

# **Estimación del ciclo económico mediante filtros de Butterworth<sup>1</sup>**

**Juan Bógalo  
Enrique M. Quilis**

**S.G. Cuentas Nacionales**

**Instituto Nacional de Estadística**

<sup>1</sup> Este trabajo se inscribe en el marco del proyecto BUSY (*Tools and Practices for Business Cycle Analysis in National Statistical Institutes of the European Union*), en el que participa el INE de España junto con los Institutos Nacionales de Estadística de Francia (INSEE) e Italia (ISTAT). Los autores agradecen las conversaciones mantenidas con Ana Abad, Jesús Bouso, Alfredo Cristóbal, Rafael Frutos, Francisco Melis, Christophe Planas y Silvia Relloso sobre diversos aspectos de la estrategia de filtrado cíclico. Las opiniones formuladas en este informe corresponden a los autores, sin que el INE coincida de forma necesaria con ellas.

# Resumen

En este trabajo se documenta la estrategia de estimación de la señal cíclica empleada en INE (2002b). En particular, se exponen los filtros de Butterworth de paso en banda empleados, su relación con los filtros de Hodrick-Prescott y de Baxter-King así como con las tasas de crecimiento. La estrategia de estimación de la señal cíclica propuesta descansa en un proceso bietápico que combina la metodología ARIMA de descomposición canónica descrita en INE (2002a) con el uso de filtros de Butterworth diseñados en el dominio de la frecuencia, como aproximación a un procesador cíclico ideal de paso en banda.

**Palabras clave:** ciclos económicos, filtros lineales, filtros de Butterworth, filtro de Hodrick-Prescott, tasas de crecimiento.

# 1. Introducción

*"Los ciclos económicos son un tipo de fluctuaciones que se presentan en la actividad económica global de las naciones cuyo sistema productivo descansa principalmente en la empresa privada: un ciclo consta de expansiones que se producen, aproximadamente, al mismo tiempo en muchas ramas de la actividad económica y que son seguidas, con el mismo carácter general, por recesiones, contracciones y recuperaciones, que conducen a la fase de expansión del ciclo siguiente. Esta sucesión de cambios es recurrente pero no periódica; la duración de los ciclos varía desde algo más de un año hasta diez o doce; no son divisibles en ciclos más cortos de carácter semejante y con amplitud aproximadamente igual."*

*A.F. Burns y W.C. Mitchell, 1946, **Measuring business cycles.***

Una buena parte de la macroeconomía moderna está centrada, como en los tiempos de Burns y Mitchell, en torno a la explicación y medición del fenómeno de los ciclos económicos. En ambos aspectos se han producido notables avances, si bien siguen existiendo importantes y enconadas controversias tanto teóricas como econométricas.

En particular, la medición cuantitativa de las fluctuaciones económicas sigue siendo una ardua tarea. La dificultad radica, principalmente, en tres elementos. Por una parte, las series macroeconómicas no suelen tener una longitud adecuada para detectar un número suficiente de ciclos completos sobre los que edificar un modelo estadístico explícito. Por ejemplo, para disponer de 100 oscilaciones completas de 4 años se necesitaría una serie de 400 años, lo que es bastante difícil.<sup>2</sup>

En segundo lugar, el ciclo económico, a diferencia de la tendencia y de la estacionalidad, es un fenómeno que no está asociado a una frecuencia única o principal. Su ubicación se encuentra en una banda espectral relativamente amplia, lo que dificulta extraordinariamente su modelización de una forma mínimamente parsimoniosa.<sup>3</sup>

Finalmente, la información cíclica contenida en una serie temporal es una señal estacionaria asociada a las bajas frecuencias. La tendencia también está vinculada con dichas frecuencias pero no es estacionaria. En consecuencia, la segunda "ahoga", desde un punto de vista espectral, a la primera. Por otra parte, tendencia y ciclo son conceptos teóricos difíciles de separar ya que comparten factores causales y, posiblemente, mecanismos de propagación.

---

<sup>2</sup> Aún disponiendo de esas series su utilidad para estos fines sería dudosa, dada la magnitud y variedad de cambios económicos estructurales registrados en los últimos siglos en las economías occidentales.

<sup>3</sup> Esto explica, al menos parcialmente, el interés por los modelos no lineales para recoger el comportamiento cíclico, ya que permiten expandir el alcance de la modelización sin incurrir en la sobreparametrización.

Naturalmente, difícil no es lo mismo que imposible. En este sentido, se han propuesto diversas estrategias para estimar el componente cíclico de una serie temporal, siendo los de Hodrick y Prescott (1997) y Baxter y King (1995) los más utilizados.<sup>4</sup>

En este trabajo se expone el uso de los filtros de Butterworth para la estimación de la señal cíclica de una serie temporal. Dichos filtros son estructuras lineales, racionales (ARMA) que permiten recoger las consideraciones a priori sobre el ciclo de manera sencilla y eficiente. En especial, estos filtros engloban al de Hodrick-Prescott como caso particular y, gracias a su forma ARMA, son más eficientes que el de Baxter-King. Esta metodología es la que se ha empleado en la estimación de las señales cíclicas de los principales agregados de la Contabilidad Nacional Trimestral (CNTR) presentados en INE (2002b).

