



Sobre el método de desagregación temporal de Litterman

Enrique M. Quilis¹

S.G. Cuentas Nacionales
INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA
Paseo de la Castellana, 183
28046 – Madrid (España)

RESUMEN

En este trabajo se examina el procedimiento de desagregación temporal de Litterman, tanto desde una perspectiva basada en modelos como desde un planteamiento de optimización. Asimismo, se exponen dos algoritmos de estimación: uno de tipo clásico y otro (parcialmente) bayesiano. Por último, a través de una aplicación a datos de la economía española, se comparan las estimaciones generadas con este método con las proporcionadas por los de Chow-Lin y Fernández.

Palabras clave: Desagregación temporal, indicadores económicos, Contabilidad Nacional Trimestral, modelos de regresión, estimación bayesiana.

¹ Las opiniones expresadas corresponden al autor y no reflejan necesariamente las del INE. Se agradecen los comentarios recibidos en el Seminario sobre Cuentas Trimestrales celebrado en el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI) del Perú (Lima, abril 2001) así como los de Juan Bógalo y Silvia Relloso (INE, España). Roberto Barcellan (Eurostat) proporcionó gentilmente la versión más actualizada del programa Ecotrim. El interés por el método de Litterman aumentó gracias a las conversaciones mantenidas con Fátima Cardoso (INE, Portugal).

CONTENIDO

1. Introducción.
 2. Interpretación basada en modelos.
 3. Estimador teórico.
 4. Algoritmo de estimación: enfoque clásico.
 5. Algoritmo de estimación: enfoque bayesiano.
 6. Interpretación basada en una función de pérdidas.
 7. Una aplicación.
 8. Conclusiones.
- Referencias

1. INTRODUCCION

Las técnicas de desagregación temporal de series económicas son uno de los elementos esenciales en la elaboración de la Contabilidad Nacional Trimestral de un buen número de países, entre ellos España, debido a que proporcionan una forma operativa, a la par que objetiva, de combinar la relevancia de los indicadores de coyuntura con el rigor y coherencia interna de la Contabilidad Nacional, véase INE (1993) y Eurostat (1998).

Con el transcurso del tiempo, estas técnicas han ampliado sensiblemente su ámbito de aplicación, de forma que son en la actualidad uno de los métodos de análisis cuantitativo habituales del análisis de la coyuntura. De esta manera, los análisis de congruencia entre indicadores y agregados anuales pueden ampliarse fácilmente para disponer de estimaciones de alta frecuencia de estos últimos.

En este trabajo se examina el procedimiento de desagregación temporal de series económicas propuesto por Litterman (1983a,b), ya que proporciona una interesante generalización de los de Chow y Lin (1971) y Fernández (1981), especialmente en el caso de datos de alta frecuencia (p.e., mensualización de agregados trimestrales).

Este método fue desarrollado en el Banco de la Reserva Federal de Minneapolis con el fin, entre otros, de disponer de datos mensuales para su uso en un modelo econométrico de la economía americana, en aquellos casos en los que la frecuencia de los datos era trimestral pero se disponía de indicadores mensuales de aproximación, véase Litterman (1984).

La estimación que proporciona el método de Litterman puede ser concebida como el resultado de aplicar los principios de estimación de Chow-Lin en un modelo de regresión con errores ARI(1,1). Esta interpretación es desarrollada en la sección 2. El estimador teórico se presenta en la tercera sección. Dicho estimador se obtiene imponiendo tres condiciones: linealidad, insesgadez y varianza mínima. Los problemas de estimación que plantea este procedimiento son analizados desde una perspectiva clásica (sección 4) y parcialmente bayesiana (sección 5). Este enfoque semibayesiano permite mejorar los aspectos inferenciales del método de Litterman. En la sección 6 se ofrece una interpretación alternativa del método de Litterman, basada en un enfoque de optimización, de manera que sus propiedades teóricas son precisadas. La relación que guarda este procedimiento con los de Chow-Lin y Fernández es estudiada en la sección séptima mediante una aplicación a datos reales de la economía española. El trabajo termina con un apartado de conclusiones y futuros desarrollos.

2. INTERPRETACION BASADA EN MODELOS

El método de trimestralización de Litterman asume la existencia de una relación lineal, aditivamente perturbada, entre un vector de p indicadores x y la variable trimestral inobservable y , cuya expresión formal es:

$$[1] \quad y_t = \beta' x_t + u_t$$

donde β es un vector de p parámetros constantes pero desconocidos y u_t es una perturbación estocástica que evoluciona según un paseo aleatorio markoviano:

$$[2a] \quad u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$[2b] \quad \varepsilon_t = \mu \varepsilon_{t-1} + a_t \quad |\mu| < 1$$

$$[2c] \quad a_t \sim \text{iid } N(0, \sigma_a^2)$$

En consecuencia, u_t sigue un proceso autorregresivo (AR) de segundo orden con una raíz unitaria y otra estacionaria, asociada a $1/\mu$:

$$[3] \quad u_t = \frac{1}{(1-\mu B)(1-B)} a_t$$

Sustituyendo [3] en [1] se obtiene:

$$[4] \quad \Delta y_t = \beta' \Delta x_t + \frac{a_t}{(1-\mu B)}$$

donde $\Delta=(1-B)$ es el operador de diferenciación regular. La interpretación del modelo expuesto en [4] es sencilla:

- La relación que se establece entre la serie trimestral y los indicadores hace referencia, únicamente, a sus ritmos de crecimiento, no a sus niveles. En consecuencia, los indicadores x_t aproximan la evolución cíclica de y_t pero no su trayectoria tendencial. En otros términos, las series y_t y x_t no están cointegradas²: no es posible encontrar una tendencia común a ambas series que dé cuenta de su comportamiento no estacionario.
- El parámetro β determina el carácter de la relación: directa (inversa) si $\beta > 0$ (< 0) y menos (más) que proporcional si $\beta < 1$ (> 1).
- Adicionalmente, la relación existente entre dichos ritmos de crecimiento es incompleta, en el sentido de que el componente de y_t no explicado por x_t está estocásticamente estructurado, al obedecer a un proceso AR(1). Usualmente, la presencia de correlación serial se justifica por la omisión de variables relevantes en el modelo.
- El parámetro μ determina la intensidad de la correlación serial de la perturbación, cuya expresión es μ^k , e influye en su volatilidad, cuya fórmula es $\sigma_a^2 / (1 - \mu^2)$.

