{t\in N}$ están ordenadas según su grado de concavidad. Al aumentar el valor de sus respectivos parámetros, la concavidad de las funciones de $\Im_{\gamma_N}$ y de $\Im_{\delta}$ aumenta, mientras que para las de $\Im_{\alpha}$ sucede lo contrario. De hecho, las funciones de $\Im_{\delta}$ y de $\Im_{\gamma_N}$ convergen hacia la función de máxima concavidad en [0,1], constante e igual a la unidad, excepto en p=0. Es decir:

(16) En Imedio (2007) se realiza una comparación, estadística y normativa, entre ambos índices.

$$\lim_{t\to+\infty} \phi_{(1,t)}(p) = \lim_{t\to+\infty} \phi_{(2,t)}(p) = \begin{cases} 0 \ , \ p = 0 \ , \\ 1 \ , \ 0 < p \leq 1 \ . \end{cases}$$

Por otra parte, las funciones de $\Im_\alpha$ convergen hacia la identidad en el intervalo $[0,1]$:

$$\lim_{s\to+\infty} \phi_{(s,1)}(p) = p \ , \ \ 0 \leq p \leq 1,$$

cuya concavidad es nula.

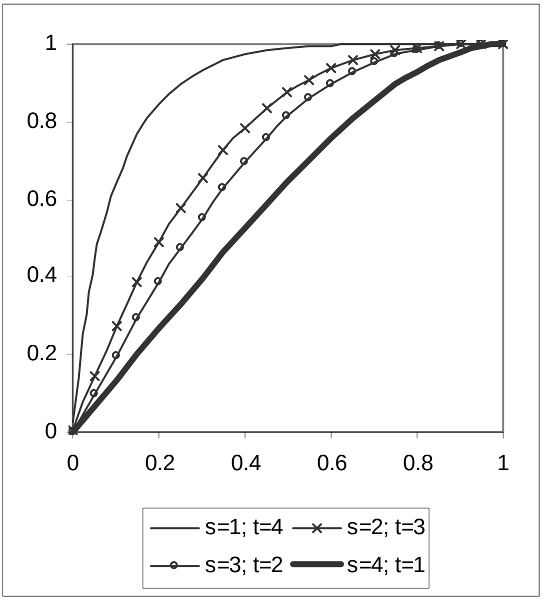
En consecuencia, con los elementos de β queda cubierto todo el espectro de la aversión a la desigualdad, desde la aversión máxima (máxima concavidad o leximin rawlsiano) a la indiferencia (concavidad nula).

En el esquema triangular que representa a β_N, tomando como punto de partida su vértice, I(1,1), al desplazarnos por el lado derecho, familia α, los índices presentan una aversión decreciente a la desigualdad y asignan un peso cada vez menor a las rentas bajas. Sucede lo contrario si a partir de I(1,1) (resp. I(2,1)) recorremos el lado izquierdo del triángulo, familia δ (resp. familia γ_N). En este caso, los índices incorporan una aversión creciente a la desigualdad, centrando cada vez más su interés en la cola izquierda de la distribución.

En cada una de las filas del esquema triangular la suma de los dos parámetros de sus índices es constante, $s + t = n$, n≥2. Si n≥3, al recorrer cualquier fila de izquierda a derecha, se inicia con un elemento de δ y termina con un índice de la familia α. Al avanzar dentro de la fila, en el sentido señalado, el grado de aversión hacia la desigualdad disminuye. Como ejemplo, en la Figura 5 se representan las cuatro funciones de preferencias correspondientes a los índices situados en la cuarta fila del esquema triangular, $\{I(s,t)\}_{s+t=5}$.

Figura 4

DISTRIBUCIONES DE PREFERENCIAS DE LOS ÍNDICES $\{I(s,t)\}_{s+t=5}$



El gráfico anterior muestra que la distribución de preferencias correspondiente al índice I(1,4) presenta el mayor grado de concavidad. Ese grado, y con él la preferencia por la igualdad, disminuye sucesivamente al pasar a los índices I(2,3), I(3,2) e I(4,1). Este comportamiento se repite en los índices situados en cada una de las filas del esquema, si bien al ir aumentando s+t el número de índices es mayor, su grado de aversión a la desigualdad (o la concavidad de sus respectivas funciones de preferencia) cubre un espectro más amplio y el cambio, en ese aspecto, entre índices consecutivos es más suave.