La estructura del trabajo se detalla a continuación. En la segunda sección se derivan y analizan los filtros de Butterworth. La exposición comienza por los de paso bajo dentro de los cuales aparece, como caso particular, el de Hodrick-Prescott. A continuación se derivan los filtros de paso en banda mediante una transformación apropiada de los de paso bajo. Estos filtros, adecuadamente calibrados, permiten una estimación bastante precisa a la par que intuitiva de la señal cíclica de una serie temporal. La relación de estos filtros con las tasas de crecimiento se comenta en la tercera sección. Finalmente, en la cuarta sección se especifica la serie de entrada (*input*) del proceso de filtrado así como algunos detalles computacionales.

---

<sup>4</sup> Pero no son los únicos: véase Beveridge y Nelson (1981), Allen (1997) y Christiano y Fitzgerald (1999)

## 2. Filtros de Butterworth

Los filtros de Butterworth provienen, como muchos otros elementos del análisis de series temporales, de los desarrollos de la ingeniería eléctrica y de las telecomunicaciones, donde la necesidad de procesar señales es una de las principales actividades. A continuación, se examinan los filtros de paso bajo y, mediante una transformación de los mismos, se derivan los de paso en banda. Estos últimos son, precisamente, los que sustentan la estrategia de estimación propuesta. Un tratamiento de los filtros de Butterworth se encuentra en Otnes y Enochson (1972), Hamming (1977), Melis (1983, 1986, 1988, 1989), Oppenheim y Schaffer (1989) y Gómez (1998a, 1998b). Aplicaciones a la economía española se describen en Quilis (1999) y Bógalo (2002).

Como se verá más adelante, los filtros de Butterworth permiten tanto la estimación de tendencias a largo plazo como la extracción directa de una señal cíclica mediante, respectivamente, filtros de paso bajo y de paso en banda.

Asimismo, merece la pena destacar que el filtro de Hodrick-Prescott es un caso particular de un filtro de Butterworth de paso bajo, por lo que la utilización de estos filtros es más general y permite solventar algunas de las dificultades que presenta la utilización de aquél. Sobre estos filtros véase King y Rebelo (1993), Hodrick y Prescott (1997), Gómez (1998a, 1998b) y Kaiser y Maravall (1999), entre otros.

Por otra parte, la estructura ARMA racional de los filtros de Butterworth permite una representación más parsimoniosa, para igual grado de aproximación a un filtro ideal, que el de Baxter-King, que es de MA. Sobre este último punto véase Melis (1986).

Los filtros de Butterworth pueden ser interpretados como un prior que el analista aplica a la serie que desea procesar, de manera que refleja explícita y cuantitativamente sus consideraciones extramuestrales acerca de la señal que pretende estimar. En particular, en el caso del ciclo económico las consideraciones a priori que el analista tiene sobre este fenómeno se limitan a establecer un prior uniforme sobre una banda de frecuencias (p.e., oscilaciones entre 2 y 8 años) y a postular el carácter estacionario del fenómeno cíclico, en el sentido de que la serie filtrada esté libre de componentes no estacionarios como la tendencia y la estacionalidad.

---

### 2.1. Filtros de paso bajo

Los filtros de Butterworth de paso bajo son operadores ARMA cuya función de ganancia obedece a la siguiente expresión:

$$[2.1] \quad |G(w)|^2 = \frac{1}{1 + \left[ \frac{\tan(w/2)}{\tan(w_c/2)} \right]^{2d}} \quad 0 \leq w \leq \pi,$$

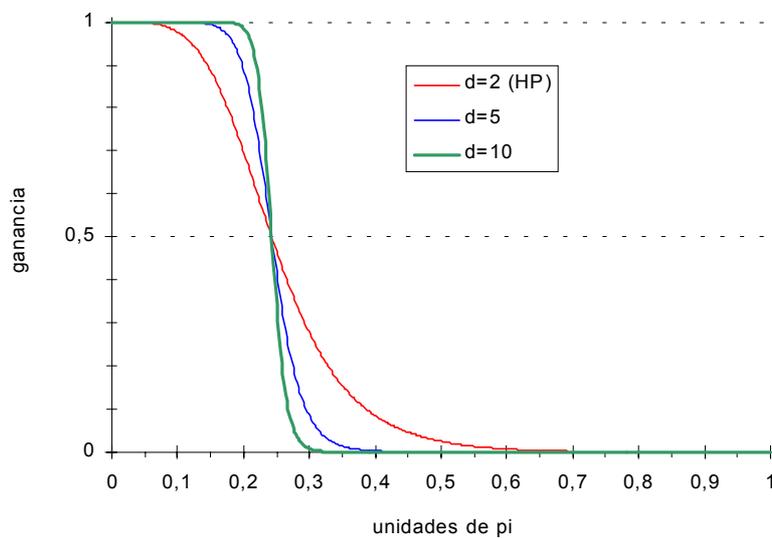
donde  $w$  es la frecuencia, expresada en radianes. Esta función está controlada por dos parámetros: la frecuencia de corte ( $w_c$ ) y el grado del filtro ( $d$ ). La primera es un

valor de referencia que se utiliza para calibrar la aproximación del filtro a uno ideal, ya que:

$$[2.2] \quad |G(\omega_c)|^2 = 1/2.$$

El parámetro  $d$  define la curvatura de la función de ganancia. Así, valores elevados del mismo dan lugar a funciones de ganancia de pendiente más acusada, de manera que la transición entre la banda de paso y la de rechazo se realiza de forma más abrupta. El siguiente gráfico ilustra este extremo:

**Gráfico 2.1: Filtros de Butterworth de paso bajo. Función de ganancia**



Asimismo, la función de ganancia definida en [2.1] está caracterizada por dos interesantes propiedades cuantitativas:

$$[2.3] \quad |G(0)|^2 = 1$$

y

$$[2.4] \quad |G(\pi)|^2 = 0.$$

La primera asegura la preservación del nivel de la serie que se utiliza como *input* y la segunda implica que la señal extraída a partir de dicho *input* es canónica, esto es, que no puede descomponerse adicionalmente en señal más ruido blanco.

Desde un punto de vista cualitativo, la función de ganancia de estos filtros posee un elevado grado tangencial en el origen y un perfil monótono en todo el dominio de definición. De esta forma, se garantiza un elevado nivel de extracción de la señal relevante (centrada en torno a  $w=0$ ) al mismo tiempo que no se inducen oscilaciones espurias como las que podría generar una función de ganancia con rizos (*ripples*).

Estas buenas propiedades, tanto cuantitativas como cualitativas, justifican el amplio uso de estos filtros en el ámbito de la ingeniería eléctrica y de las telecomunicaciones, en las que la necesidad de filtrar y transformar las variables es constante.

Los filtros de Butterworth poseen dos variedades: tipo tangente y tipo seno. La primera es la que se acaba de exponer y la segunda se obtiene sustituyendo en [2.1] la función tangente por la función seno. La interpretación es similar si bien el requisito canónico [2.4] ya no se satisface. Por esta razón se empleará en este trabajo la variante asociada a la función tangente.

La expresión del filtro desde el dominio del tiempo se obtiene a partir de la transformación de [2.1] mediante las siguientes expresiones:

$$[2.5] \quad \tan^2(w/2) = \frac{1}{\cos^2(w/2)} - 1,$$

$$[2.6] \quad \cos^2(w/2) = \frac{1 + \cos(w)}{2},$$

$$[2.7] \quad \cos(w) = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

y

$$[2.8] \quad e^{-iw} = B$$

siendo  $i = \sqrt{-1}$  la unidad imaginaria y B el operador de desfase  $Bz_t = z_{t-1}$ . Tras las correspondientes manipulaciones algebraicas se obtiene:

$$[2.9] \quad L(B,F) = \frac{(1+B)^d (1+F)^d}{(1+B)^d (1+F)^d + \lambda (1-B)^d (1-F)^d},$$

siendo  $F = B^{-1}$  y  $\lambda$  un parámetro asociado a la frecuencia de corte y al grado del filtro, según:

$$[2.10] \quad \lambda = \left[ \tan^{2d}(\omega_c / 2) \right]^{-1}.$$

Se trata, por lo tanto, de filtros ARMA que surgen de la combinación de sumadores y diferenciadores, y cuyas principales características son:

- Desfase nulo debido a la simetría del filtro.
- Generador de señales canónicas, gracias a la estructura no invertible del componente de medias móviles (MA).
- Estructura recursiva o de respuesta infinita al impulso, de manera que permite aproximar a un filtro ideal de una manera mucho más parsimoniosa y eficiente que un filtro MA puro.
- En el componente recursivo se produce una combinación modulada de elementos de suavizado y de diferenciación, siendo el parámetro  $\lambda$  el factor de modulación, de manera que actúa como una ponderación del grado de fidelidad a la serie (primer sumando) frente a la suavidad de la señal extraída (segundo sumando).

Bajo estos supuestos, [2.9] se puede escribir como  $L(B, F) = L(B) \cdot L(F)$ , donde  $L(B) = (1+B)^d / [\sigma_a \theta(B)]$ , siendo  $\theta(B)$  un polinomio en  $B$  de orden  $d$  tal que  $\nabla^d z_t = \theta(B) a_t$ . Esta sería la representación en cascada de este tipo de filtros.