Este modelo, en el que los indicadores se utilizan para cuantificar, de forma aproximada, sólo perfiles cíclicos es muy común en la práctica del análisis de coyuntura, lo que explica el atractivo teórico del procedimiento de Litterman. Por otra parte, como se expondrá más adelante, el modelo de Litterman incluye como caso particular al de Fernández (1981) cuando $\mu=0$.

Por último, el modelo se completa asumiendo la siguiente restricción longitudinal:

$$[5] \quad \sum_{t \in T} y_{t,T} = Y_T$$

Esta restricción implica que la suma de los cuatro trimestres que forman el año T ha de ser igual al valor anual observado Y_T . Nótese que Y_T , a diferencia de y_t , sí es observable. Esta restricción puede modificarse fácilmente para tener en cuenta los casos de agregación (o promedio) de un índice e interpolación.

3. ESTIMADOR TEORICO

El problema de estimación que se plantea es el siguiente: dada una muestra de tamaño del agregado anual $Y=(Y_1, \dots, Y_N)'$ y otra, de tamaño $n=4N$, de los p indicadores $x=(x_1, \dots, x_p)'$: ¿cómo derivar un estimador de $y=(y_1, \dots, y_n)'$ de forma que: (i) sea compatible con el modelo trimestral postulado en [4], (ii) verifique la restricción longitudinal [5] e (iii) goce de buenas propiedades estadísticas?

² Asumiendo que ambas series son I(1).

Una solución que ha alcanzado una amplia difusión es la propuesta por Chow y Lin (1971) que consiste en imponer al estimador las propiedades de linealidad, insesgadez y varianza mínima, en el marco del modelo [4] y [5]. A continuación se exponen los principales resultados de la aplicación del procedimiento de Chow-Lin al modelo de Litterman. Véase Quilis (2001) y las referencias ahí citadas para una exposición detallada del método de Chow-Lin.

Expresando el modelo trimestral [1] en forma matricial se obtiene:

$$[6] \quad y = x\beta + u$$

La matriz de agregación temporal asociada a [5] es:

$$[7] \quad C = I_N \otimes c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde I_N es la matriz identidad de dimensión N , \otimes denota el producto tensorial de Kronecker y $c=[1,1,1,1]$ es el vector de agregación. Esta expresión permite considerar otros casos: si $c=[1/4,1/4,1/4,1/4]$ se trata de la distribución temporal de un índice y, si $c=[0,0,0,1]$, se obtiene un caso de interpolación.

El modelo anual asociado a [1] se obtiene premultiplicando [6] por C :

$$[8] \quad Y = Cy = Cx\beta + Cu = X\beta + U$$

En este modelo, la matriz de varianzas y covarianzas de U es:

$$[9] \quad V = CvC'$$

siendo v la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación trimestral, cuya expresión es:

$$[10] \quad v = \sigma_a^2 (D'H'HD)^{-1}$$

donde $D:n \times n$ es una matriz de la forma:

$$[11] \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y $H:n \times n$ es una matriz dependiente de m según:

$$[12] \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu & 1 \end{bmatrix}$$

Naturalmente, D y H son las versiones matriciales de los operadores de diferenciación $\nabla=(1-B)$ y AR(1): $(1-\mu B)$.

El estimador lineal, insesgado y de varianza mínima (ELIO) propuesto por Chow-Lin y adaptado al modelo de Litterman es:

$$[13] \quad \hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}Y) = (X'(D'H'HD)X)^{-1}(X'(D'H'HD)Y)$$

Esta expresión indica que la estimación del vector de parámetros se obtiene aplicando el método de los mínimos cuadrados generalizados al modelo anual que relaciona el agregado Y con el indicador X . La matriz de varianzas y covarianzas V depende de \mathbf{m} como puede apreciarse en [9] y [10]. De esta forma, la rotación del espacio (Y,X) necesaria para que la estimación mínimo-cuadrática se atenga a las condiciones ideales se realiza teniendo en cuenta el modelo AR(2) de las perturbaciones expresado en [2]. Por su parte, los residuos anuales se definen de la manera habitual como:

$$[14] \quad \hat{U} = Y - X\hat{\beta}$$

Finalmente, la expresión para el estimador ELIO de y es:

$$[15] \quad \hat{y} = x\hat{\beta} + vC'V^{-1}\hat{U} = x\hat{\beta} + L\hat{U}$$

La ecuación anterior determina dicho estimador como la agregación de un término relacionado linealmente con el indicador y de un residuo anual trimestralizado. La principal característica del estimador radica en la dependencia del filtro de desagregación temporal L , de la forma del modelo trimestral y , en particular, de la estructura dinámica de sus perturbaciones.

La interpretación de la ecuación [15] es muy sencilla: la serie trimestral y es el resultado de añadir al indicador x (debidamente escalado a través de \mathbf{b}) un factor de ajuste derivado de la distribución sin indicador de la discrepancia anual entre dicho indicador y la serie anual Y . Esta discrepancia anual o residuo es repartida en cada trimestre en función de la matriz C de agregación temporal y del modelo AR(2) de la perturbación trimestral antes comentado.

En consecuencia, las propiedades dinámicas de y están determinadas como una combinación de las de x y de las del residuo distribuido. Así, las propiedades de carácter intraanual de y están condicionadas a las de x . En particular, la estacionalidad de la serie trimestralizada es la del indicador igual que otros elementos de alta frecuencia tales como efectos de calendario, valores atípicos, etc. Idealmente, si el indicador aproxima adecuadamente al agregado en el dominio observable, los residuos serán pequeños y el primer término de lado derecho de [15] dominará.

La estimación de la varianza de la perturbación trimestral se deriva de los residuos trimestrales como:

$$[16] \quad \hat{\sigma}_a^2 = n^{-1}(\hat{y} - x\hat{\beta})'(\hat{y} - x\hat{\beta})$$

Una importante ventaja de los métodos basados en modelos es que permiten obtener intervalos de confianza para las estimaciones trimestrales a partir de la correspondiente matriz de varianzas y covarianzas trimestral v :

$$[17] \quad \Sigma_y = (I_n - LC)v + (x - LX)\Sigma_\beta(x - LX)'$$

Esta última ecuación establece que la incertidumbre que acompaña a las estimaciones trimestrales está asociada con dos fuentes: una vinculada con la variabilidad de las

perturbaciones estocásticas trimestrales u y otra asociada con la imprecisión en que se incurre al estimar \mathbf{b} .