3.2 Principios de Transferencias

Los índices de β satisfacen el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton (PTPD) dada la concavidad de sus respectivas distribuciones de preferencias. Al estudiar este tipo de medidas es habitual analizar si satisfacen criterios redistributivos más exigentes. Una idea obvia consiste en contemplar principios según los cuales el efecto de una transferencia progresiva, sobre la disminución de la desigualdad, sea mayor en la medida en que los individuos involucrados estén situados en la parte inferior de la distribución. Kolm (1976) y Mehran (1976) proponen dos versiones alternativas de un principio de esas características. Según el Principio de Transferencias Decrecientes (PTD), una transferencia progresiva entre dos individuos, con una diferencia de renta dada, ha de implicar una mayor reducción (incremento) del índice (bienestar) cuanto menores sean las rentas de esos individuos. Una versión distinta del PTD es la que proporciona el Principio de Sensibilidad Posicional de la Transferencia (PSPT), según el cual, para una diferencia de rangos dada entre quienes tiene lugar la transferencia, el efecto es mayor en la medida en que tenga lugar entre individuos situados en la parte inferior de la distribución. Estos principios incorporan posturas análogas ante las transferencias, al ser relevante para ambos la situación que los individuos ocupen en la distribución, pero mientras que para el PTD lo esencial es la diferencia de rentas entre el donante y el receptor, para el PSPT lo es la proporción de individuos situados entre ellos.

Formalmente, si I es una medida de desigualdad, sea $\Delta I_p(\delta, s)$ el cambio en I al realizar una transferencia de cuantía δ desde un individuo con renta $F^{-1}(p)$ hacia otro con renta $F^{-1}(p-s)$ sin alterar sus rangos. Según el PTPD es $\Delta I_p(\delta, s) < 0$. Sea

$$\Delta I_{q,p}(\delta, s) = \Delta I_p(\delta, s) - \Delta I_q(\delta, s) .$$

Análogamente, si $\Delta I_x(\delta, z)$ representa el cambio en I resultante de una transferencia δ desde una persona con renta x a otra con renta x–z, es $\Delta I_x(\delta, z) < 0$ si se cumple el PTPD. Sea

$$\Delta I_{y,x}(\delta, z) = \Delta I_x(\delta, z) - \Delta I_y(\delta, z) .$$

Definición 3.

(i) El índice I satisface el PSPT si, y sólo si $(q < p) \Rightarrow \Delta_{q,p}(\delta, s) > 0$.

(ii) El índice I satisface el PTD si, y sólo si $(y < x) \Rightarrow \Delta_{y,x}(\delta, z) > 0$.

En la proposición siguiente se caracteriza el cumplimiento de ambos principios.

Proposición 4(17). Sea F una distribución de renta con media μ e $I_\phi(F)$ un índice de desigualdad cuya distribución de preferencias, ϕ, es cóncava. Se verifica

(i) (Mehran (1976), Zoli (1999)) El índice $I_\phi(F)$ satisface el PSPT si, y sólo si, $\phi'''(p) > 0$.

(17) La demostración de este resultado puede encontrarse en Imedio y Bárcena (2007).

(ii) (Aaberge, 2000) El índice $I_\phi(F)$ satisface el PTD si, y sólo si, $\phi''(F(x))F'(x)$ es estrictamente creciente para x>0. Ello equivale a la condición

$$-\frac{\phi'''(F(x))}{\phi''(F(x))} > \frac{F''(x)}{(F'(x))^2} \quad , \quad x > 0\,. \qquad [14]$$

La proposición anterior prueba que una medida de desigualdad cumple, o no, el PSPT según las propiedades de su distribución de preferencias, ϕ, con independencia de la distribución de rentas sobre la que se aplique. Se trata, por lo tanto, de una característica del índice. No sucede lo mismo con el PTD. El que $I_\phi(F)$ lo satisfaga no sólo depende de las propiedades de su distribución de preferencias, sino también de la forma de la distribución de la renta. La expresión [14] proporciona la relación que ha de existir entre ambas distribuciones. Es decir, dada ϕ, el índice $I_\phi(F)$ verifica el PTD únicamente para una determinada clase de distribuciones de renta, cuya extensión depende del grado de aversión hacia la desigualdad que presente ϕ.