Como un caso particular de los filtros Butterworth de paso bajo del tipo seno se encuentra el filtro de Hodrick-Prescott, en concreto para el caso  $d = 2$ . Su ventaja estriba en el bajo orden del filtro, lo que permite perder menos observaciones tanto al final como al principio de las series filtradas. No obstante, presenta el gran inconveniente de incumplir el requisito canónico mencionado anteriormente. La expresión de este filtro en el dominio del tiempo y su función de ganancia son las siguientes:

$$[2.11] \quad |G_{HP}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left[ \frac{\sin(\omega / 2)}{\sin(\omega_c / 2)} \right]^4},$$

$$L_{HP}(B, F) = \frac{1}{1 + \lambda(1-B)^2(1-F)^2},$$

$$\lambda = \frac{1}{16[\sin(\omega_c / 2)]^4}.$$

Desde una perspectiva basada en modelos, Gómez (1998a, 1998b) demuestra que los filtros de Butterworth equivalen a los de Wiener-Kolmogorov en un contexto de extracción de señales como el siguiente:

$$[2.12] \quad z_t = s_t + n_t ,$$

donde  $s$  es una señal IMA( $d$ ,  $d$ ) y  $n$  un ruido blanco:

$$[2.13] \quad (1 - B)^d s_t = (1 + B)^d b_t$$

y

$$[2.14] \quad \begin{bmatrix} b \\ n \end{bmatrix}_t \sim \text{iid } N\left(0, \begin{bmatrix} v_b & 0 \\ 0 & v_n \end{bmatrix}\right).$$

En este marco, el parámetro  $\lambda$  representa el balance señal/ruido según:

$$[2.15] \quad \lambda = \frac{v_n}{v_b} .$$

Como se deduce de las expresiones anteriores, un filtro de Butterworth de paso bajo depende de dos parámetros,  $d$  y  $w_c$  que se denominarán  $\beta$ , cuyos valores numéricos concretos determinan tanto sus propiedades espectrales como su representación en el dominio del tiempo. La determinación de dichos parámetros se puede realizar de dos formas principales:

- Directa: el analista determina los valores numéricos de los parámetros en función de sus creencias a priori acerca del componente o señal que desea estimar.
- Indirecta: el analista define los rangos frecuenciales para las bandas de paso y rechazo así como unas tolerancias para las mismas. A continuación, se determinan los parámetros del filtro que satisfacen estas restricciones.

Estos procedimientos se diferencian en el orden en que se diseña el filtro. El enfoque directo determina primero  $\beta$ , resultando las bandas de paso y de rechazo así como las tolerancias funciones implícitas de  $\beta$ . Por el contrario, en el caso indirecto, son los parámetros contenidos en  $\beta$  los que resultan función de bandas y tolerancias definidas a priori. En este trabajo se emplea el segundo enfoque, ya que permite una traducción bastante inmediata del prior sobre la señal que se desea extraer al filtro que se va a diseñar.

Formalmente, se tiene:

- Banda de paso:  $[0, w_p]$ , con  $w_p < \pi$ .
- Banda de rechazo:  $[w_s, \pi]$ , con  $w_p < w_s$ .

Naturalmente, la banda de transición resulta  $(w_p, w_s)$ . Las tolerancias definen una cota mínima en la banda de paso ( $\delta_1$ ) y una máxima en la de rechazo ( $\delta_2$ ), esto es, no se admite que la función de ganancia sea inferior a  $1-\delta_1$  en la banda de paso ni superior a  $\delta_2$  en la de rechazo:

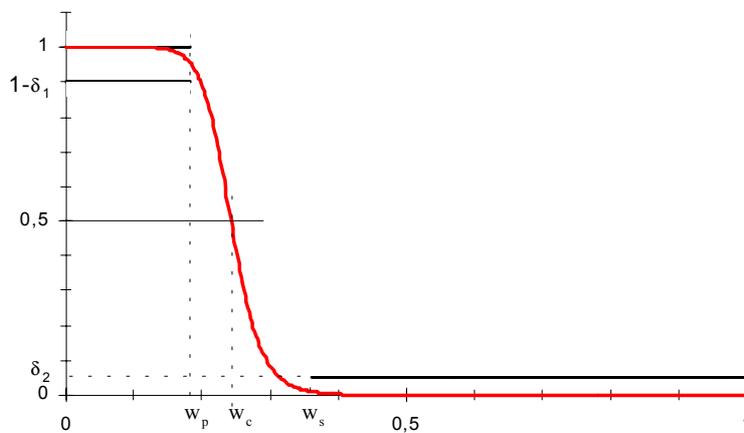
$$[2.16] \quad |G(w)|^2 > 1 - \delta_1 \quad \forall w \in [0, w_p)$$

y

$$[2.17] \quad |G(w)|^2 < \delta_2 \quad \forall w \in (w_s, \pi].$$

El siguiente gráfico ilustra estas consideraciones:

**Gráfico 2.2: Diseño de un filtro Butterworth de paso bajo**



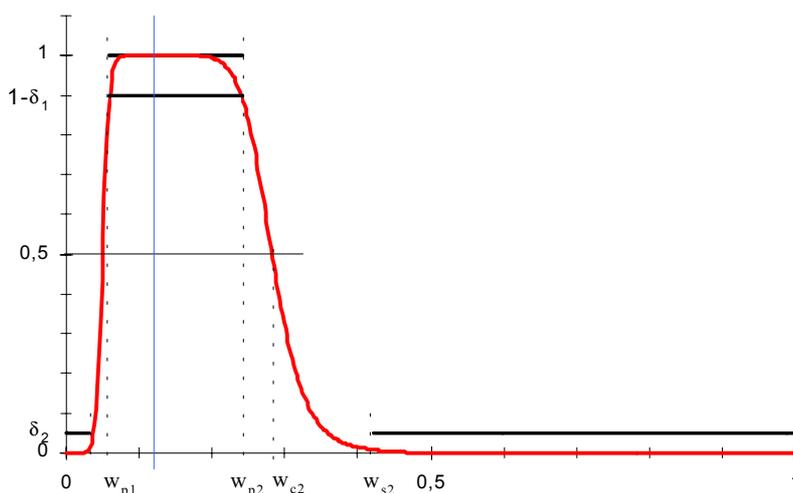
De esta manera, se puede establecer un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución determina  $\beta$  en función de  $w_p$ ,  $w_s$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$ :

$$[2.18] \quad \left. \begin{array}{l} |G(w_p)|^2 = 1 - \delta_1 \\ |G(w_s)|^2 = \delta_2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} d = d(\delta_1, \delta_2, w_p, w_s) \\ w_c = w_c(\delta_1, \delta_2, w_p, w_s). \end{cases}$$

## 2.2. Filtros de paso en banda

Una de las características más interesantes de los filtros de Butterworth es que permiten derivar una amplia gama de estructuras de extracción de señales como transformaciones relativamente sencillas de los filtros de paso bajo que acaban de exponerse. De esta manera, el diseño de un filtro de paso en banda o de paso alto se puede obtener modificando apropiadamente un filtro de paso bajo básico. La idea intuitiva del proceso se representa en el siguiente gráfico, en el que se aprecia cómo la función de ganancia de un filtro de paso en banda se obtiene desplazando hacia las altas frecuencias la correspondiente a un filtro de paso bajo. En Oppenheim y Schaffer (1989) se detalla el procedimiento así como las principales transformaciones.

**Gráfico 2.3: Diseño de un filtro Butterworth de paso en banda**



Formalmente, ahora se tiene:

- Banda de paso:  $[w_{p1}, w_{p2}]$ , con  $0 < w_{p1} < w_{p2} < \pi$ .
- Banda de rechazo:  $[0, w_{s1}] \cup [w_{s2}, \pi]$ , con  $0 < w_{s1} < w_{p1}$  y  $w_{p2} < w_{s2} < \pi$ .

Adicionalmente, se asume que  $w_{s1}$  es simétrico con respecto a  $w_{s2}$  en términos relativos. Esto implica que la proporción de las dos bandas de rechazo ( $[0, w_{s1}]$  y  $[w_{s2}, \pi]$ ) respecto a las excluidas de la banda de paso ( $[0, w_{p1}]$  y  $[w_{p2}, \pi]$ ) son, respectivamente, idénticas.

La derivación del filtro de paso en banda,  $H(B, F)$ , en el dominio del tiempo se obtiene aplicando a un filtro de paso bajo  $L(B, F)$  la siguiente transformación:

$$[2.19] \quad H(B, F) = L\left(\frac{\alpha B - B^2}{1 - \alpha B}, \frac{\alpha F - F^2}{1 - \alpha F}\right),$$

siendo

$$[2.20] \quad \alpha = \frac{\cos\left(\frac{w_{p2} + w_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{w_{p2} - w_{p1}}{2}\right)}.$$

Teniendo en cuenta la estructura de las bandas de paso y rechazo antes definida y el hecho de que la función coseno es decreciente entre 0 y  $\pi$ , se obtiene:

$$[2.21] \quad -1 < \alpha < 1$$

Desarrollando [2.19] se obtiene:

$$[2.22] \quad H(B, F) = \frac{(1 - B^2)^d (1 - F^2)^d}{(1 - B^2)^d (1 - F^2)^d + \lambda (1 - 2\alpha B + B^2)^d (1 - 2\alpha F + F^2)^d},$$

estableciendo  $w_p = w_{p,2} - w_{p,1}$  y  $w_s = w_{s,2} - w_{p,1}$ , de la ecuación [2.18] se obtienen los parámetros  $d$  y  $w_c$  con:

$$[2.23] \quad \lambda = \left[\tan^{2d}(w_c / 2)\right]^{-1}$$

y  $\alpha$  definido según [2.20].

De la misma forma que con los filtros de paso bajo, el filtrado de paso en banda da lugar a una estructura ARMA simétrica (sin desfase, por lo tanto), canónica y con una parametrización más sobria que una de tipo MA.

El requisito canónico se satisface por partida doble, ya que el operador MA de [2.22] puede ser factorizado como

$$[2.24] \quad (1 - B^2) = (1 - B)(1 + B),$$

lo que da lugar sendas raíces en las frecuencias cero (tendencia) y  $\pi$  (estacionalidad de período mínimo). De esta manera, se garantiza la pureza de la señal estimada.

