Un nuevo sistema bivariante y sus propiedades

por C. RUIZ-RIVAS HERNANDO
Departamento de Estadística Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

INTRODUCCION

Dadas dos variables aleatorias X e Y, con funciones de distribución F y G, respectivamente, indicaremos por $\mathcal{R}(F, G)$ la clase bivariante de Fréchet (funciones de distribución bivariantes con marginales F y G).

Fréchet (1951) demostró que dicha clase tiene un elemento máximo:

$$H^+(x, y) = \text{Min}\{F(x), G(y)\} \quad \forall x, y \in R$$

y un elemento mínimo:

$$H^-(x, y) = \text{Max}\{F(x) + G(y) - 1, 0\} \quad \forall x, y \in R$$

Kimeldorf y Sampson (1975a) imponen cinco condiciones óptimas que debe verificar un sistema,

$$H = \{H_\alpha, -1 \leq \alpha \leq 1\} \subset \mathcal{R}(F, G)$$

de distribuciones bivariantes con marginales F y G, dependiente de un parámetro α, que idealmente mide el grado de asociación entre las variables aleatorias X e Y. Dichas condiciones son:

1.ª $H_{-1} = H^-$

2.ª $H_0(x, y) = F(x)G(y), \ \forall x, y \in R$

3.ª $H_1 = H^+$

4.ª Si F y G son absolutamente continuas, H_α debe ser absolutamente continua $\forall \alpha \in (-1, 1)$.

5.ª Fijado $(x, y) \in R^2$, $H_\alpha(x, y)$ debe ser continua en $\alpha \in [-1, 1]$.

Sean F_1, G_1, F_2, G_2 funciones de distribución univariantes absolutamente continuas. Kimeldorf y Sampson (1975a) demuestran que si el sistema:

$$H = \{H_\alpha, -1 \leq \alpha \leq 1\} \subset \mathcal{F}(F_1, G_1)$$

cumple un subconjunto cualquiera de las cinco condiciones, el sistema:

$$J = \{J_\alpha(x, y) = H_\alpha(F_1^{-1}F_2(x), G_1^{-1}G_2(y)), \ \forall x, y \in R, \ -1 \leq \alpha \leq 1\} \subset \mathcal{F}(F_2, G_2)$$

trasladado de H a marginales F_2, G_2, cumple el mismo subconjunto de condiciones que H.

En un segundo trabajo (Kimeldorf y Sampson, 1975b) resaltan la utilidad del estudio de los sistemas bivariantes mediante su traslación a marginales uniformes (representación uniforme) y demuestran la invariancia por traslación de diversas medidas de dependencia, entre ellas, la dependencia cuadrante y la dependencia en regresión (Lehmann, 1966), la asociación (Esary, Proschan y Walkup, 1967), la total positividad (Karlin, 1968)...

Existen, en la literatura, diversos sistemas de distribuciones bivariantes con marginales fijas; entre ellos citaremos:

1.º El sistema FGM [Farlie (1960), Gumbel (1958), Morgenstern (1956)] de las funciones:

$$H_\alpha(x, y) = F(x)\,G(y)[1 + \alpha(1 - F(x))(1 - G(y))] \quad \forall x, y \in R, \ -1 \leq \alpha \leq 1$$

2.º El sistema de Plackett (1965), donde H_α es solución de la ecuación:

$$\frac{H_\alpha(1 - F - G + H_\alpha)}{(F - H_\alpha)(G - H_\alpha)} = \alpha, \quad \alpha \geq 0$$

3.º La traslación de la Normal de Mardia (1970):

$$\{H_\rho(x, y) = N[B^{-1}F(x), B^{-1}G(y)], \ \forall x, y \in R, \ -1 \leq \rho \leq 1\}$$

donde N es la función de distribución N(0, 0, 1, 1, ρ) y B la función de distribución N(0, 1).

4.º El sistema de Cuadras-Augé (1979), donde:

$$H_\alpha(x, y) = \begin{cases} F(x)^{1-\alpha}G(y) & \text{si } F(x) \geq G(y) \\ F(x)G(y)^{1-\alpha} & \text{si } F(x) < G(y) \end{cases} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

que se extiende a valores negativos de α mediante un cambio de variables.

De ellos, los únicos que cumplen las cinco condiciones de K. y S. son el sistema de Plackett y la traslación de la Normal de Mardia.

En este trabajo se propone un nuevo sistema que cumple las cinco condiciones y se analizan diversas medidas de dependencia, así como las distribuciones condicionadas.