4. ALGORITMO DE ESTIMACION: ENFOQUE CLASICO

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, la aplicación del enfoque de Litterman requiere la estimación o determinación preliminar del parámetro \mathbf{m} . Este problema es muy similar al que aparece en el método de Chow-Lin por lo que, siguiendo a di Fonzo (1987), la opción más recomendable consiste en estimar dicho parámetro adaptando la propuesta que Bournay y Laroque (1979) hacen para mejorar el proceso de estimación en el método de Chow-Lin.

Estos autores proponen determinar una malla de valores para \mathbf{m} con, $-1 < \mu < 1$, determinar a continuación los valores de β y σ_a^2 que maximizan la función de verosimilitud del modelo anual, condicionados a la elección de \mathbf{m} y seleccionar el valor de \mathbf{m} que arroje el mayor valor de la secuencia de funciones de verosimilitud maximizadas, siendo la transformación logarítmica de dicha función:

$$[18] \quad \ell(\beta, \sigma_a^2 | \mu) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma_a^2) - \frac{1}{2} \ln(|Cv(\mu)C'|) - \frac{1}{2\sigma_a^2} (Y - X\beta)' (Cv(\mu)C')^{-1} (Y - X\beta)$$

siendo $v = \sigma_a^2 (D'H(\mu)'H(\mu)D)^{-1}$.

El algoritmo Bournay-Laroque puede ser expresado de la siguiente forma:

- Para $\mu \in (-1, 1)$, con $\Delta\mu$ arbitrariamente pequeño, aplicar los pasos 1 y 2:
- Paso 1: Estimar \mathbf{b} y σ_a^2 según las ecuaciones de Chow-Lin:

$$\begin{aligned} \beta &= (X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}Y) \\ \sigma_a^2 &= n^{-1}(\hat{y} - x\hat{\beta})'D'H(\mu)'H(\mu)D(\hat{y} - x\hat{\beta}) \end{aligned}$$

- Paso 2: Evaluar la función de verosimilitud expresada en [18].
- Seleccionar el valor de \mathbf{m} que haga máxima la secuencia de funciones de verosimilitud evaluadas en el bucle anterior. Designando dicho valor por μ^+ se obtiene la estimación final según:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(\mu^+) &= (X'V(\mu^+)^{-1}X)^{-1}(X'V(\mu^+)^{-1}Y) \\ \hat{y}(\mu^+) &= x\hat{\beta}(\mu^+) + v(\mu^+)C'V(\mu^+)^{-1}\hat{U} = x\hat{\beta}(\mu^+) + L(\mu^+)\hat{U} \\ \sigma(\mu^+)_a^2 &= n^{-1}(\hat{y}(\mu^+) - x\hat{\beta}(\mu^+))'D'H(\mu^+)'H(\mu^+)D(\hat{y}(\mu^+) - x\hat{\beta}(\mu^+)) \end{aligned}$$

Este procedimiento iterativo puede ser computacionalmente exigente por lo que Barbone *et al.* (1981) proponen minimizar la suma ponderada de cuadrados del modelo anual, esto es, el último término de [18] cambiado de signo:

$$[19] \quad S(\beta | \mu) = (Y - X\beta)' (Cv(\mu)C')^{-1} (Y - X\beta)$$

El algoritmo se aplica de la misma forma, sustituyendo $\ell(\bullet)$ por $S(\bullet)$. Esta variante es teóricamente más robusta frente a desviaciones de la hipótesis de normalidad de las perturbaciones del modelo.

5. ALGORITMO DE ESTIMACION: ENFOQUE BAYESIANO

En el algoritmo expuesto en la sección anterior, la incertidumbre que rodea a la estimación del parámetro \mathbf{m} no es explícitamente cuantificada. Una forma de resolver esta limitación consiste en adoptar un enfoque parcialmente bayesiano, asumiendo que \mathbf{m} es una variable aleatoria cuya función de distribución es especificada *a priori* y aplicando a continuación el método de Monte Carlo junto con el algoritmo de Bournay-Laroque para realizar su estimación. La incertidumbre que rodea a la estimación de \mathbf{m} puede ser importante, debido al perfil plano que puede adoptar la función de verosimilitud en torno a su máximo (Cardoso, 1999). En estos casos resulta especialmente útil la información concerniente a la variabilidad muestral de su estimación, ya que permite modificar dicha estimación sobre una base objetiva, si es menester.

De esta manera, mediante la incorporación de un prior explícito para el parámetro \mathbf{m} el analista puede representar de forma cuantitativamente concisa sus opiniones acerca de \mathbf{m} , tanto en términos de su valor promedio como de su varianza. En consecuencia, se considera que el parámetro \mathbf{m} puede ser caracterizado mediante un prior uniforme en un rango (a,b):

$$[20] \quad \mu : U(a,b) \quad -1 < a < b < 1$$

Asimismo, se asume que la varianza de \mathbf{m} es incierta aunque superiormente acotada por la elección inicial de los hiperparámetros a y b que figuran en [20]. Esta incertidumbre se va a representar mediante un factor de corrección r cuya función de distribución es de tipo Beta:

$$[21] \quad r : \text{Beta}(\alpha, \beta) \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

El algoritmo propuesto es el siguiente:

- Paso 1: Determinación de los hiperparámetros de las distribuciones *a priori* sobre \mathbf{m} y sobre r :

$$\tau_0 = (a_0, b_0, \alpha_0, \beta_0)$$

- Paso 2: Obtener una realización de r según [20] y [21]

$$r \leftarrow \text{Beta}(\alpha_0, \beta_0)$$

- Paso 3: Modificar a y b de forma consistente con la nueva varianza:

$$\begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} \leftarrow \begin{cases} E(\mu) = (a + b)/2 \\ r V(\mu) = r((b - a)^2)/12 \end{cases}$$

- Paso 4: Obtener una realización de \mathbf{m} según:

$$\mu \leftarrow U(a^*, b^*)$$

- Paso 5: Estimar \mathbf{b} y σ_a^2 según las ecuaciones de Chow-Lin:

$$\hat{\beta} = (X' V(\mu)^{-1} X)^{-1} (X' V(\mu)^{-1} Y)$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = n^{-1} (\hat{y}(\mu) - x\hat{\beta}(\mu))' D' H(\mu)' H(\mu) D (\hat{y}(\mu) - x\hat{\beta}(\mu))$$