Por otra parte, el operador AR de [2.22] no es estacionario. En particular, su segundo sumando posee una raíz compleja de módulo unitario:

$$[2.25] \quad v = \alpha \pm (1 - \alpha^2)^{1/2} i.$$

Dicha raíz está asociada a la frecuencia:

$$[2.26] \quad w^* = \arctan\left(\frac{(1 - \alpha^2)^{1/2}}{\alpha}\right).$$

Así, por ejemplo, una banda de paso entre 2 y 8 años para una serie mensual da lugar a una frecuencia característica de 4 años.

### 3. Filtrado cíclico y tasas de crecimiento

Las tasas de crecimiento, tanto interanual como intertrimestral, se pueden estudiar desde el dominio de la frecuencia como si se tratara de unos filtros extractores de señales, véase Melis (1991) y Cristóbal y Quilis (1994). Sus equivalentes lineales en el dominio del tiempo, para series trimestrales, son<sup>5</sup>:

$$[3.1] \quad \text{Tasa interanual:} \quad T_4(B) = (1 - B^4).$$

$$[3.2] \quad \text{Tasa intertrimestral:} \quad T_1(B) = (1 - B).$$

Siendo sus respectivas funciones de ganancia:

$$[3.3] \quad |G_{T_4}(w)|^2 = 2(1 - \cos(4w)), \quad |G_{T_1}(w)|^2 = 2(1 - \cos(w)).$$

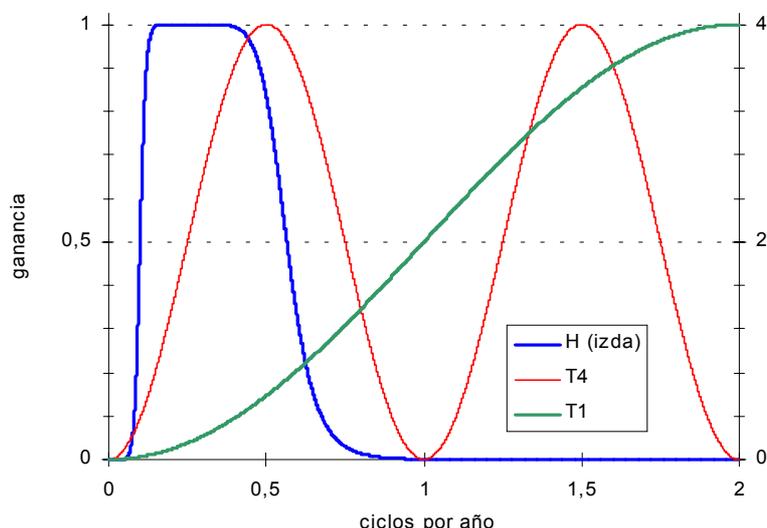
Como se puede apreciar en el gráfico 3.1, la tasa interanual,  $T_4$ , acentúa las oscilaciones en torno a 8 trimestres (0.5 ciclos por año) pero también las del entorno de 2.7 trimestres (1.5 ciclos por año) que se corresponden con el componente irregular de una serie temporal. En definitiva, no anula las oscilaciones del componente irregular como el filtro de paso bajo,  $H$ , y no acentúa de la misma forma todas las oscilaciones de la banda cíclica, entre 2 y 8 años (0.125 – 0.5 ciclos por año); todo esto nos lleva a determinar que la tasa interanual no estima un componente cíclico suave ni localmente claro, al no eliminar la irregularidad de la serie.

Por su parte, el comentario sobre la tasa intertrimestral,  $T_1$ , es aún más contundente: atenúa las oscilaciones de la banda cíclica y acentúa las correspondientes al componente irregular de las series, mostrándose de esta forma como un filtro ineficiente para estimar una señal cíclica. El filtro  $H$ , por su parte, se aproxima a un filtro ideal de paso en banda, elimina la irregularidad y extrae las oscilaciones de la banda cíclica con nitidez.

---

<sup>5</sup> Se considera sólo el caso trimestral por simplicidad, ya que el análisis es virtualmente idéntico para el mensual.

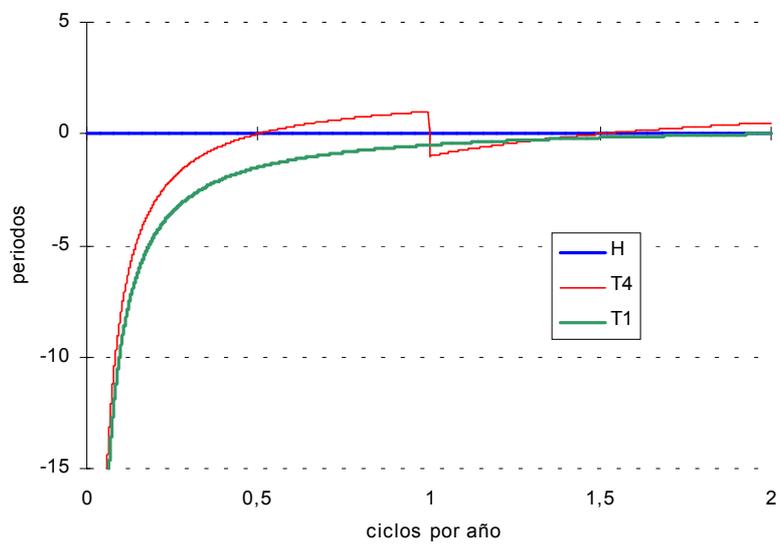
**Gráfico 3.1: Filtro Butterworth cíclico y tasas de crecimiento. Funciones de ganancia**



