El problema de selección de la cartera con multiatributos

por SIXTO RIOS-INSUA
Departamento de Estadística
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

1. El llamado por Markowitz (1959) «problema de selección de la cartera», ha sido tratado profusamente en la literatura estadístico-matemática-económica. Algunas decenas de libros y centenares de memorias le han sido dedicadas, desde que el problema fue tratado de una manera concreta por Markowitz.

El punto inicial es siempre el siguiente: consideremos n tipos de acciones, obligaciones, bonos, etc., A_1, A_2, ..., A_n, y supongamos que se invierte una unidad del capital que posee el inversor en las proporciones t_1, t_2, ..., t_n en las mismas, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \qquad t_i \geq 0 \qquad [1]$$

El problema clásico de la cartera trata de, fijado un intervalo de tiempo, hacer máxima la renta que se puede obtener del capital determinando para ello los t_i. Corrientemente se considera la rentabilidad de cada papel A_i, como una variable aleatoria ξ_i, y se trata de determinar la n-tupla.

$$(t_1, \ldots, t_n)$$

tal que

$$\xi = \sum_{1}^{n} t_i \xi_i \qquad [2]$$

sea máxima con las condiciones [1].

La idea de emplear multicriterios en este problema puede considerarse que empieza ya en Markowitz al utilizar la media y la varianza como criterios de selección *, que ha sido seguido de otros que han utilizado también el tercer momento (Arditti y Levy, 1977), etc.

Pero en todos estos trabajos se utiliza como único atributo la rentabilidad, variable aleatoria unidimensional que, se dice, condensa todas las consecuencias del comportamiento del mercado y de cada empresa. Sin embargo, en los trabajos tradicionales, más o menos empíricos, se insiste en que no es ése el único atributo que un inversor tiene o debe tener en cuenta al tratar de formar su cartera.

Es bien conocido que los analistas financieros utilizan otras técnicas en el análisis fundamental de las acciones que se centran en el análisis de las relaciones de los estados financieros, entrevistas con los empresarios, previsiones industriales, perspectivas económicas, etc. **.

Nos ha parecido, en consecuencia, interesante considerar un nuevo punto de vista en el problema de la cartera tratando de integrar en un modelo matemático no un solo atributo como en el clásico, sino varios (como liquidez, oferta de papel, demanda, etc.), que reflejan mejor las preferencias del decisor que la consideración única de la rentabilidad.

Es nuestro objetivo estudiar detenidamente más tarde distintos índices posibles que permitan considerar adecuadamente dichos atributos. Por ejemplo, la liquidez es un atributo muy importante para un inversor, ya que indica la probabilidad de poder recuperar en un cierto momento todo o parte del capital invertido. Una, entre otras maneras posibles de utilizar dicho atributo, sería considerando la variable aleatoria cantidad de un valor en pesetas contratadas en un día.

2. Consideremos por sencillez dos atributos (ξ_i, η_i) para cada papel A_i (análogamente se podrían considerar k atributos), el problema de la cartera puede plantearse dentro del marco de la teoría de la utilidad en la forma siguiente: determinar el vector $t = (t_1, \ldots, t_n)$ tal que la variable

$$(\xi, \eta) = \left(\sum_1^n t_i \xi_i, \sum_1^n t_i \eta_i \right) \qquad [3]$$

(*) Ver Rios, S. (1976).

(**) Ver p. e. Francis J. C. y S. H. Archer (1977).

nos dé una esperanza de utilidad máxima, es decir, tal que

$$U[\xi, \eta] = U\left[\sum_1^n t_i\xi_i, \sum_1^n t_i\eta_i\right] = E[u(x, y)] = \\ = \iint u(x, y)\, dF(x, y) \qquad [4]$$

sea máxima en t, con las condiciones

$$\sum_1^n t_i = 1; \quad t_i \geq 0 \qquad [5]$$

supuesta conocida la función de distribución conjunta de

$$(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots, \xi_n, \eta_n) \qquad [6]$$

y la función de utilidad $u(x, y)$.

Es claro que el conocimiento de la función de distribución de la variable [6] permitirá conocer la de la variable [3], y de aquí se pasará a la maximización de la integral [4] con las condiciones [5].

