«Optimización de procesos de decisión en ambiente de incertidumbre parcial y con experimentación polietápica, considerando variaciones de los índices de utilidad entre cada dos etapas de experimentación contiguas»

por ROBERTO ESCUDER VALLES
Profesor del Departamento de Estadística
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Bilbao

PLANTEAMIENTO

1. Consideremos un proceso de decisión en ambiente de incertidumbre parcial y con experimentación secuencial finita, esto es con un número máximo prefijado «k» de etapas de experimentación, definido por:

a_1) El conjunto $A = \{a\}$, representativo de las acciones o decisiones.

a_2) El conjunto $\Theta = \{\theta\}$, de los estados o ambientes.

a_3) El conjunto $Z = \{z(a, e)\}$, de las consecuencias asociadas a cada par $(a, e) \in A, \Theta$.

a_4) Los conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_k$ de los resultados que pueden obtenerse en cada una de las etapas de experimentación.

a_5) El conjunto Z' de las consecuencias o costes posibles, en cada una de las experimentaciones que se pueden realizar.

a_6) Un preorden completo sobre $Z \cup Z'$.

a_7) Una distribución de probabilidad subjetiva sobre Θ, y

a_8) Una distribución de probabilidad sobre $\{S_1, \ldots, S_n/\Theta = \theta\}$, $\forall\theta \in \Theta$ y $n = 1, 2, \ldots, k$.

Para especificar las distribuciones de probabilidad definidas en los apartados a_7) y a_8) anteriores, sea W la variable aleatoria de la distribución del apartado a_7), w sus valores, R_W su recorrido y $f(w)$ su función de densidad generalizada; $g(x_1, X_2, \ldots, x_n/w)$ la función de densidad generalizada para $n = 1, 2, \ldots, k$ y $\forall w \in R_W$ de la distribución de la variable aleatoria.

$(X_1X_2\ldots X_n/W = w)$ donde cada una de las X_n, para $n = 1, 2, \ldots, k$, es la variable aleatoria marginal correspondiente al conjunto de resultados S_n, x_n, los valores de cada unas de las variables aleatorias X_n, y R_{X_n} su correspondiente recorrido. Evidentemente por los teoremas de las probabilidades totales y de Bayes podemos obtener las funciones de densidad generalizada

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{R_W} g(x_1, x_2, \ldots, x_n/w) \cdot f(w) \cdot dV(w), \text{ y}$$

$$f(w/x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f(w) \cdot g(x_1, x_2, \ldots, x_n/w)}{\int_{R_W} f(w) \cdot g(x_1, x_2, \ldots, x_n/w) \cdot dV(w)} =$$

$$= \frac{f(w) \cdot g(x_1, x_2, \ldots, x_n/w)}{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

de las variables aleatorias $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ y $(W/X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$, respectivamente para $n = 1, 2, \ldots, k$, y $\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_{X_1} \cdot R_{X_2} \ldots R_{X_n}$.

En cuanto al preorden definido en a_6), admitiremos que existe una representación fiel, esto es, una función de utilidad o de pérdida. A su restricción en Z la denominaremos función objetivo o básica, y la denotaremos por $q(a, w)$; mientras que ala restricción en Z', la denominaremos función de coste o de desutilidad asociada a cada uno de los posibles resultados de la experimentación, y que a su vez la denotaremos por $c(x_n)$ para $\forall x_n \in R_{Xn}$, $n = 1, 2, \ldots, k$.

Como se trata de un proceso de decisión con experimentación, las acciones del conjunto A se deben tomar a través de reglas o funciones de decisión, por lo tanto, también hemos de considerar las correspondientes funciones de decisión o aplicaciones exhaustivas de $R_{X_1} \cdot R_{X_2} \ldots R_{X_n}$ en A. Sean $H_n = \{h_n\}$ los conjuntos de las funciones de decisión que pueden definirse en cada una de las etapas de experimentación. Evidentemente toda acción $a \in A$ podrá expresarse mediante $a = h_n(x_1, x_2, \ldots, x_n$ 1, para $n = 1, 2, \ldots, k$ y $\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_{X_1} \cdot R_{X_2} \ldots R_{Xn}$, y los valores de la función objetivo mediante $q[h_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), w]$.