- Paso 6: Repetir M veces los pasos 4 y 5, siendo M un número elevado. De esta forma se obtiene una secuencia de valores de \mathbf{m} de la que se selecciona el valor que hace máxima la función de verosimilitud:

$$\mu^+ = \max_{\mu} (\ell(\hat{\beta}, \hat{\sigma}_a^2 | \mu_1), \dots, \ell(\hat{\beta}, \hat{\sigma}_a^2 | \mu_M))$$

- Paso 7: Repetir R veces los pasos 2 a 6, siendo también R un número elevado. De esta manera, se obtiene un vector de valores $\mu^+ = (\mu_1^+, \dots, \mu_R^+)$ que permite calcular los momentos *a posteriori* según:

$$\hat{\mu} = R^{-1} \sum_{h=1}^R \mu_h^+$$

$$V(\hat{\mu}) = R^{-1} \sum_{h=1}^R (\hat{\mu} - \mu_h^+)^2$$

- Paso 8: Con el valor de \mathbf{m} calculado en el paso anterior, se obtienen los estimadores finales de \mathbf{b} y σ_a^2 según las ecuaciones de Chow-Lin.

Este procedimiento puede ser modificado en varias direcciones. Algunas son sencillas como, por ejemplo, considerar funciones más generales como la Beta en lugar de la uniforme para el prior de \mathbf{m} . Otras son más complejas, como la extensión del marco bayesiano a \mathbf{b} y σ_a^2 , estimando todos los parámetros del modelo mediante el muestreo de Gibbs.

6. INTERPRETACION BASADA EN UNA FUNCION DE PERDIDAS

Los métodos de distribución temporal también pueden derivarse a partir de un planteamiento matemático, considerando la serie trimestralizada y como la solución de un programa de optimización. Así, se plantea una función objetivo que recoge una determinada métrica de las desviaciones o discrepancias entre la serie objetivo y los indicadores x debidamente escalados. Las restricciones que ha de satisfacer la solución representan la consistencia temporal de las estimaciones.

Una de las especificaciones más comunes dentro de este planteamiento asume que la función objetivo es cuadrática por lo que, al ser las restricciones lineales, la solución también es lineal en las variables observadas:

$$[22] \quad \underset{y, \beta}{\text{MIN}} \quad L = \mathbf{u}' \mathbf{W} \mathbf{u} = (\mathbf{y} - \mathbf{x} \beta)' \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{x} \beta) \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{C} \mathbf{y}$$

Esta función de pérdidas equivale a una medida de volatilidad de las discrepancias entre la estimación trimestral y los indicadores, ponderadas en función de las características dinámicas que el analista considera más relevantes.

De esta manera, la matriz de pesos \mathbf{W} sirve para especificar los rasgos dinámicos del problema. Así, si lo que se desea es minimizar la volatilidad de las discrepancias entre los crecimientos intertrimestrales de y y x , se considera que $\mathbf{W} = \mathbf{D}' \mathbf{D}$ y se obtiene la métrica de Fernández:

$$[23] \quad L_F = \mathbf{u}' \mathbf{D}' \mathbf{D} \mathbf{u}$$

Obsérvese que $\mathbf{D}' \mathbf{D}$ es la inversa de la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación de un modelo como [1] suponiendo que dicha perturbación sigue un paseo aleatorio y que

$\sigma_a^2 = 1$. Tomando como punto de partida esta equivalencia, la métrica asociada al procedimiento de Litterman es:

$$[24] \quad L_L = u'D'H(\mu)'H(\mu)Du$$

Como se demostrará a continuación, esta métrica describe una situación intermedia entre el planteamiento en el que el crecimiento es la variable relevante (caso de Fernández) y aquél en el que la variable principal es la aceleración:

$$[25] \quad L_A = u'D'D'DDu = u'D_2'D_2u$$

donde $D_2=D'D$, resultando ser el análogo matricial del operador de doble diferencia regular $\Delta^2=(1-B)^2$.

Siguiendo a Pinheiro y Coimbra (1993), la matriz $H(\mu)'H(\mu)$ puede ser descompuesta, de forma aproximada, según:

$$[26] \quad H(\mu)'H(\mu) \cong (1-\mu)^2 I_n + \mu D'D$$

Sustituyendo [26] en [24] y ordenando términos se obtiene:

$$[27] \quad L_L \cong (1-\mu)^2 u'D'Du + \mu u'D_2'D_2u = \theta_F L_F + \theta_A L_A$$

siendo $\theta_F=(1-\mu)^2$ y $\theta_A=\mu$, respectivamente, las ponderaciones que reciben L_A y L_F en la métrica de Litterman.

En consecuencia, la función de pérdidas subyacente al método de Litterman se puede interpretar como una ampliación de la de Fernández, de forma que se incluye como argumento no sólo la volatilidad de las primeras diferencias de los residuos sino también la de las segundas diferencias. En otros términos, la solución del programa de Litterman trata de que las discrepancias entre los ritmos de crecimiento y las aceleraciones de la serie trimestralizada y de los indicadores sean lo más pequeñas posibles. A partir de [27] se pueden considerar los siguientes casos:

- a. $0 < \mu < 1$: esta es la situación más verosímil y conduce a la búsqueda simultánea de una reducida volatilidad tanto de los crecimientos como de las aceleraciones de las discrepancias. Cuanto mayor sea μ tanto más cuentan las aceleraciones frente a los crecimientos, de forma que, en el límite ($\mu \approx 1$) sólo las primeras son consideradas.
- b. $\mu = 0$: el método de Litterman da lugar al de Fernández y sólo la volatilidad de los crecimientos intertrimestrales es tenida en cuenta.
- c. $-1 < \mu < 0$: es el caso menos frecuente. La presencia de correlación serial negativa en la serie de primeras diferencias de las innovaciones trimestrales da lugar a una relación de intercambio (*trade-off*) entre la minimización de la varianza de los crecimientos y la de las aceleraciones. No obstante, la ponderación que recibe L_F es siempre muy superior a la de L_A , por lo que la solución obtenida se asemejará bastante a la de Fernández.