Una situación que es ciertamente interesante, es la de considerar una utilidad cuadrática, que fue estudiada por Markowitz (1959) en el caso de monocriterio, y que en el caso de dos variables conduce a la situación siguiente: supongamos que la función de utilidad es cuadrática en las dos variables, es decir, tiene la forma

$$u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey$$

y en virtud de [3], la expresión [4] queda en este caso particular en la forma

$$U[\xi, \eta] = E[u(x, y)] = E\left[a\left(\sum_1^n t_i x_i\right)^2 + \right.$$

$$\left. + b\left(\sum_1^n t_i x_i\right)\left(\sum_1^n t_j y_j\right) + c\left(\sum_1^n t_j y_j\right)^2\right] +$$

$$+ E\left[d\left(\sum_1^n t_i x_i\right) + c\left(\sum_1^n t_j y_j\right)\right] = a\left(\sum_1^n t_i^2 E[x_i^2] + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{i<j}^n t_i t_j E[x_i x_j]\right) + b\left(\sum_{ij}^n t_i t_j E[x_i y_j]\right) +$$

$$+ c\left(\sum_1^n t_j^2 E[y_j^2] + 2\sum_{i<j}^n t_i t_j E[y_i y_j]\right) +$$

$$+ d\left(\sum_1^n t_i E[x_i]\right) + e\left(\sum_1^n t_i E[y_i]\right)$$

y el problema será hacer máxima esta forma cuadrática en la t_i, con las condiciones [5]. Como se ve, los coeficientes de la forma cuadrática obtenida, se expresan mediante los dos primeros momentos de algunas distribuciones marginales de [6].

Este planteamiento se generaliza al caso de k atributos sin más que considerar en vez de la variable [3], la

$$(\xi, \eta, \ldots, \zeta) = \left(\sum_1^n t_i\xi_i, \sum_1^n t_i\eta_i, \ldots, \sum_1^n t_i\zeta_i\right)$$

y la esperanza de utilidad análoga a [4], y con restricciones análogas a [5].

Otros planteamientos posibles del problema serían considerar una utilidad vectorial:

$$u(x, y) = [a(x, y), b(x, y)]$$

y en particular separable:

$$u(x, y) = [a(x), b(y)]$$

y como caso más particular cuadrática en cada variable, es decir,

$$u(x, y) = [x - \lambda_1 x^2, y - \lambda_2 y^2]$$

que conduciría a determinar el máximo de la función

$$\begin{aligned} U[\xi, \eta] = [&E[\xi] - \lambda_1\{V[\xi] + E[\xi]^2\}; \\ &E[\eta] - \lambda_2\{V[\eta] + E[\eta]^2\}] \end{aligned} \qquad [7]$$

sujeta a las restricciones [5], y como se ve cada una de las componentes de la función [7] es una función cuadrática en las t_i.

Estos planteamientos se trasladan sin dificultad al caso de k atributos.

Por otra parte, el caso de utilidad vectorial cuadrática separable se relaciona de un modo natural con un planteamiento análogo al que hace Markowitz (1959) para mono-criterios, y en el que tiene en cuenta la variabilidad de las rentas, e introduce como medida del riesgo que corre el inversor la varianza de la cartera.

Supongamos el caso de dos atributos, y que las variables ξ y η que los describen son independientes. Se define una cartera caracterizada por la media

$$E = \{E[\xi], E[\eta]\}$$

y la varianza

$$V = \{V[\xi], V[\eta]\}$$

como *eficiente*, si no existe otra mejor respecto del orden parcial $\gtrsim$ definido en la forma:

$$(E_1, V_1) > (E_2, V_2) \Leftrightarrow E_1 \gtrsim E_2, V_1 \lesssim V_2$$

siendo uno de los dos signos estrictos, y siendo,

$$E_1 \gtrsim E_2 \Leftrightarrow E_1[\xi] \geq E_2[\xi], E_1[\eta] \geq E_2[\eta]$$
$$E_1 \succ E_2 \Leftrightarrow E_1[\xi] \geq E_2[\xi], E_1[\eta] \geq E_2[\eta]$$

siendo alguno de los dos signos estrictos, y

$$V_1 \lesssim V_2 \Leftrightarrow V_1[\xi] \leq V_2[\xi], V_1[\eta] \leq V_2[\eta]$$
$$V_1 \prec V_2 \Leftrightarrow V_1[\xi] \leq V_2[\xi], V_1[\eta] \leq V_2[\eta]$$

siendo alguno de los signos estricto.

