

*Boletín Trimestral de Coyuntura n° 87*

*Marzo 2003*

# **Un desestacionalizador ARMA para series económicas sin desfase temporal**

**Francisco Melis Maynar**

**Agencia Estatal de Administración Tributaria**

# Resumen

La desestacionalización de series económicas es el primer paso en la extracción de la señal relevante para el análisis de la coyuntura. El desfase temporal del filtro desestacionalizador representa el coste informativo del proceso y se mide por el número de predicciones necesarias para obtener una estimación actual de la serie desestacionalizada. Si el desfase es  $m$ , las últimas  $m$  estimaciones están sujetas a revisión, introduciendo incertidumbre en el diagnóstico coyuntural. El filtro que se presenta es un ARMA(11,11) de un sólo parámetro, con un desfase inferior a medio período, que puede aplicarse fácilmente en cualquier hoja electrónica. Empleando previamente este filtro, puede extraerse la señal de ciclo-tendencia con aproximaciones ARMA a filtros ideales, reduciendo a 5 -o menos- el número de predicciones necesarias.

**Palabras clave:** Desestacionalización, extracción de la señal, filtros ARMA, desfase temporal, medias móviles unilaterales, filtros modelo-basados.

# Introducción

La desestacionalización de series económicas es el primer paso en la extracción de la señal relevante para el análisis de la coyuntura. Muchas Oficinas de Estadística que producen series temporales dedican recursos al análisis y el perfeccionamiento de los métodos de desestacionalización y extracción de señal. El X11 del Bureau of Census de EEUU, el X11-ARIMA de la Oficina de Estadística de Canadá, el procedimiento Burman (1980) del Banco de Inglaterra, el nuevo X12-ARIMA del Bureau of Census, el filtro de líneas aéreas modificado de Cristóbal y Quilis (1995) empleado en el Boletín Trimestral de Coyuntura del INE o el procedimiento también modelo-basado de Gómez y Maravall (1996) empleado por EUROSTAT, son ejemplos del esfuerzo de investigación dedicado a los métodos de extracción de señal y de los avances obtenidos.

Para entender y comparar las diversas técnicas de desestacionalización y, en general, de extracción de señal, conviene estudiar las funciones de ganancia y desfase temporal de los filtros empleados, como se hace en Melis (1989,1991,1992). El desfase temporal del filtro indica el número de observaciones que se pierden al final de la serie y representa el coste informativo asociado al proceso de extracción.

Si el filtro de extracción posee un desfase temporal de  $m$  observaciones, como ocurre con una media móvil simétrica de tamaño  $2m+1$ , y la serie de entrada se extiende de 1 a  $T$ , la salida del filtro sólo llega hasta  $T-m$ . Para obtener estimaciones de la salida en los últimos  $m$  periodos es necesario:

a) emplear filtros asimétricos que tienen menor desfase pero una función de ganancia menos eficiente que la del filtro simétrico o central, tal como se ilustra en el Anexo. El filtro desestacionalizador central del X11 para series de irregularidad media tiene un desfase de 84 meses. Para obtener una estimación de la serie desestacionalizada en los últimos 7 años se emplean filtros asimétricos -unilaterales para el último mes observado- que tienen menor desfase pero una función de ganancia poco eficiente. Esta es la estrategia del X11.

b) proyectar la entrada con un modelo de predicción y aplicar el filtro simétrico sobre esta serie extendida con  $m$  predicciones. Esta es la estrategia del X11-ARIMA.

En cualquiera de los casos, las  $m$  últimas estimaciones de la señal deberán sustituirse por los valores obtenidos con el filtro central conforme se vayan obteniendo nuevas observaciones. Este es el **problema de las revisiones** de la serie desestacionalizada (o de ciclo-tendencia) que tanto perturba al analista de la coyuntura y que las Oficinas de Estadística se esfuerzan en reducir buscando filtros de mínimo desfase.

Los filtros modelo-basados introducidos por Burman (1980) y Hillmer y Tiao (1982) son el producto de una función racional en el operador de retardo, por su conjugada:  $H(B)H(F)$ , donde  $H(B)$  es un filtro ARMA. Existen tres formas de aplicación práctica:

1. Obteniendo la forma de medias móviles y truncando las colas del filtro simétrico obtenido:

$$H(B)H(F) = h_0 + \sum_{j=1}^m h_j (B^j + B^{-j});$$

Hillmer y Tiao (1982) publican los pesos de los filtros para  $m=47$ . Maravall (1987) los presenta gráficamente con  $m=80$  pero subraya que los pesos  $h$  son despreciables para  $m>60$ .

Burman (1980) advierte que “en la práctica, los parámetros de modelos estacionales pueden estar próximos a la frontera de la invertibilidad, que provoca una convergencia muy lenta del filtro, de modo que podrían requerirse más de 1000 predicciones hacia adelante y hacia atrás para obtener una precisión razonable”.