2. Supongamos, además, que entre cada dos etapas de experimentación contiguas existe un período de tiempo no necesariamente constante, de forma que manteniéndose invariante el preorden establecido sobre $Z \cup Z'$, los valores numéricos de las funciones objetivo y de costes de una etapa cualquiera «$n + 1$» al tener que ser comparados con los de la etapa anterior «n», sufren una reducción determinada por el factor «v_{n+1}» positivo y menor o igual que uno, a los que denominaremos «factores de corrección» o «factores correctores».

Estos «factores de corrección» son muy importantes en las aplicaciones concretas en el campo de la Ciencia Económica, pues pueden ser interpretados bien como factores de actualización o de contracapitalización a un determinado tipo de interés, los que sirven para homogeneizar capitales financieros referidos a tiempos o vencimientos distintos; bien como índices correctores de un proceso inflacionario; o bien como ambas cosas a la vez.

Sea $(1) \leq (2) \leq \ldots \leq (k)$, los momentos, contados a partir de un origen fijo (0) *, en que se deben tomar las decisiones (finales o de continuación) correspondientes a cada una de las etapas de experimentación **, designemos por:

$$v(n + h, n) \qquad \text{para } h = 1, 2, \ldots, k - n, \text{ y } n = 1, 2, \ldots, k$$

los valores estimados en el momento (n), de los factores correctores $v(n + h)$. Evidentemente estos valores estimados también deben satisfacer a la relación:

$$0 \leq v(n + h, n) \leq 1$$

y en general, cuanto menor sea h, menos deben diferir de su verdadero valor $v(n + h)$. Además si los $v(n + h)$ fuesen conocidos de antemano no sería necesario recurrir a sus estimaciones.

Seguidamente pasamos a estudiar la optimización del prodeso de decisión definido, considerando que tiene sentido la introducción de los factores correctores, y más general aún, la de sus estimaciones.

OPTIMIZACION

1. Dado que en toda etapa de experimentación, pueden tomarse dos tipos de decisiones, denominadas «finales» y «de continuación», consistentes las primeras en tomar

(*) Desde el punto de vista de las aplicaciones empíricas, el origen siempre tiene un interpretación concreta.

(**) Véase sección 3.1.

una decisión o acción del conjunto A, mediante cualquier regla o función de decisión correspondiente a dicha etapa, y las segundas en pasar a la etapa de experimentación siguiente, el problema de la optimización del proceso de decisión planteado en la sección anterior quedará resuelta cuando para

$\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_{X_1} \cdot R_{X_2} \ldots R_{X_n}$, y $n = 1, 2, \ldots, k-1$, se sepa:

a_1) si es mejor tomar una decisión final, o una decisión de continuación, y

a_2) en caso de tomar una decisión final, y por supuesto en la etapa $n = k$ siempre, cuál es la correspondiente función de decisión a través de la cual se seleccionará la acción óptima del conjunto A.

2. Matemáticamente, lo que acabamos de indicar presupone:

a_1) Para toda etapa $n = 1, 2, \ldots, k$, y todo posible resultado $(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$, calcular:

$$M[\bar{h_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \int_{R_W} q[h_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), w] \cdot f(w/x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot dV(w)$$

donde la integral es una integral de Stieltjes para poder condensar en una expresión única los casos discretos y continuo, $dV(w)$ la unidad o bien dw, respectivamente, «q» es la función objetivo, y «f» la función de densidad generalizada de la distribución condicionada de la variable aleatoria $(W/X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$ o distribución a posteriori sobre Θ; y su óptimo sobre el conjunto H_n, que denotaremos por $M_n^0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definido mediante

$$M_n^0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \operatorname*{opt}_{H_n} M[h_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] =$$

$$= \begin{cases} \sup_A \int_{R_W} q(a, w) \cdot f(w/x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot dV(w) \\ \inf_A \int_{R_W} q(a, w) \cdot f(w/x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot dV(w) \end{cases}$$

según que «q» sea una función de utilidad o una función de pérdida, respectivamente.