DEFINICION

Dadas dos variables X e Y, con funciones de distribución absolutamente continuas F y G, respectivamente, se define el sistema $\{H_\alpha, -1 \leq \alpha \leq 1\}$ como la (F, G)-traslación de la siguiente representación uniforme:

$$U_\alpha(x, y) = \begin{cases} [\text{Max}\{x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1, 0\}]^{-1/\alpha} & \text{si } -1 \leq \alpha < 0 \quad [1] \\ xy & \text{si } \alpha = 0 \\ x - [\text{Max}\{x^\alpha + (1-y)^\alpha - 1, 0\}]^{1/\alpha} & \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \quad [2] \end{cases}$$

$$\forall x, y \in [0, 1]$$

Este sistema, pensado inicialmente para casos de dependencia negativa entre las variables (expresión [1]), se extiende a casos de dependencia positiva (expresión [2]), considerando que si X e Y tienen dependencia negativa y distribución conjunta [1], las variables aleatorias X e $Y' = 1 - Y$ tienen dependencia positiva y distribución conjunta [2].

PROPIEDADES

1.ª $U_{-1}(x, y) = \text{Max}\{x + y - 1, 0\} = H^-(x, y) \quad \forall x, y \in [0, 1]$

2.ª $U_0(x, y) = xy \quad \forall x, y \in [0, 1]$

3.ª $U_1(x, y) = x - \text{Max}\{x - y, 0\} = \text{Min}\{x, y\} = H^+(x, y) \quad \forall x, y \in [0, 1]$

4.ª $\forall \alpha \in (-1, 1)$, U_α es una función de distribución absolutamente continua, cuya función de densidad es:

a) $u_\alpha(x, y) = (1 + \alpha)(xy)^{-\alpha-1}(\text{Max}\{x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1, 0\})^{-(1+2\alpha)/\alpha}$ si $\alpha \in (-1, 0)$

b) $u_\alpha(x, y) = u_{-\alpha}(x, 1 - y)$ si $\alpha \in (0, 1)$

c) $u_0(x, y) = 1$

$$\forall x, y \in [0, 1]$$

En efecto:

a) $\alpha \in (-1, 0)$,

$$U_\alpha(x, y) = \begin{cases} (x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha} & \text{si } x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1 > 0 \\ 0 & \text{si } x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\partial U_\alpha/\partial x = \begin{cases} x^{-\alpha-1}(x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1)^{-(1+\alpha)/\alpha} & \text{si } x^{-\alpha} + y^{-\alpha} > 1 \\ 0 & \text{si } x^{-\alpha} + y^{-\alpha} < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x^{-\alpha}+y^{-\alpha}\to 1 \\ x^{-\alpha}+y^{-\alpha}>1}} \partial U_\alpha/\partial x = 0 = \lim_{\substack{x^{-\alpha}+y^{-\alpha}\to 1 \\ x^{-\alpha}+y^{-\alpha}<1}} \partial U_\alpha/\partial x$$

$$u_\alpha(x, y) = \partial^2 U_\alpha/\partial x \partial y = \begin{cases} (1 + \alpha)(xy)^{-\alpha-1}(x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1)^{-(1+2\alpha)/\alpha} & \text{si } x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1 > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Comprobaremos que u_α es una función de densidad:

1.º $u_\alpha(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in [0, 1]$ (evidente)

2.º $$\int_0^1 \int_0^1 u_\alpha(x, y)dxdy = \int_0^1 \int_{(1-x^{-\alpha})^{-1/\alpha}}^1 (1 + \alpha)(xy)^{-\alpha-1}(x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1)^{-(1+2\alpha)/\alpha}dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx = 1$$

b) y *c)* De manera análoga, se comprueba, para $\alpha \in (0, 1)$, que $\partial^2 U_\alpha/\partial x \partial y = u_{-\alpha}(x, 1 - y)$, y para $\alpha = 0$, *c)* es evidente.

5.ª Fijado $(x, y) \in [0, 1]^2$, $U_\alpha(x, y)$ es continua en $\alpha \in [-1, 1]$.

En efecto:

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0 \\ \alpha<0}} (x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha} = \exp\left(\lim_{\alpha\to 0} -1/\alpha \ln(x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1)\right) =$$

$$= \exp(\ln x + \ln y) = xy$$

análogamente:

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0 \\ \alpha>0}} (x - (x^\alpha + (1 - y)^\alpha - 1)^{1/\alpha}) = x - x(1 - y) = xy$$

El sistema $\{U_\alpha,\ -1 \leq \alpha \leq 1\}$ cumple las cinco condiciones de Kimeldorf y Sampson, y por tanto, su traslación a marginales cualesquiera absolutamente continuas F y G, también las cumple.