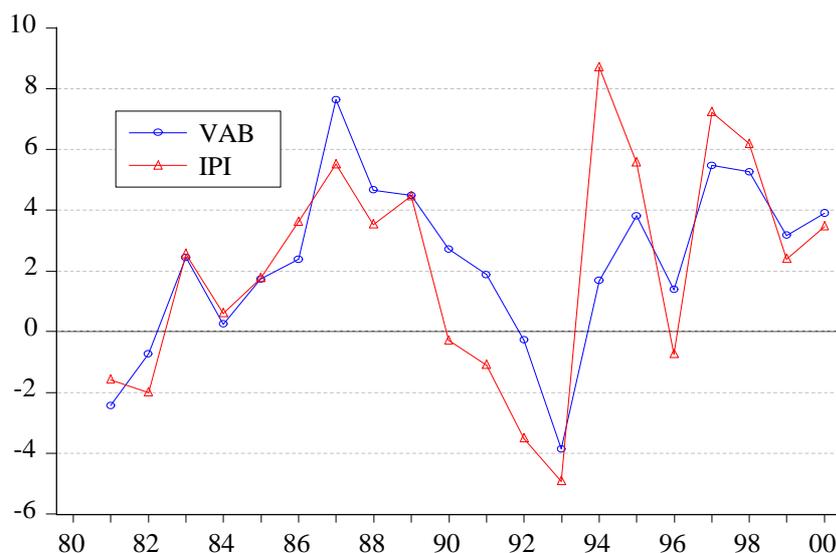
7. UNA APLICACIÓN

En esta sección se trimestraliza el Valor Añadido Bruto (VAB) real a precios básicos, expresado en base de 1995, de las ramas industriales manufactureras (Y_T), utilizando como indicador el Índice de la Producción Industrial (IPI) de las citadas industrias (X_T). El período analizado abarca desde 1980 hasta 2000, con lo que $N=21$ y $n=84$. Ambas series se han obtenido de la base de datos Tempus del INE (<http://www.ine.es>). Las versiones anual y trimestral del IPI se

han obtenido a partir de los promedios correspondientes de los datos mensuales. Naturalmente, este ejercicio es meramente ilustrativo y no refleja, de forma alguna, el proceso de elaboración de la CNTR.

El análisis preliminar de estas series permite considerarlas como integradas de primer orden aunque no cointegradas, por lo que su representación más adecuada debe hacerse en primeras diferencias o en tasas de variación. Con el fin de facilitar el estudio, se considerará esta última transformación, cuya representación gráfica es la siguiente:

Gráfico 1: Series anuales
Tasas de crecimiento



Se aprecia un grado elevado de conformidad entre ambas series (el coeficiente de correlación es 0.78), la coincidencia casi total de los puntos de giro y la mayor volatilidad del IPI frente al VAB (1.34 superior). La cuantificación de esta relación puede hacerse mediante el siguiente modelo de regresión:

$$[28] \quad T(Y_T) = 1.61 + 0.48T(X_T) + \frac{a_T}{(1 - 0.46B)}$$

(2.31)
(4.74)
(2.19)

donde $T(Z_T)$ es la tasa de variación de Z_T y entre paréntesis figuran los t-ratios. El coeficiente de determinación corregido es 0.65 y no se aprecian signos de correlación serial en los residuos, a tenor del valor de la función de autocorrelación en el primer retardo (0.01) y del estadístico Q evaluado en el duodécimo retardo (10.72). El ajuste muestral puede ser mejorado si se intervienen, en el modelo de regresión, las observaciones de 1987 y 1992 pero, con el fin de mantener la sencillez de la exposición no se ha realizado dicha intervención.

Una vez asegurada la congruencia entre el agregado anual y el indicador trimestral, se realiza la trimestralización del primero a través del segundo utilizando los métodos de Chow-Lin, Fernández y Litterman. Los resultados, obtenidos con el programa Ecotrim³ de Eurostat (Barcellan, 1994), se resumen en la tabla siguiente:

³ Este programa puede solicitarse en la dirección de correo electrónico <Roberto.Barcellan@cec.eu.int>.

Tabla 1: Estimación del modelo trimestral

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \frac{a_t}{(1 - \rho B)(1 - \mu B)}$$

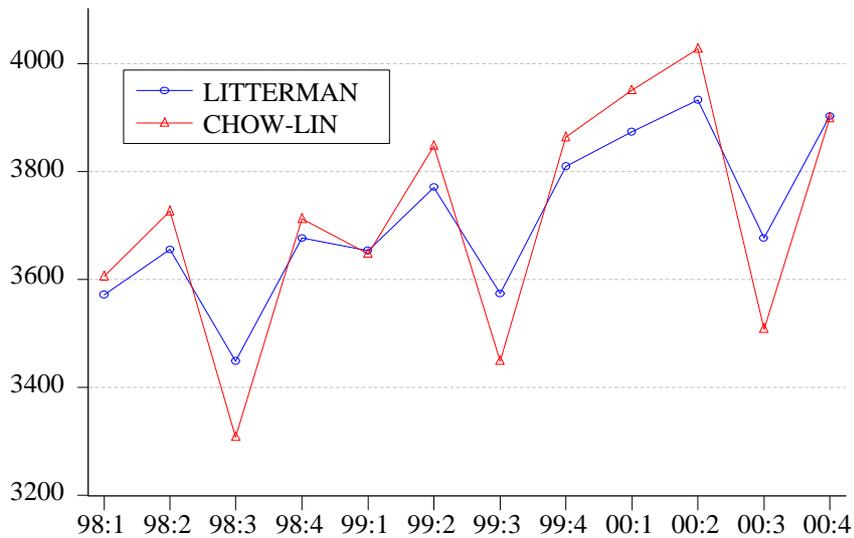
Método	α	β	ρ	μ
Chow-Lin	3.79 (0.01)	30.68 (13.43)	0.87	0.00
Fernandez	722.18 (2.82)	21.08 (6.96)	1.00	0.00
Litterman	1128.28 (5.43)	16.30 (6.57)	1.00	0.91

Los valores **en negrita** son fijos durante la estimación.

Entre paréntesis figuran los t-ratios.