Cuando dichos extremos superior o inferior sean accesibles, existirá una función de decisión $\bar{h_n}$, tal que

$$M[h_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = M_n^0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

que recibe el nombre de óptima o bayesiana, y es la que debe tomarse cuando corresponda una decisión final. Si los extremos no fueran accesibles, pueden definirse

funciones de decisión cuasi-óptimas con tanta aproximación como se desee, esto es: fijado $\delta \geq 0$ arbitrariamente pequeño, considerar como tal cualquier función de decisión h'_n que verifique

$$\left| M[h'_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] - M^0_n(x_1, x_2, \ldots, x_n x_n) \right| \leq \delta$$

Como es lógico, cualquier función de decisión cuasi-óptima solo podrá tomarse en defecto de la óptima, y por supuesto siempre que corresponda una decisión final.

a_2) Para toda etapa $n = 1, 2, \ldots, k-1$, y todo resultado $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_{X_1} \cdot R_{X_2} \ldots R_{Xn}$. Definir el valor o medida óptima correspondiente a una decisión de continuación, dado por

$$M^1_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{R_{Xn+1}} [M_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \pm c(x_{n+1})] \cdot \cdot v(n+1, n) \cdot g(x_{n+1}) \cdot dV(x_{n+1})$$

donde $c(x_{n+1})$, es el coste o desustilidad asociada a la observación $X_{n+1} = x_{n+1}$ de acuerdo con la representación fiel definida en el apartado anterior, siendo su signo negativo o positivo según que la función objetivo «q» sea de utilidad o de pérdida: $g(x_{n+1})$ es la función de densidad generalizada de la variable aleatoria marginal X_{n+1}; $v(n+1, n)$ es la estimación en (n) del factor de corrección $v(n+1)$; y $M_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$, el valor (o medida) óptimo de la etapa, que se define

$$M^0_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} M^0_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{para } n = k \\ \text{opt}\,[M^0_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ M^1_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] & \\ \text{para } n = 1, 2, \ldots, k-1 & \end{cases}$$

Las expresiones «M^0_n» y «M^1_n» que acabamos de obtener, permiten particionar los conjuntos «R_{X_n}» *en dos conjuntos disjuntos*, $R^0_{X_n}$ y $R^1_{X_n}$, de forma que para $\forall(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in R_{X_1}, R_{X_2}, \ldots, R_{X_{n-1}}$, los puntos $x_n \in R_{X_n}$ tales que $M_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = M^0_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, determinen los conjuntos $R^0_{X_n}$. Evidentemente $R^0_{X_k} = R_{X_k}$*, luego comenzando por la última etapa se pueden calcular sucesivamente los conjuntos $R^0_{X_{k-h}}$ para $h = 0, 1, \ldots, k-1$, así como sus complementarios, con lo que se completa la optimización del proceso, puesto que: «Para toda etapa «n», tal que en ninguna de las anteriores se haya podido tomar una decisión final, si $x_n \in R_{X_n}$ se tomará una decisión de continuación —la que consistirá en pasar a la etapa siguiente de experimentación—, y si $x_n \in R^0_{X_n}$ se tomará una decisión final, esta es la acción $a \in A$ dada por la función de decisión óptima o en su defecto por cualquier cuasi-óptima».

(*) Por definición el proceso debe concluir como mucho con la etapa k-ésima.

En cuanto a los factores de corrección conviene destacar, que los valores de «M_n^0» no dependen de ellos mientras que los de «M_n^1» si, y por lo tanto en general los de «M_n» también.

Obsérvese que si se tratara de un proceso de decisión en incertidumbre parcial monoetápico *, siempre que la experimentación se realizara en un momento (1) posterior al origen (0), tal que tenga sentido definir el factor $v(1, 0)$, podría considerarse como caso particular de todo lo dicho anteriormente en el supuesto de que $k = 1$. Análogamente se puede decir de los procesos de decisión en incertidumbre parcial y sin experimentación, siempre que su optimización se realice en un momento (1) a partir del momento inicial u origen (0), de forma tal que pueda considerarse el correspondiente factor de corrección, pero en este caso la distribución de probabilidad sobre Θ será la inicial.