El comportamiento de los elementos de $\boldsymbol{\beta}$ respecto a ambos principios se obtiene al aplicar la proposición anterior a sus respectivas distribuciones de preferencias.

Corolario 1.

a) Los elementos de $\beta = \{I(s,t)\}_{s,t>0}$ satisfacen el PSPT si, y sólo si, se verifica(18):

$$A(s,t,p) = \left[(s+t-3)p - s + 2\right] > 0, \;\; 0 < p < 1\,. \qquad [15]$$

b) Si F es la función de distribución sobre la que se aplica el índice I(s,t) se satisface el PTD si, y sólo si:

$$\frac{(s+t-3)F(x) - s + 2}{F(x)(1-F(x))} > \frac{F''(x)}{(F'(x))^2} \quad , \quad x > 0\,. \qquad [16]$$

Según lo anterior el índice de Bonferroni, B=I(1,1), satisface el PSPT, ya que A(1,1,p)=1–p>0, 0<p<1. Esto no sucede con el índice de Gini, G=I(2,1), al ser A(2,1,p)=0, 0<p<1. Fijada una diferencia de rangos, el efecto sobre G de cualquier transferencia progresiva es el mismo con independencia de la parte de la distribución en que tenga lugar. Otros índices presentan un comportamiento contrario al del PSPT; sobre ellos una transferencia progresiva reduce la desigualdad, pero, fijada

(18) El signo de la tercera derivada de la distribución de preferencias coincide con el de la expresión A(s,t,p). Es evidente que este signo puede ser o no constante en (0,1), según los valores de s y de t.

una diferencia de rangos, su incidencia en dicha reducción, es mayor en la medida en que involucre a individuos situados en la parte superior de la distribución. Es el caso de I(3,1), al ser A(3,1,p)=p–1<0, 0<p<1. Hay índices cuyo comportamiento respecto a este principio no es uniforme. Por ejemplo, para I(3,3) es $A(3,3,p)=3p-1$, de manera que este índice satisface el PSPT si p>1/3 y se comporta de forma contraria para 0<p<1/3.

En el esquema triangular mediante el que representamos la subclase β_N, los elementos situados en una cualquiera de sus filas, $\{I(s,n-s)\}_{1\le s\le n-1}$, n≥2, pueden presentar diferentes comportamientos respecto al PSPT. Al desplazarnos hacia la derecha, dentro de una fila, los índices pasan de satisfacer este principio para I(1,n–1) e I(2,n–2), a satisfacerlo solamente en un subintervalo de (0,1) hasta llegar a cumplir lo contrario al PSPT en el caso de I(n–1,1).

Respecto al PTD, conviene observar que si un índice presenta aversión a la desigualdad ($\phi''(p)<0$) y la derivada tercera de su distribución de preferencias es no negativa ($\phi'''(p)\ge 0$), cumplirá el PTD para todas aquellas distribuciones de renta que sean cóncavas ($F''(x)<0$), ya que entonces se verifica la condición [14]. La concavidad de F es, en estos casos, una condición suficiente.

En particular, para el índice de Gini la condición [16] se reduce a $F''(x)<0$, por lo que verifica el PTD sobre distribuciones estrictamente cóncavas. Para el índice de Bonferroni, B=I(1,1), la condición [16] es

$$(1/F(x)) > (F''(x))/(F'(x))^2 \ , \ \ x>0,$$

lo que equivale a la concavidad estricta de ln(F(x)), exigencia más débil que la concavidad de F(x). Por lo tanto, el conjunto de distribuciones de renta para las que B cumple el PTD contiene estrictamente al conjunto de distribuciones para las que G satisface ese principio. Es decir, si Ω_I representa el conjunto de las distribuciones sobre las que el índice I satisface el PTD, se verifica $\Omega_G \subset \Omega_B$. En general, al aumentar (resp. disminuir) el grado de aversión a la desigualdad de los índices, es más (resp. menos) extenso el conjunto de las distribuciones para las que dichos índices satisfacen(19) el PTD.

(19) El comportamiento de los índices de las familias γ_N, α y δ respecto al PSPT y al PTD se aborda con detalle en Imedio y otros (2008, 2010).