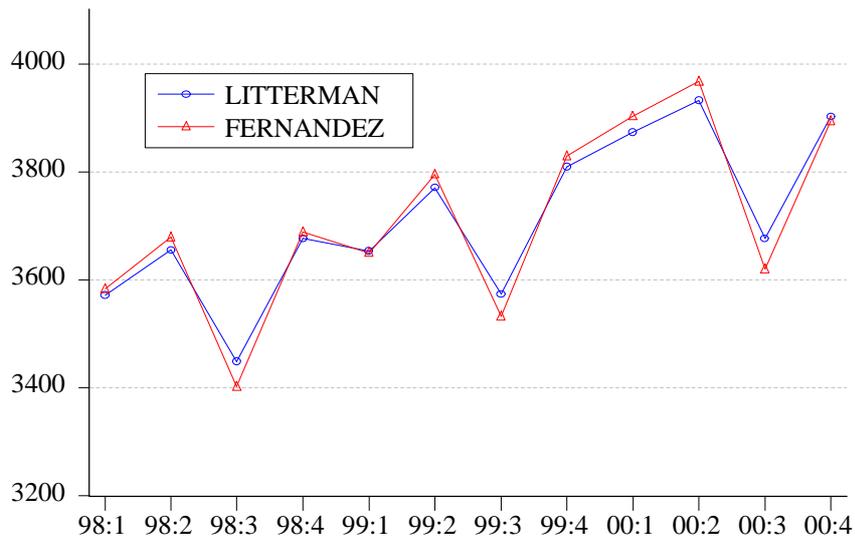
En el gráfico 2 se muestran las trimestralizaciones efectuadas con los procedimientos de Chow-Lin y de Litterman. Con el fin de mejorar la interpretación de los resultados sólo se presentan los tres últimos años.

Gráfico 2: Series trimestralizadas. Procedimientos de Litterman y Chow-Lin Niveles



Se aprecia una notable similitud entre los perfiles de ambas series, tanto en lo que se refiere a la tendencia como a la estacionalidad, así como la mayor suavidad de la trimestralización de Litterman. Los mismos rasgos cualitativos se aprecian al comparar los procedimientos de Fernández y de Litterman, si bien las diferencias son mucho menos acusadas.

Gráfico 3: Series trimestralizadas. Procedimientos de Litterman y Fernández Niveles



Todos estos resultados confirman las conclusiones teóricas derivadas en la sección anterior, de manera que se aprecia cómo el método de Litterman genera estimaciones más suaves que las de Chow-Lin y Fernández, al tener en cuenta de forma explícita la volatilidad de las aceleraciones y no sólo la de los crecimientos. Reforzando estas conclusiones, la siguiente tabla cuantifica estos rasgos:

Tabla 2: Medidas de volatilidad de las tasas interanuales de y_t

Método	σ	Máximo	Mínimo	Recorrido
Chow-Lin	3.57	11.83	-7.18	19.01
Fernández	3.20	10.62	-5.84	16.46
Litterman	3.06	10.15	-5.21	15.36

Desde un punto de vista cualitativo, la semejanza entre las series trimestralizadas por los tres métodos es notable, tanto en lo que concierne a los niveles como en lo que respecta a las tasas interanuales de variación, tal y como se aprecia en la siguiente tabla:

Tabla 3: Correlaciones entre las estimaciones trimestrales Promedio 1980:1-2000:4

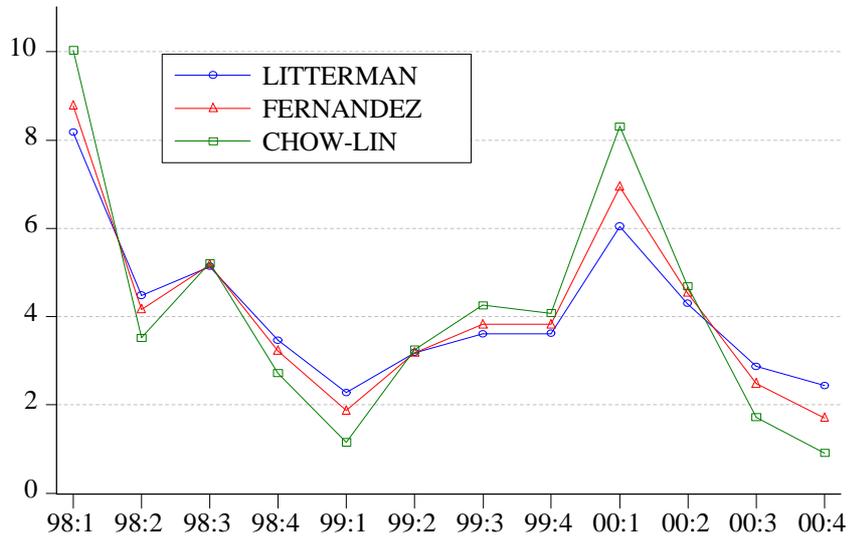
	Chow-Lin	Fernández	Litterman
Chow-Lin	1	0.99	0.98
Fernández	0.99	1	0.99
Litterman	0.96	0.99	1

Sobre la diagonal: niveles
Bajo la diagonal: tasas interanuales

No obstante, desde una perspectiva cuantitativa, las diferencias sí son más apreciables, sobre todo entre los métodos de Chow-Lin y Litterman. Estas diferencias pueden dar lugar a estimaciones coyunturales muy distintas, como se aprecia en el gráfico 4, en el que discrepancias de más de un punto porcentual no son infrecuentes y resultan especialmente

elevadas en los puntos de giro, observaciones de las series particularmente relevantes para el coyunturista.