Finalmente digamos que cuando alguno de los esquemas teóricos anteriores modelice el caso concreto de proyectos de inversión, deberá tenerse en cuenta otra condición, necesaria aunque no suficiente: que los valores óptimos que se deban considerar con referencia a las posibles decisiones o funciones de decisión en orden a su optimización, sean todos positivos. Ello es debido a que empíricamente significarán «valores capitales» o mejor dicho «valores capitales esperados», que en caso de no ser positivos, conllevan la no realización del correspondiente proyecto de inversión.

BIBLIOGRAFIA

[1] AITCHISON, J.: «Choice against Chance: An Introduction to Statistical Decision Theory». Addison Wesley (1970).
[2] CHOU YA-LUN: «Probability and Statistics for Decision Making». Holt Rinehart and Winston (1972).
[3] DEGROOT: «Optimal Statistical Decision». Mac Graw - Hill (1970).
[4] ESCUDER, R.: «Tesis Doctoral». Universidad de Bilbao (1974).
[5] FERGUSON, T. S.: «Mathematical Statistics». *A Decision Theoretic Aproach*. Academic Press (1967).
[6] FISHBURN, P. C.: Utility theory for Decision Making. John Wiley (1970).
[7] HAYS, W. L., and WINKLER, R. L.: «Probability, Inference and Decision». Holt, Rinehart and Winston (1970).
[8] LUCE, R. D., and RAIFFA, H.: Games and Decisions. John Wiley (1967).
[9] LINDEY, D.: «Introduction to Probability and Statistics». Cambridge University Press (1965).
[10] MAO J.: «Quantitative Analysis of Financial Decisions». *MacMillan Company*. New York, 1969 (hay tradicción española) (1969).

(*) Esto es, con una sola etapa de experimentación.

[11] PRATT, J., RAIFFA, H., and SCHLAIFER, R.: «Introduction to Statistical Decision Theory». Mac Graw Hill (1965).
[12] PRIETO: «Teoría de la Inversión». *I.C.E.* (1973).
[13] RÍOS, S.: «Procesos dinámicos de Decisión en concurrencia». Academia de Ciencias Exactas. Madrid, 1967.
[14] RÍOS, S.: «Análisis de decisiones». Madrid (1973).
[15] SAVAGE, L.: «The Foundations of Statistics». John Wiley (1954).
[16] SUÁREZ, A.: «Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa». *Pirámide* (1976).
[17] WALD, A.: «Statistical Decision Functions». John Wiley (1950).
[18] WINKLER, R. L.: «Introduction to Bayesian Inference and Decision». Holt Rinehart and Winton (1972).
[19] VON NEUMAN and MORGENSTERN, O.: «Theory of Games and Economic Behavoir». Princeton University (1953).

RESUMEN

En este trabajo pretendemos encontrar la optimización de procesos de decisión en incertidumbre parcial y con experimentación polietápica, cuando entre cada dos etapas de experimentación contiguas, existe un período de tiempo necesariamente constante, de forma que al comparar valores asociados a etapas diferentes, tengan que homogeneizarse mediante la introducción de «factores de corrección».

Estos «factores de corrección» gozan de gran importancia al considerar aplicaciones en el campo de la Ciencia Económica, pues en general pueden interpretarse bien como factores de actualización o de contracapitalización correspondientes a un determinado tanto de interés, bien como índices correctores de la inflación monetaria, o bien como ambas cosas a la vez.

Palabras clave: Decisión cuasi-óptima, decisión de continuación, decisión final, decisión óptima, factor de corrección (o corrector), función de costes (de experimentación), función de pérdida, función objetivo, función de utilidad, valor capital de un proyecto de inversión.

SUMMARY

In this work, we try to find the optimum way to deal with processes of decision in partial incertainty and with multi-stage experiment when, between every two stages there exists a period of time, not neccessarily constant, so that on comparing values

associated with different stages these will have to be homogenized by means of introducing «correction factors».

These «correction factors» are of great importance when considering applications in the field of Economic Science since, in general, they may be interpreted either as up-dating factors or as contra-capitalization corresponding to a definite amount of interest whether this be a corrector index in the monetary inflation or both cases at the same time.

Key words: Quasi-optimum decision, continuation decision, final decision, optimum decision, correction factor, cost ratio, loss ratio, objective ratio, utility ratio, capital value of an investment project.

AMS 1970. Subject classification: C2C05.