Se trataría entonces de probar que obtener los puntos eficientes equivale a resolver el problema de máximo vectorial para pares (λ_1, λ_2) fijados

$$\text{Max}_{t_1,\ldots,t_n} \{E[\xi] - \lambda_1 V[\xi], E[\eta] - \lambda_2 V[\eta]\}$$

y está claro la analogía de esta expresión con la [7] a que nos conducía la maximización de la utilidad cuadrática separable.

3. Los tratamientos precedentes del problema de la cartera, están hechos con la suposición de que toda la información que ha ido obteniendo el inversor se puede resumir en la correspondiente distribución de probabilidad a priori y a partir de ella determinar, por ejemplo, aquella cartera que nos dé una esperanza de utilidad máxima.

Un nuevo enfoque del presente problema se puede obtener si admitimos la regla de Bayes de decisión, que permite mejorar la decisión mediante la consideración de sucesivas etapas, al incorporar nueva información como consecuencia de experimentos y observaciones realizadas en algún período de tiempo.

Resulta así natural que con la obtención de información adicional al considerar una nueva etapa, quedaría modificada la distribución a priori, y se pasaría a la distribución a posteriori que nos conduce a determinar en la misma línea que el apartado 2, la decisión que nos maximiza la utilidad a posteriori.

Vamos a suponer por sencillez, como anteriormente, que se tienen dos atributos y también, dos posibilidades en el período financiero que se avecina. Estas son: *a*) condiciones favorables y a la que denominaremos estado ω_1, y *b*) condiciones desfavorables, a las que denominaremos estado ω_2.

Las variables aleatorias correspondientes que nos definen el rendimiento (ξ_i) y la liquidez (η_i) de la inversión respecto de los dos atributos en una y otra situación posibles, vienen dadas por el cuadro,

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$P(\omega_1) = p_1 \qquad P(\omega_2) = p_2$$

		Atributos 1	Atributos 2	Atributos 1	Atributos 2
	A_1	ξ_1	η_1	ξ'_1	η'_1
	A_2	ξ_2	η_2	ξ'_2	η'_2
Acciones, obligaciones, etc.	⋮	⋮	⋮	⋮	
	A_n	ξ_n	η_n	ξ'_n	η'_n

Supongamos además un determinado experimento Z, que nos dará una información adicional y nos modificará la distribución a priori. Este experimento Z puede dar dos resultados z_1 y z_2, siendo las probabilidades

	ω_1	ω_2
Z_1	$P(z_1/\omega_1)$	$P(z_1/\omega_2)$
Z_2	$P(z_2/\omega_1)$	$P(z_2/\omega_2)$

La utilidad de Von Neumann que corresponde a una decisión

$$\begin{pmatrix} (t_1^{(1}, \ldots, t_n^{(1)})(t_1^{(2}, \ldots, t_n^{(2)}) \\ \uparrow \qquad\qquad \uparrow \\ z_1 \qquad\qquad z_2 \end{pmatrix}$$

es decir, a tomar como cartera:

$(t_1^1, \ldots, t_n^1)$, si el resultado del experimento es z^1, y $(t_1^2, \ldots, t_n^2)$, si el resultado del experimento es z_2, será

$$U[(t_1^{(1}, \ldots, t_n^{(1)}), (t_1^{(2}, \ldots, t_n^{(2)}] =$$

$$= P(\omega_1)P(z_1/\omega_1)U\left[\sum_1^n t_i^{(1}\xi_i, \sum_1^n t_i^{(1}\eta_i\right] +$$

$$+ \; P(\omega_2)\,P(z_1/\omega_2)\,U\left[\sum_1^n t_i^{(1}\xi_i', \sum_1^n t_i^{(1}\eta_i'\right] +$$

$$+ \; P(\omega_1)\,P(z_2/\omega_1)\,U\left[\sum_1^n t_i^{(2}\xi_i, \sum_1^n t_i^{(2}\eta_i\right] +$$

$$+ \; P(\omega_2)\,P(z_2/\omega_2)\,U\left[\sum_1^n t_i^{(2}\xi_i', \sum_1^n t_i^{(2}\eta_i'\right]$$

y se trata de determinar los vectores

$$(t_1^{(1}, \ldots, t_n^{(1}) \text{ y } (t_1^{(2}, \ldots, t_n^{(2})$$

que hagan máxima la utilidad a posteriori, con las condiciones

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^n t_i^{(1} &= 1\\ t_i^{(1} &\geq 0\end{aligned}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{aligned}\sum_1^n t_i^{(2} &= 1\\ t_i^{(2} &\geq 0\end{aligned}\right\}$$