4. ILUSTRACIÓN EMPÍRICA

En esta sección se pone de manifiesto empíricamente el distinto grado de aversión a la desigualdad de los índices de la familia β y de sus correspondientes FBS; esto es, sus diferentes respuestas a los cambios que puedan producirse en la distribución, según el rango de rentas en el que ese cambio tenga mayor incidencia.

Se utiliza como fuente la Encuesta de Condiciones de Vida(20) (ECV) en el año 2008 para España. Se consideran tres variables:

- La renta disponible de los hogares (X_1).

- La renta disponible menos las transferencias sociales, excepto las prestaciones por vejez y supervivencia (renta antes de transferencias, X_2).

- La renta disponible más los impuestos directos (renta antes de impuestos, X_3).

Como un mismo ingreso puede dar lugar a diferentes niveles de vida en función del tamaño y composición del hogar, los ingresos se han ajustado mediante la escala de equivalencia de la OCDE modificada(21). Con ello se obtiene la variable objeto de estudio, renta equivalente del hogar, y_i, definida como la renta del hogar, x_i, dividida por el número de miembros equivalentes, $m(n_i)$; esto es, $y_i = x_i / m(n_i)$.

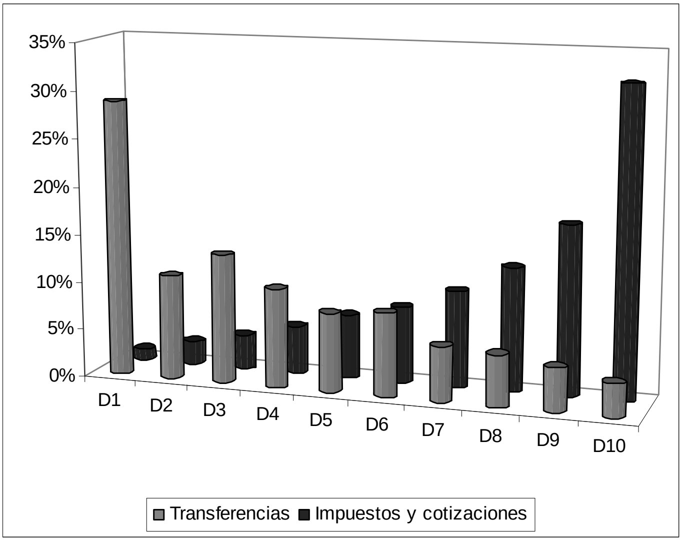
Las transferencias sociales van dirigidas, en mayor medida, a la parte baja de la distribución. Por su parte, los impuestos directos proceden en mayor porcentaje de las rentas altas. La Figura 5 recoge las distribuciones porcentuales de ambas partidas, por decilas.

(20) En terminología inglesa "European Statistics on Income and Living Conditions" (EU-SILC). Es una fuente de referencia sobre estadísticas comparativas de la distribución de ingresos y la exclusión social en el ámbito europeo.

(21) Esta escala asigna valor 1 al primer adulto del hogar, 0,5 a los adultos restantes y 0,3 a cada menor de 14 años.

Figura 5

DISTRIBUCIÓN DE LAS TRANSFERENCIAS Y DE LOS IMPUESTOS DIRECTOS POR DECILAS



Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008

A continuación se evalúa el efecto de ambas partidas sobre los índices de la forma $\{I(s,t)\}_{2\leq s+t\leq 6}$ y sobre sus correspondientes FBS, $\{W_{\phi(s,t)}\}_{2\leq s+t\leq 6}$. Se trata, por lo tanto de los elementos situados en las cinco primeras filas del esquema triangular que representa a β_N.

En la Tabla 1 figuran los valores de cada uno de los índices para las distribuciones X_1, X_2 y X_3, respectivamente. Debajo de ellos se indican los porcentajes de variación al pasar de la distribución X_2 a X_1 y de X_3 a X_1, en ese orden.