EXPRESION GENERAL DEL SISTEMA

$$H_\alpha(x, y) = \begin{cases} (\text{Max}\{F(x)^{-\alpha} + G(y)^{-\alpha} - 1, 0\})^{-1/\alpha} & \text{si } -1 \leq \alpha < 0 \\ F(x)G(y) & \text{si } \alpha = 0 \\ F(x) - (\text{Max}\{F(x)^{\alpha} + (1 - G(y))^{\alpha} - 1, 0\})^{1/\alpha} & \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad [3]$$

la función de densidad correspondiente es:

$$h_\alpha(x, y) = \begin{cases} (1 + \alpha) f(x)g(y)[F(x)G(y)]^{-\alpha-1}(\text{Max}\{F(x)^{-\alpha} + G(y)^{-\alpha} - 1, 0\})^{-(1+2\alpha)/\alpha} \\ \qquad\qquad \text{si } -1 \leq \alpha < 0 \\ f(x)g(y) \qquad \text{si } \alpha = 0 \\ (1 - \alpha)\ f(x)g(y)F(x)^{\alpha-1}(1 - G(y))^{\alpha-1}(\text{Max}\{F(x)^{\alpha} \\ + (1 - G(y))^{\alpha} - 1,0\})^{(1-2\alpha)/\alpha} \quad \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\forall x, y \in \mathbf{R}$$

donde F y G son funciones de distribución absolutamente continuas y f y g sus correspondientes funciones de densidad.

DISTRIBUCIONES CONDICIONADAS

1.º $-1 \leq \alpha < 0$:

En el caso de marginales uniformes en [0,1], $u_\alpha(y/X = x_0) = u_\alpha(x_0, y)$, de donde:

$$U_\alpha(y/X = x_0) = \int_0^y u_\alpha(x_0, t)dt =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{si } x_0^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1 \leq 0 \\ \displaystyle\int_{(1-x_0^{-\alpha})^{-1/\alpha}}^{y} (1 + \alpha)(x_0 t)^{-\alpha-1}(x^{-\alpha} + t^{-\alpha} - 1)^{-(1+2\alpha)/\alpha} dt = \\ = x_0^{-\alpha-1}(x_0^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1)^{-(1+\alpha)/\alpha} \quad \text{si } x_0^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\forall x_0, y \in [0, 1]$$

análogamente:

$$U_\alpha(x/Y = y_0) = y_0^{-\alpha-1}(\text{Max}\{x^{-\alpha} + y_0^{-\alpha} - 1, 0\})^{-(1+\alpha)/\alpha}$$

$$\forall x, y_0 \in [0, 1]$$

En el caso general, se obtiene:

$$H_\alpha(y/X = x_0) = F(x_0)^{-\alpha-1}(\text{Max}\{F(x_0)^{-\alpha} + G(y)^{-\alpha} - 1, 0\})^{-(1+\alpha)/\alpha}$$
$$\forall x_0, y \in R$$

con una expresión análoga para $H_\alpha(x/Y = y_0)$.

2.º $0 < \alpha \leq 1$:

Para marginales uniformes en [0, 1],

$$U_\alpha(x/Y = y_0) = \int_0^x u_\alpha(t, y_0)dt =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{si } x^\alpha + (1 - y_0)^\alpha - 1 \leq 0, \\ \displaystyle\int_{[1-(1-y_0)^\alpha]^{1/\alpha}}^{x} (1 - \alpha)t^{\alpha-1}(1 - y_0)^{\alpha-1}(t^\alpha + (1 - y_0)^\alpha - 1)^{(1-2\alpha)/\alpha}dt = \end{cases}$$
$$= (1 - y_0)^{\alpha-1}(x^\alpha + (1 - y_0)^\alpha - 1)^{(1-\alpha)/\alpha} \quad \text{si } x^\alpha + (1 - y_0)^\alpha - 1 > 0$$

$$U_\alpha(y/X = x_0) = \int_0^y u_\alpha(x_0, t)dt =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{1-(1-x_0^\alpha)^{1/\alpha}} (1 - \alpha)x_0^{\alpha-1}(1 - t)^{\alpha-1}(x_0^\alpha + (1 - t)^\alpha - 1)^{(1-2\alpha)/\alpha}dt = 1 \\ \text{si } x_0^\alpha + (1 - y)^\alpha - 1 \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^y (1 - \alpha)x_0^{\alpha-1}(1 - t)^{\alpha-1}(x_0^\alpha + (1 - t)^\alpha - 1)^{(1-2\alpha)/\alpha}dt = \\ = 1 - x_0^{\alpha-1}(x_0^\alpha + (1 - y)^\alpha - 1)^{(1-\alpha)/\alpha} \quad \text{si } x_0^\alpha + (1 - y)^\alpha - 1 > 0 \end{cases}$$