Examinando las funciones de desfase, véase el gráfico 3.2, se aprecia cómo el filtro H tiene desfase nulo por ser simétrico, mientras que ambas tasas poseen un desfase negativo en toda la banda cíclica. En concreto, para la  $T_4$  su desfase medio en la banda cíclica es de  $-1.7$  períodos, lo cual significa que adelanta la salida en casi dos trimestres por lo que, si se utiliza la  $T_4$  como estimador de la señal cíclica, hay que interpretar los resultados con bastante cautela, sobre todo en los puntos de giro (máximos o mínimos). Debido al adelanto que produce, el giro observado en un período tendrá lugar en realidad alrededor de dos trimestres después, dependiendo del valor exacto de la frecuencia de la oscilación que está generando el punto de giro.

La misma cautela debe observarse con la  $T_1$ , en especial debido a su propiedad de “despertador loco” que le lleva a adelantar todas las oscilaciones, tanto las cíclicas como las irregulares. Esta falta de discriminación tiene funestas consecuencias debido a que, como se observa en el gráfico 3.1, es precisamente la señal más errática (la irregularidad) lo que acentúa la  $T_1$  mientras que la banda más relevante para el coyunturista es virtualmente anulada. La tasa interanual ofrece un comportamiento más favorable, si bien dista de ser perfecto. Un estudio detallado de estos temas se encuentra en Cristóbal y Quilis (1994).

**Gráfico 3.2: Filtro Butterworth cíclico y tasas de crecimiento. Funciones de Desfase**



## 4. Selección de la serie de entrada. Estrategia de filtrado

Como serie de entrada para el filtrado, con el objeto de obtener una señal cíclica suave, se utiliza el componente de ciclo-tendencia estimado por SEATS (Gómez y Maravall 1996), siguiendo el esquema expuesto en INE (2002a). Como el filtro  $H$  es doblemente canónico y, según su función de ganancia, atenúa hasta el extremo de eliminar prácticamente las oscilaciones que se corresponden con las frecuencias situadas fuera de la banda cíclica, se podría pensar en utilizar como *input* la serie original o la serie desestacionalizada. Sin embargo, se prefiere utilizar la serie de ciclo-tendencia porque, a diferencia tanto de una como de otra, no contiene componentes de alta frecuencia (irregularidad) y, por lo tanto, es más suave (Gómez 1998a). Este hecho redundante en una identificación más fácil de los puntos de giro.

Por otra parte, este procedimiento en dos etapas evita la inducción de ciclos espurios y ofrece un marco explícito para la generación de extrapolaciones, tanto iniciales como finales, que mejoran notablemente el rendimiento de estos filtros, al reducir sus revisiones. Este extremo se encuentra desarrollado en Kaiser y Maravall (1999).

La estrategia de estimación seguida implica la extracción directa de la señal cíclica mediante la aplicación de un filtro de Butterworth de paso en banda calibrado para aproximar a uno ideal en la banda situada entre dos y ocho años, siendo las tolerancias  $\delta_1=0.10$  y  $\delta_2=0.01$ . Formalmente:

$$[4.1] \quad c_t = H(B,F) p_t,$$

donde  $c_t$  es el componente cíclico,  $H(B,F)$  un filtro de Butterworth de paso en banda y  $p_t$  es la señal de ciclo-tendencia estimada por SEATS. Este enfoque directo también utiliza el procedimiento de Baxter-King si bien, como ya se ha señalado, la estructura ARMA racional de los filtros de Butterworth permite una representación más parsimoniosa, para igual grado de aproximación a un filtro ideal, que el de Baxter-King.

La estimación del componente cíclico también se puede hacer de manera indirecta, según:

$$[4.2] \quad \begin{aligned} m_t &= L(B,F) p_t \\ c_t &= p_t - m_t, \end{aligned}$$

siendo  $L(B,F)$  un filtro de Butterworth de paso bajo y  $m_t$  es la tendencia secular. Este enfoque indirecto es, por ejemplo, el que sigue el filtro de Hodrick-Prescott. Los resultados que se obtienen aplicando [4.2] suelen ofrecer una señal cíclica menos nítida que la que se deriva de [4.1]. Este hecho se debe a que el filtro finalmente aplicado,  $1-L(B,F)$ , es de paso alto por lo que los elementos irregulares residuales no son debidamente eliminados.

Por otra parte, el esquema directo [4.1] ofrece una estimación virtualmente idéntica del ciclo tanto si se utiliza la señal de ciclo-tendencia como la serie desestacionalizada. Esta robustez frente a la serie de entrada no se obtiene si se aplica el enfoque indirecto [4.2].