Tabla 1

VALORES DE LOS ÍNDICES DE $\mathbf{B_N}$ PARA X_1, X_2 Y X_3. PORCENTAJES DE VARIACIÓN

				I(1,1) 0,414, 0,447, 0,437 **-7,3%** **-5,3%**				
			I(1,2) 0,534, 0,578, 0,559 **-7,6%** **-4,3%**		I(2,1) 0,294, 0,315, 0,316 **-6,7%** **-6,9%**			
		I(1,3) 0,597, 0,648, 0,621 **-7,8%** **-3,8%**		I(2,2) 0,409, 0,440, 0,435 **-7,1%** **-6,0%**		I(3,1) 0,237, 0,253, 0,256 **-6,5%** **-7,6%**		
	I(1,4) 0,638, 0,692, 0,660 **-7,9%** **-3,4%**		I(2,3) 0,475, 0,513, 0,502 **-7,3%** **-5,3%**		I(3,2) 0,342, 0,367, 0,367 **-6,7%** **-6,8%**		I(4,1) 0,202, 0,215, 0,219 **-6,3%** **-8,1%**	
I(1,5) 0,667, 0,725, 0,689 **-7,9%** **-3,1%**		I(2,4) 0,520, 0,562, 0,547 **-7,5%** **-4,9%**		I(3,3) 0,408, 0,438, 0,435 **-6,9%** **-6,2%**		I(4,2) 0,299, 0,320, 0,323 **-6,5%** **-7,3%**		I(5,1) 0,177, 0,189, 0,194 **-6,2%** **-8,4%**

Tanto las transferencias como el pago de los impuestos directos tienen un efecto igualador, reducen la desigualdad. Sin embargo, los porcentajes de disminución de los índices varían sensiblemente en función de la forma en que cada una de esas partidas incide en los distintos tramos de la distribución. En el caso de las transferencias, dirigidas en mayor medida a las rentas bajas, experimentan mayores reducciones los índices que centran su atención en la cola izquierda de la distribución. Al ir desplazándonos en diagonal hacia la derecha y hacia abajo en el esquema triangular cada vez es mayor la ponderación que se asigna a la desigualdad local existente en la parte alta, siendo menor la reducción de los índices. Lo mismo, y por la misma razón, sucede al desplazarnos dentro de cada fila de izquierda a derecha.

La recaudación de los impuestos directos se concentra, en mayor medida, en la cola derecha de la distribución. Su efecto igualador al pasar a la distribución de renta disponible es más acusado si se evalúa mediante índices que presenten una mayor sensibilidad a los cambios que se producen en las rentas altas. En este caso, las disminuciones porcentuales de los índices al desplazarnos en el esquema que representa a β_N siguen un comportamiento contrario al descrito para las transferencias.

Lo anterior muestra que una misma partida de renta puede considerase que tiene mucho o poco efecto sobre la desigualdad dependiendo de dónde sitúe el evaluador social su interés. De este modo, si el evaluador social tiene mayor interés por las rentas bajas y elige I(1,5) para medir la desigualdad, resulta que las transferencias permiten reducir la desigualdad más que los impuestos directos (un 7,9% frente a un 3,1%). Por el contrario, si centra su interés en las rentas altas y realiza la medición con I(5,1) considerará que los impuestos son más efectivos en la reducción de la desigualdad (un 8,4% frente a un 6,2%). En definitiva, al medir la desigualdad es esencial tener en cuenta las características del índice utilizado. En este sentido, β permite la introducción de matices muy variados en la medición.

Este tipo de consideraciones se traslada a las FBS asociadas a los índices. En la Tabla 2 figuran los valores de las funciones $\{W_{\phi(s,t)}\}_{2\leq s+t\leq 6}$ correspondientes a las distribuciones X_1, X_2 y X_3. Debajo se indican los porcentajes de variación al pasar de la distribución X_2 a X_1 y de X_3 a X_1. Las rentas medias se expresan en euros(22).

(22) $\mu_{X_1} = 15199$, $\mu_{X_2} = 14455$, $\mu_{X_3} = 17893$.

Tabla 2

VALORES DEL BIENESTAR PARA LAS FBS ASOCIADAS A LOS ÍNDICES DE $\mathbf{B_N}$ APLICADAS A X_1, X_2 Y X_3. PORCENTAJES DE VARIACIÓN