Luego:

$$U_\alpha(x/Y = y_0) = (1 - y_0)^{\alpha-1}(\text{Max}\{x^\alpha + (1 - y_0)^\alpha - 1, 0\})^{(1-\alpha)/\alpha}$$
$$U_\alpha(y/X = x_0) = 1 - x_0^{\alpha-1}(\text{Max}\{x_0 + (1 - y)^\alpha - 1, 0\})^{(1-\alpha)/\alpha}$$
$$\forall x, y_0, y, x_0 \in [0, 1]$$

De manera análoga, en el caso general se obtiene:

$$H_\alpha(x/Y = y_0) = (1 - G(y_0))^{\alpha-1}(\text{Max}\{F(x)^\alpha + (1 - G(y_0))^\alpha - 1, 0\})^{(1-\alpha)/\alpha}$$
$$H_\alpha(y/X = x_0) = 1 - F(x_0)^{\alpha-1}(\text{Max}\{F(x_0)^\alpha + (1 - G(y))^\alpha - 1, 0\})^{(1-\alpha)/\alpha}$$
$$\forall x, y, x_0, y_0 \in R$$

DEPENDENCIA EN REGRESION

Dadas dos variables aleatorias X, Y, se dice que Y es positivamente (negativamente) dependiente en regresión sobre X si:

$P(Y \leq y/X = x)$ es no creciente (no decreciente) en x (Lehmann, 1966).

Si además, $P(X \leq x/Y = y)$ es no creciente (no decreciente) en y, se dice que X e Y son mutuamente dependientes en regresión.

Se comprueba inmediatamente que las funciones $H_x(y/X = x_0)$, $H_x(x/Y = y_0)$, del apartado anterior son no decrecientes en x_0 e y_0, respectivamente, para $-1 \leq \alpha < 0$, y no crecientes para $0 < \alpha \leq 1$. Luego, dos variables aleatorias X e Y con distribución conjunta [3], son mutuamente dependientes en regresión, siendo esta dependencia positiva si $\alpha \in (0, 1]$ y negativa si $\alpha \in [-1, 0)$.

Jogdeo (1968) da una caracterización muy simple de independencia para variables aleatorias mutuamente dependientes en regresión.

Esary, Proschan y Walkup (1967) demuestran que la dependencia positiva en regresión implica la asociación entre las variables aleatorias X e Y.

Por otra parte, la dependencia en regresión positiva (negativa) de una cualquiera de las variables sobre la otra, implica la dependencia cuadrante positiva (negativa) entre ambas variables (Lehmann, 1966); en las distribuciones que cumplen esta propiedad, la independencia está caracterizada por la incorrelación y los coeficientes τ de Kendall, ρ_s de Spearman y la medida cuadrante q, de Blonquist, son todos no negativos (no positivos).

Como consecuencia, el coeficiente de correlación, ρ, para dos variables aleatorias X e Y con distribución conjunta [3], tiene el mismo signo que α y $\rho = 0$, si y sólo si $\alpha = 0$.

BIBLIOGRAFIA

CUADRAS, C. M.; AUGE, J.: «A continuous multivariate distribution and its properties». *Commun. Statist.* (por salir) (1979).

ESARY, J. D.; PROSCHAN, F., WALKUP, D. W.: «Association of random variables with applications». *Ann. Math. Statist.*, 38, 1466-74 (1967).

FRECHET, M.: «Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données». *Ann. Univ. Lyon*, A, 3, 14, 53-77 (1951).

JOGDEO, K.: «Characterizations of independence in certain families of bivariate and multivariate distributions». *Ann. Math. Statist.*, 39, 2, 433-41 (1968).

KIMELDORF, G.: SAMPSON, A.: «One-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals». *Commun. Statist.*, 4 (3), 293-301 (1975a).

KIMELDORF, G.; SAMPSON, A.: «Uniform representation of bivariate distributions». *Commun. Statist.*, 4 (7), 617-27 (1975b).

LEHMANN, E. L.: «Some concepts of dependence». *Ann. Math. Statist.*, 37, 1137-53 (1966).

MARDIA, K. V.: «Families of bivariate distributions». Hafner Publishing Co., Darien, Conn. 1970.

PLACKETT, R. L.: «A class of bivariate distributions». *Journal Amer. Statist. Assoc.*, 60, 516-22 (1965).

RESUMEN

Este artículo propone un sistema uniparamétrico de distribuciones bivariantes con marginales dadas.

Se analizan las condiciones de Kimeldorf y Sampson, distribuciones condicionadas y algunas medidas de dependencia.

Palabras clave: Distribuciones bivariantes, Marginales fijas.

SUMMARY

This paper proposes a parameter dependent system of bivariate distributions with given marginals.

Kimeldorf and Sampson's conditions, conditional distributions and some measures of dependence are analized.

Key words: Bivariate distributions, Fixed marginals.

AMS 1970. Subject classification: 60E05