Gráfico 4: Series trimestralizadas.
Procedimientos de Litterman, Fernández y Chow-Lin
Tasas interanuales



Estos resultados se extienden a toda la muestra, como se aprecia en la siguiente tabla:

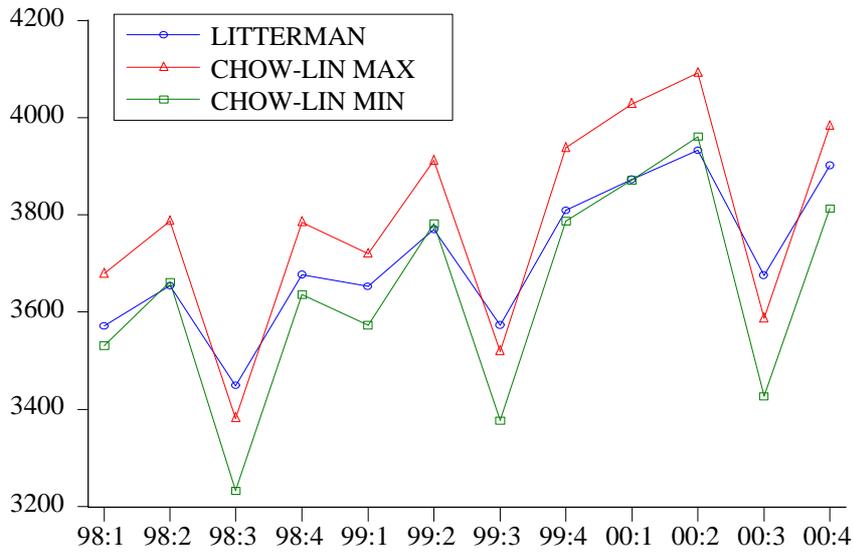
Tabla 4: Diferencias porcentuales absolutas entre las estimaciones
Promedio 1980:1-2000:4

	Chow-Lin	Fernández	Litterman
Chow-Lin	.	1.77	2.63
Fernández	0.67	.	0.88
Litterman	0.98	0.32	.

Sobre la diagonal: niveles
Bajo la diagonal: tasas interanuales

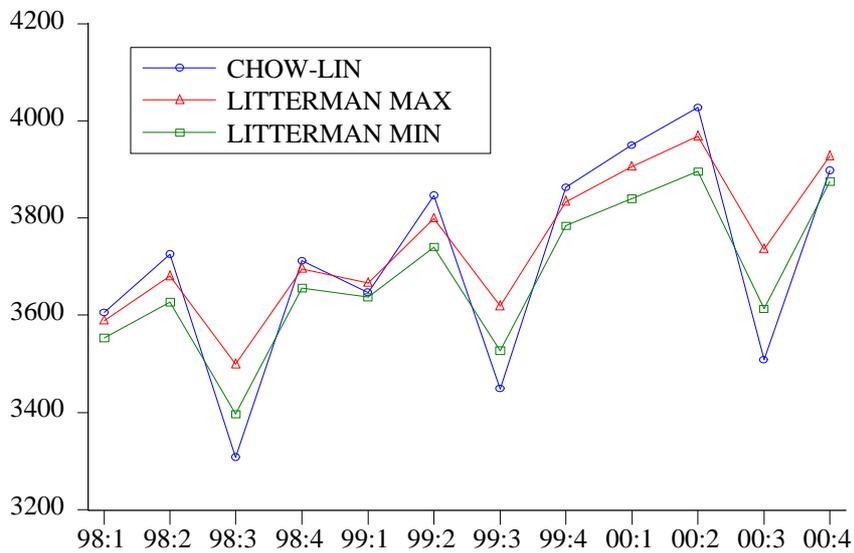
La incertidumbre que rodea a estas tres estimaciones, que puede cuantificarse por medio de la ecuación [17], ofrece una perspectiva muy interesante. Por una parte, los intervalos de confianza al 95 por ciento asociados a las estimaciones basadas en el método de Chow-Lin engloban casi todo el tiempo a las estimaciones puntuales generadas por el de Litterman, produciéndose las excepciones usualmente en el mínimo estacional del tercer trimestre. En consecuencia, las estimaciones del segundo método podrían considerarse, casi todo el tiempo, estadísticamente equivalentes a las del primero. En el siguiente gráfico se aprecia este hecho:

Gráfico 5: Series trimestralizadas.
Intervalo de confianza de Chow-Lin vs Litterman.
Niveles



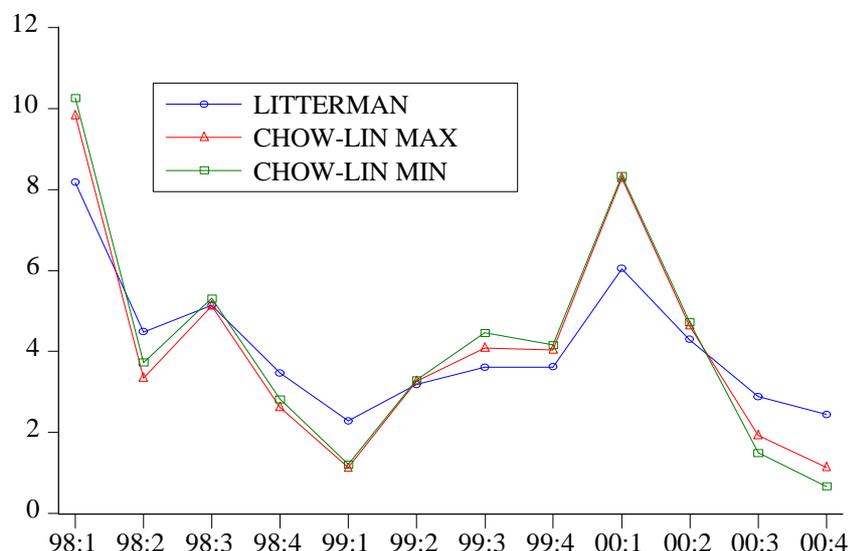
Ahora bien, si se usan los intervalos de bandas de confianza vinculados con las estimaciones del procedimiento de Litterman, se aprecia cómo la estimación de Chow-Lin es sistemáticamente diferente, de manera que el resultado anterior no se produce:

Gráfico 6: Series trimestralizadas.
Intervalo de confianza de Litterman vs Chow-Lin.
Niveles



Por último, la comparación entre las tasas interanuales no deja lugar a dudas, incluso en la mejor de las circunstancias:

Gráfico 7: Series trimestralizadas
Intervalo de confianza de Chow-Lin vs Litterman
Tasas interanuales



En consecuencia, ambos procedimientos ofrecen estimaciones similares pero no equivalentes. Repitiendo este análisis con los métodos de Litterman y Fernández, se aprecia una equivalencia entre los niveles, de forma que las bandas de confianza de uno incluyen a la estimación puntual del otro, pero no en lo que concierne a las tasas interanuales de variación.