				W(1,1) 8.901, 7.995, 10.068 **11,3% -11,6%**				
			W(1,2) 7.075, 6.096, 7.896 **16,1% -10,4%**		W(2,1) 10.727, 9.895, 12.241 **8,4% -12,4%**			
		W(1,3) 6.120, 5.095, 6.786 **20,1% -9,8%**		W(2,2) 8.985, 8.097, 10.114 **11,0% -11,2%**		W(3,1) 11.598, 10.794, 13.304 **7,4% -12,8%**		
	W(1,4) 5.501, 4.445, 6.078 **23,8% -9,5%**		W(2,3) 7.976, 7.045, 8.910 **13,2% -10,5%**		W(3,2) 9.994, 9.148, 11.319 **9,2% -11,7%**		W(4,1) 12.132, 11.343, 13.966 **7,0% -13,1%**	
W(1,5) 5.053, 3.975, 5.571 **27,1% -9,3%**		W(2,4) 7.291, 6.325, 8.105 **15,3% -10,0%**		W(3,3) 9.004, 8.125, 10.118 **10,8% -11,0%**		W(4,2) 10.654, 9.830, 12.119 **8,4% -12,1%**		W(5,1) 12.502, 11.721, 14.427 **6,7% -13,3%**

La inclusión de las transferencias, por su efecto sobre la renta media, supone un aumento en el bienestar. El mayor incremento porcentual tiene lugar cuando la evaluación se realiza con una FBS que asigna mayor ponderación a las rentas bajas. Disminuye, siguiendo la misma pauta que los índices correspondientes, al realizar la medición con funciones que incorporen menor aversión a la desigualdad. El pago de los impuestos directos produce el efecto contrario, reduce el bienestar, como consecuencia de la disminución de la renta media. La reducción mayor se presenta en las FBS asociadas a índices que ponderan más la desigualdad local en las rentas altas, ya que es en estas rentas donde los impuestos tienen mayor incidencia.

CONCLUSIONES

Los índices de la clase β incorporan criterios muy variados en la medición de la desigualdad. A la vez, comparten un origen homogéneo y presentan características comunes, lo que proporciona un tratamiento unificado de diferentes familias de este tipo existentes en la literatura. Una de las principales ventajas de esta clase es que permite seleccionar entre sus elementos índices que centren su atención en una zona prefijada e incluso en un percentil concreto de la distribución.

Lo que distingue a cada elemento de β es su forma de ponderar la desigualdad local que se acumula hasta cada percentil de renta. Las características de esa ponderación determinan las del índice: tramo de la distribución en el que centra su interés, grado de aversión a la desigualdad, respuesta a las transferencias, según la diferencia de rango, o de renta, existente entre los individuos involucrados y de la ubicación de éstos en la distribución.

La subclase β_N, que resulta cuando los dos parámetros de los índices de β son enteros positivos, contiene familias de interés mediante las que se puede recorrer todo el espectro del grado de aversión a la desigualdad que puede incorporar un índice, así como seleccionar medidas con comportamientos muy diferentes en relación al PSPT o al PTD. Los índices situados en cada una de las filas del esquema triangular que representa a β_N constituyen familias finitas del tipo $\{I(s,n-s)\}_{1 \leq s \leq n-1}$, $n \geq 2$, en las que también varía el grado de aversión a la desigualdad, sin llegar a los casos extremos, así como sus respuestas a los principios de transferencias analizados. En cada una de estas filas al desplazarnos de izquierda a derecha varía el grado de sensibilidad de los índices a los cambios que puedan tener lugar en las rentas bajas, intermedias y altas.

Es evidente que la efectividad real de una medida de política económica encaminada, por ejemplo, a incidir de forma preferente sobre la desigualdad, o el bienestar, en un determinado rango de rentas, no depende del índice que se seleccione para realizar la valoración. Con todo, es interesante tener la posibilidad de utilizar índices que presenten una mayor sensibilidad a los cambios que puedan producirse precisamente en el rango seleccionado. Ello permite una mejor valoración cuantitativa de la medida a adoptar y minimiza el riesgo de que, al realizar simulaciones, su posible efecto pase desapercibido.

En las aplicaciones, la selección de un conjunto reducido de elementos de β permite medir la desigualdad según diferentes criterios distributivos, en función de las preferencias del evaluador social y de la naturaleza de cada caso empírico. Podría suceder que al tratar de ordenar un conjunto de distribuciones de renta se obtuviesen ordenaciones diferentes según el índice. Este resultado sería tan revelador, teniendo en cuenta las características de cada índice, como el proporcionado por los casos robustos.

REFERENCIAS

AABERGE, R. (2000). «Characterizations of Lorenz curves and income distributions», *Social Choice and Welfare,* 17, 639-653.

AABERGE, R. (2007). «Gini's nuclear family», *Journal of Economic Inequality*, 5-3, 305-322.