Ahora bien, podemos escribir

$$U[(t_1^{(1}, \ldots, t_n^{(1}), (t_1^{(2}, \ldots, t_n^{(2})] =$$

$$= P(z_1)\left\{P(\omega_1/z_1)\,U\left[\sum_1^n t_i^{(1}\xi_i, \sum_1^n t_i^{(1}\eta_i\right] +\right.$$

$$\left. + \; P(\omega_2/z_1)\,U\left[\sum_1^n t_i^{(1}\xi_i', \sum_1^n t_i^{(1}\eta_i'\right]\right\} +$$

$$+ \; P(z_2)\left\{P(\omega_1/z_2)\,U\left[\sum_1^n t_i^{(2}\xi_i \sum_1^n t^{(2}\eta_i\right] +\right.$$

$$\left. + \; P(\omega_2/z_2)\,U\left[\sum_1^n t_i^{(2}\xi_i' \sum_1^n t_i^{(2}\eta_i'\right]\right\}$$

Entonces, si fijado z_1 determinamos la n-tupla

$$(t_1^{(1}, \ldots, t_n^{(1})$$

de modo que la cantidad

$$P(\omega_1/z_1)\,U\left[\sum_1^n t_i^{(1}\xi_i, \sum_1^n t_i^{(1}\eta_i\right] +$$

$$+ P(\omega_2/z_1)\,U\left[\sum_1^n t_i^{(1}\xi_i', \sum_1^n t_i^{(1}\eta_i'\right]$$

sea máxima, y si fijado z_2 determinamos la n-tupla

$$(t_1^{(2}, \ldots, t_n^{(2})$$

de tal forma que la cantidad

$$P(\omega_1/z_2)\,U\left[\sum_1^n t_i^2\xi_i, \sum_1^n t_i^{(2}\eta_i\right] +$$

$$+ P(\omega_2/z_2)\,U\left[\sum_1^n t_i^{(2}\xi_i', \sum_1^n t_i^{(2}\eta_i'\right]$$

sea máxima, tendremos los valores de las n-tuplas $(t_1^{(1}, \ldots, t_n^{(1})$ y $(t_1^{(2}, \ldots, t_n^{(2})$, que dan el máximo de $U[(t_1^{(1}, \ldots, t_n^{(1}), (t_1^{(2}, \ldots, t_n^{(2})]$. De este modo, se tiene la resolución del problema mediante la maximización de la utilidad a posteriori.

En un trabajo posterior expondremos algunos ejemplos reales actualmente en elaboración.

BIBLIOGRAFIA

ARDITTI, F., y H. LEVY: «Portfolio Efficiency Analysis in Three Moments». En *Financial Decision Making*. H. Levy y M. Samat eds. Academic Press. New York, 1977.

FRANCIS, J. C., y S. H. ARCHER: *Análisis y Gestión de Carteras de Valores*. ICE. Madrid, 1977.

MARKOWITZ, H.: *Portfolio Selection*. Wiley. New York, 1959.

RÍOS, S.: «El problema de la selección de la cartera con diferentes operadores de utilidad». Trabajo de Estadística e Investigación Operativa. Vol. XXIV. Madrid, 1973.

RÍOS, S.: *Análisis de Decisiones*. ICE. Madrid, 1976.

RESUMEN

Este trabajo trata el problema de selección de la cartera en el caso de multiatributos dentro del marco de la teoría de la utilidad, considerando diferentes funciones de

utilidad, y en especial el de función de utilidad cuadrática. Se da un nuevo concepto de cartera eficiente.

También se considera el problema de incorporación de información complementaria.

Palabras clave: Cartera, eficiente, utilidad a posteriori.

SUMMARY

This paper deals with the portfolio selection problem in the case of multiattributes in the frame of the utility theory, considering different utility functions, and specially a cuadratic utility function. A new concept of efficient portfolio is given.

It is also considered the problem of incorporating complementary information.

Key words: Portfolio, efficient, posterior utility.

AMS Subject classification: 90A05