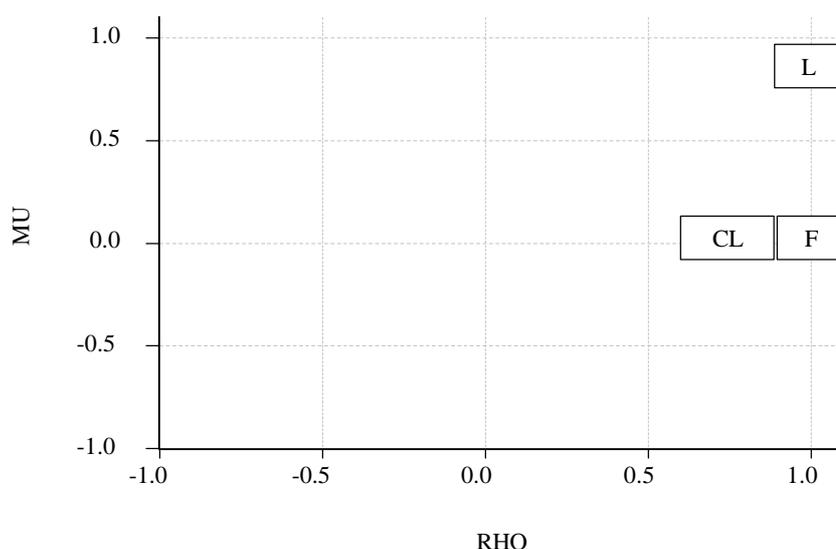
8. CONCLUSIONES

El procedimiento de Litterman proporciona una interesante generalización del de Fernández, resultando su interpretación especialmente atractiva en términos de un compromiso entre suavidad de los crecimientos y suavidad de las aceleraciones. Asimismo, la posibilidad que ofrece de tener en cuenta estructuras dinámicas más complejas que el de Fernández lo hace especialmente apropiado para la mensualización de indicadores trimestrales, situación particularmente relevante en el caso de las estimaciones rápidas de la CNTR (*flash estimates*).

La elección de un método u otro de desagregación temporal condiciona los resultados de manera significativa, como la aplicación seleccionada ha puesto de manifiesto. En estas circunstancias: ¿cuál elegir? No existe una respuesta universal, independiente de la situación práctica específica pero sí pueden ofrecerse algunas guías tentativas:

1. Si existe cointegración entre indicadores y agregado trimestral, el método más apropiado es el de Chow-Lin.
2. En caso contrario, el procedimiento de Litterman resulta el más recomendable, debido a su generalidad.
3. Si la evidencia respecto a la cointegración es poco robusta o dudosa, el procedimiento de Fernández resulta una elección intermedia entre el método de Chow-Lin y el de Fernández, como pone de manifiesto el siguiente gráfico, elaborado según los resultados expuestos en la sección anterior:

Gráfico 8: Ubicación en el espacio (ρ, μ) de los métodos de Chow-Lin (CL), Fernández (F) y Litterman (L)



4. En todos los casos, ha de tenerse muy en cuenta que la evidencia sobre la cointegración es indirecta, debido a que sólo es contrastable con los datos anuales. Como la agregación temporal modifica las estructuras dinámicas, tanto univariantes como bivariantes (véase Engel (1974), Wei (1990) y Tsay (2000)), la inferencia debe ser extremadamente cauta y ha de estar acompañada por el máximo posible de información extramuestral respecto a la relación entre indicadores y agregados, propiedades estadísticas de ambos, procesos de compilación, etc.

Por último, este trabajo puede ser extendido en múltiples direcciones, de las cuales se mencionan dos:

- a- Generar evidencia de tipo Monte Carlo acerca de la idoneidad de los tres procedimientos de desagregación temporal considerados, de forma que la elección de uno u otro goce de un soporte empírico mayor.
- b- Incorporar en los algoritmos de estimación el método parcialmente bayesiano expuesto en la sección 5, de manera que la cuantificación de este parámetro tan importante pueda ser mejorada.

REFERENCIAS

- Barbone, L., Bodo, G. y Visco, J. (1981) "Costi e profitti in senso stretto", *Bolletino della Banca d'Italia*, n. 36, p. 465-510.
- Barcellan, R. (1994) "ECOTRIM: A program for temporal disaggregation of time series", INSEE-Eurostat Workshop on Quarterly National Accounts, París, diciembre.
- Bournay, J. y Laroque, G. (1979) "Réflexions sur la méthode d'elaboration des comptes trimestriels", *Annales de l'INSEE*, n. 36, p. 3-30.
- Cardoso, F.N. (1999) "Métodos econométricos de desagregação de series temporais", Bolsa de Derivados do Porto, Porto, Portugal.
- Chow, G. y Lin, A.L. (1971) "Best linear unbiased distribution and extrapolation of economic time series by related series", *Review of Economic and Statistics*, vol. 53, n. 4, p. 372-375.
- di Fonzo, T. (1987) "La stima indiretta di serie economiche trimestrali", Cleup Editore, Padua, Italia.

- Eurostat (1998) *Handbook of Quarterly National Accounts*, European Commission - Eurostat, Luxembourg.
- Engel, E.M.R.A. (1984) "A unified approach to the study of sums, products, time aggregations and other functions of arma processes", *Journal of Time Series Analysis*, vol. 5, n. 3, p. 159-171.
- Fernández, R.B. (1981) "Methodological note on the estimation of time series", *Review of Economic and Statistics*, vol. 63, n. 3, p. 471-478.
- INE (1993) *Contabilidad Nacional Trimestral de España. Metodología y serie trimestral 1970-1992*, Instituto Nacional de Estadística, Madrid, España.
- Litterman, R.B. (1983a) "A random walk, Markov model for the distribution of time series", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 1, n. 2, p. 169-173.
- Litterman, R.B. (1983b) "A random walk, Markov model for the distribution of time series", Federal Reserve Bank of Minneapolis, Staff Report n. 84.
- Litterman, R.B. (1984) "Above-average national growth in 1985 and 1986", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, vol. 8, n. 4.
- Pinheiro, M. y Coimbra, C. (1993) "Distribution and extrapolation of time series by related series using logarithms and smoothing penalties", *Economia*, vol. 17, p. 359-374.
- Quilis, E.M. (2001) "Notas sobre desagregación temporal de series económicas", Instituto de Estudios Fiscales, Papeles de Trabajo n. 1/01.
- Tsay, R.S. (2000) "Notes on time series analysis", Graduate School of Business, University of Chicago, Documento Interno.
- Wei, W.W.S. (1990) *Time series analysis: univariate and multivariate*, Addison-Wesley, Redwood City, California, U.S.A.