AMATO, V. (1948). «Sulla misura della concentrazione dei redditi», *Rivista Italiana di Economia, Demografia e Statistica*, vol. 2, 509-529.

ATKINSON, A. B. (1970). «On the measurement of inequality», *Journal of Economic Theory*, 2, 244-263.

BLACKORBY, C. Y DONALDSON, D. (1978). «Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare», *Journal of Economic Theory*, 18, 59-80.

BONFERRONI, C. E. (1930). «Elementi di statistica generale», Libreria Seber, Firenze.

CASAS SÁNCHEZ, J. M. Y SANTOS PEÑAS, J. (1995). «Introducción a la Estadística para Economía y Administración de Empresas», Centro de Estudios Ramón Areces.

EUROSTAT (2010). «Cross-sectional EUSILC UDB 2008 microdata», Release 01-03-10, European Commission, Eurostat.

G. BARBANCHO, A. (1992). «Estadística teórica básica», Ariel Economía.

GINI, C. (1914). «Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri», *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, 73, 1203-1248.

IMEDIO OLMEDO, L. J. (2007). «Algunas consideraciones sobre el índice de Bonferroni», *Estadística Española*, Vol. 49, 164, 103-135.

IMEDIO OLMEDO, L. J. Y BÁRCENA MARTÍN, E. (2007). «Dos familias numerables de medidas de desigualdad», *Investigaciones Económicas*, XXX(1), 191-217.

IMEDIO OLMEDO, L. J., BÁRCENA MARTÍN, E. Y PARRADO GALLARDO, E. M. (2008). «Familias de índices de desigualdad que caracterizan la distribución de la renta», *XV Encuentro de Economía Pública*. Salamanca, 2008.

IMEDIO OLMEDO, L. J., BÁRCENA MARTÍN, E. Y PARRADO GALLARDO, E. M. (2009). «Tres medidas complementarias de desigualdad», *Estadística Española*, Vol. 51, 171, 363-394.

IMEDIO OLMEDO, L. J., BÁRCENA MARTÍN, E. Y PARRADO GALLARDO, E. M. (2010). «A class of Bonferroni Inequality Indices», *Journal of Public Economic Theory*, pendiente de publicación.

KAKWANI, N. C. (1980). «On a class of poverty measures», *Econometrica*, 48, 437-446.

KOLM, S. C. (1976). «Unequal inequalities, I, II», *Journal of Economic Theory*, 12:416-442; 13: 82-111.

MEHRAN, F. (1976). «Linear measures of inequality», *Econometrica*, 44: 805-809.

PICCOLO, D. (1991). «Risultati asintotici per misure di variabilità sull'insieme dei numeri interi», *Quaderni di Statistica ad Econometria*, vol. XIII: 91-107.

RAWLS, J. (1971). «A theory of justice», Harvard University Press, Cambridge.

SEN, A. K. (1973). «On economic inequality», Clarendon Press, Oxford.

YAARI, M. E. (1987). «The dual theory of choice under risk», *Econometrica* 55, 99-115.

YAARI, M. E. (1988). «A controversial proposal concerning inequality measurement», *Journal of Economic Theory* ,44: 381-397.

YITZHAKI, S. (1983). «On an extension of the Gini inequality index», *International Economic Review*, 24: 617-628.

ZOLI, C. (1999). «Intersecting generalized Lorenz curves and the Gini index», *Social Choice and Welfare*, 16: 183-196.

THE BETA DISTRIBUTION AS A WEIGHTING SCHEME IN INEQUALITY MEASURES

SUMMARY

This paper introduces and analyses, both normatively and statistically, a class of inequality measures. This class generalizes and comprises different well-known families of inequality measures as particular cases. The elements of this new class are obtained by weighting local inequality evaluated through the Bonferroni curve. The weights are the density functions of the beta distributions over [0,1]. As a consequence of the different weighting schemes attached to the indexes, the elements of the class introduce very dissimilar value judgements in the measurement of inequality and welfare. In this class of inequality measures is possible to select elements that focus on a particular part of the income distribution. An empirical illustration based on the European Statistic on Income and Living Condition for 2008 is also provided.

Keywords: Lorenz curve, Bonferroni curve, preferences distributions, inequality aversion, transfers.

AMS Classification: 90A30.