Computacionalmente, se han empleado las funciones Matlab contenidas en su Toolbox *Signal Processing*, véase Mathworks (1998a, 1998b). De esta manera, se ha conseguido una estimación muy eficiente en modo de producción, esto es, integrada en el esquema general de compilación de la CNTR. La transición del modo de investigación al de producción suele ser turbulenta. El uso de *software* de muy alto nivel como Matlab, en el sentido de su abstracción procedural, minimiza los riesgos de la transición, véase Gatheral et al. (1999) para un análisis detallado de estas cuestiones.

# Referencias

---

Allen, D.S. (1997) "Filtering permanent cycles with complex unit roots", Federal Reserve Bank of St. Louis, Working Paper n. 97-001.

---

Baxter, M. y King, R.G. (1995) "Measuring business cycles: approximate band-pass filters for economic time series", National Bureau of Economic Research, Working Paper n. 5022.

---

Beveridge, S. y Nelson, C.R. (1981) "A new approach to decomposition of economic time series into permanent and transitory components with particular attention to measurement of the business cycle", *Journal of Monetary Economics*, vol. 7, p. 151-174.

---

Bógalo, J. (2001) "Análisis empírico de la duración del ciclo del Índice de la Producción Industrial (IPI)", *Boletín Trimestral de Coyuntura*, n. 83, p. 127-151.

---

Christiano, L.J. y Fitzgerald, T.J. (1999) "The band-pass filter", Federal Reserve Bank of Cleveland, Working Paper n. 9906.

---

Cristóbal, A. y Quilis, E.M. (1994) "Tasas de variación, filtros y análisis de la coyuntura", *Boletín Trimestral de Coyuntura*, n. 52, p. 92-123.

---

Gatheral, J., Epelbaum, Y., Han, J., Laud, K., Lubovitsky, O., Kant, E. y Randall, C. (1999) "Implementing option-pricing models using software synthesis", *IEEE Computing in Science and Engineering*, november/december, p. 54-64.

---

Gómez, V. (1998a) "Three equivalent methods for filtering finite nonstationary time series", Ministerio de Economía y Hacienda, Documento de Trabajo n. D-98003.

---

Gómez, V. (1998b) "Butterworth filters: a new perspective", Ministerio de Economía y Hacienda, Documento de Trabajo n. D-98008.

---

Hamming, R.W. (1977) *Digital filters*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, United States of America.

---

Hodrick, R.J. y Prescott, E.C. (1997) "Postwar U.S. business cycles: an empirical investigation", *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 29, n. 1, p. 1-16.

---

INE (2002a) "Ajuste estacional y extracción de señales en la Contabilidad Nacional Trimestral (CNTR)", *Boletín Trimestral de Coyuntura*, n. 84, p. 129-151.

---

INE (2002a) "Ajuste estacional y extracción de señales en la Contabilidad Nacional Trimestral (CNTR)", Banco de España, Documento de Trabajo n. 0210.

---

INE (2002b) "Componentes cíclicos de los principales agregados de la Contabilidad Nacional Trimestral (CNTR)", *Boletín Trimestral de Coyuntura*, n. 86, p. 135-144.

---

Kaiser, R. y Maravall, A (1999) "Short-term and long-term trends, seasonal adjustment, and the business cycle", Banco de España, Documento de Trabajo n. 9918.

---

King, R.G. y Rebelo, S.T. (1993) "Low frequency filtering and real business cycles", *Journal of Economic Dynamics and Control*, n. 17, p. 307-321.

---

MathWorks (1998a) *Matlab: User's Manual*, The MathWorks Co., Natick, Massachusetts, United States of America.

---

MathWorks (1998a) *Signal processing toolbox*, The MathWorks Co., Natick, Massachusetts, United States of America.

---

Melis, F. (1983) "Construcción de indicadores cíclicos mediante ecuaciones en diferencias", *Estadística Española*, n. 98, p. 45-89.

---

Melis, F. (1986) "Apuntes de series temporales", Instituto Nacional de Estadística, Documento Interno.

---

Melis, F. (1988) "La extracción del componente cíclico mediante filtros de paso bajo", Instituto Nacional de Estadística, Documento Interno.

---

Melis, F. (1989) "Sobre la hipótesis de componentes y la extracción de la señal de coyuntura sin previa desestacionalización", *Revista Española de Economía*, vol. 6, n. 1 y 2, p. 131-163.

---

Melis, F. (1991) "La estimación del ritmo de variación en series económicas", *Estadística Española*, vol. 33, n. 126, p. 7-56.

---

Otnes, R.K. y Enochson, L. (1972) *Digital time series analysis*, John Wiley, New York, United States of America.

---

Oppenheim, A.V. y Schaffer, R.W. (1989) *Discrete-time signal processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, United States of America.

---

Quilis, E.M. (1999) "Nota sobre la relación cíclica entre los índices de precios de consumo (IPC) e industriales (IPRI)", *Boletín Trimestral de Coyuntura*, n. 73, p. 141-157.