2. Como suma de dos filtros ARMA conjugados. Esta es la “most ingenious suggestion” de Tunnicliffe Wilson que presenta Burman (1980) y que equivale a una realización en paralelo.

$$H(B)H(F) = \frac{G(B)}{\theta(B)} + \frac{G(F)}{\theta(F)} ;$$

3. Como producto de  $H(B)$  por su conjugado  $H(F)$ . Esta es la realización en cascada que presentan Gómez y Melis (1989) y que constituye la forma natural de aplicar los filtros modelo-basados para los habituados a los filtros autoregresivos o recursivos. De hecho, cuando se utilizan filtros ARMA y el desfase temporal no es constante ni aproximadamente constante, Hamming (1977) recuerda que “existe una sencilla solución al problema de eliminar la fase. Basta someter la serie a la acción del filtro y procesar la salida, tomada en la dirección opuesta, con el mismo filtro. Si existe un desfase en una frecuencia determinada en la primera pasada del filtro, se producirá un desfase igual, con signo contrario, en la segunda pasada”. Naturalmente, la ganancia en este doble filtrado es el cuadrado de la ganancia del filtro original. “El truco es tan simple que puede pasarse por alto”.

En la realización de medias móviles de filtros modelo-basados, el número de predicciones necesarias puede ser más alto que con el X11 y, con las realizaciones en cascada y en paralelo, el número de predicciones hacia adelante asciende a 26 cuando la serie es mensual y obedece a un líneas aéreas. No obstante, cuando el filtro ARMA unilateral  $H(B)$  tiene un desfase aproximadamente constante en la banda de paso puede aplicarse en solitario, reduciéndose el número de predicciones necesarias. El filtro ARMA(17,13) de Cristóbal y Quilis (1995) es un filtro desestacionalizador y de ciclo-tendencia que sólo exige 6 predicciones.

El filtro desestacionalizador que aquí se presenta es, en su versión mensual, un ARMA(11,11) de un sólo parámetro libre, con desfase temporal constante en todo el eje de frecuencias e inferior a 0,5 meses -cuando el parámetro es próximo a la unidad-, por lo que puede aplicarse en la práctica como un **desestacionalizador sin desfase**. La idea del desestacionalizador sin desfase nace, para el autor, del estudio del filtro ARMA unilateral de ciclo-tendencia basado en un modelo líneas aéreas y de la investigación sobre las causas del reducido desfase de los filtros líneas aéreas de ciclo-

tendencia. Desde esta perspectiva, el presente artículo corrige la explicación presentada en Gómez y Melis (1989), que atribuía el reducido desfase a la presencia de un MA(2) diferenciador en el filtro ARMA unilateral. Desde la perspectiva, más general, del proceso de señales digitales, la técnica de desestacionalización que aquí se presenta puede verse como la combinación de filtros de corte (notch filters) de medias móviles con resonadores digitales. El manual de Proakis y Manolakis (1992) es, desde esta óptica, la mejor referencia. La disponibilidad de un desestacionalizador sin desfase abre el procesamiento de series económicas a las aproximaciones ARMA a filtros ideales, tales como los filtros Butterworth, Chebychef y los minimocuadráticos incluidos en el programa Matlab (1986), capaces de extraer de forma óptima cualquier banda frecuencial considerada relevante. La presencia de estacionalidad y, en particular, la presencia de un potente pico estacional en la frecuencia estacional fundamental ( $2\pi/s$  en series de  $s$  muestras por año), dificultaba hasta ahora el uso de filtros ideales sobre series económicas. En Melis (1989) se demuestra que con filtros ARMA de la familia Butterworth y series con elevada estacionalidad -como la de pernoctaciones en hoteles en España- son necesarias 21 predicciones para extraer la señal coyuntural, sin introducir ceros estacionales. Aplicando previamente el filtro que aquí se presenta, puede obtenerse la señal coyuntural relevante con 5 o menos predicciones.

# 1. El filtro en el dominio del tiempo

El desestacionalizador que se presenta tiene estructura ARMA(11,11) dependiente de un sólo parámetro,  $c$ , que gobierna la intensidad de la desestacionalización.

$$D_t = a(X_t + X_{t-1} + \dots + X_{t-11}) - cD_{t-1} - c^2D_{t-2} - \dots - c^{11}D_{t-11} ; t = 12, \dots, T ;$$
$$D_1 = D_2 = \dots = D_{11} = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} X_j ; a = \frac{1}{12} \sum_{j=0}^{11} c^j = \frac{1 - c^{12}}{12(1 - c)} ;$$

Su desfase temporal es aproximadamente constante para oscilaciones de cualquier período, salvo los períodos estacionales. Para las oscilaciones de período superior al año, el retraso es de 0,3 meses (con  $c=0,975$ ), de forma que en las aplicaciones prácticas se emplea sin desfase.

Al ser un filtro recursivo, deben emplearse valores iniciales apropiados. Se sugiere igualar los 11 primeros valores del output con la media de los primeros 12 meses y, si se requiere el primer año desestacionalizado, procesar una segunda vez en la dirección opuesta.

El parámetro  $c$ , positivo e inferior a la unidad, gobierna la intensidad del proceso desestacionalizador. Cuanto menor es  $c$ , mayor es la acción desestacionalizadora y mayor la transferencia de varianza a la serie estacional  $S_t = X_t - D_t$ . Con  $c$  próximo a la unidad, la acción desestacionalizadora se restringe y la serie estacional pierde varianza. La salida  $D_t$  posee más varianza.

La constante  $a$  de normalización depende de  $c$  según la expresión anterior y asegura la inalterabilidad del nivel tendencial de la serie. De aquí la bondad de la media de los primeros 12 meses como vector inicial.

## 2. Generación del filtro.

En los filtros de ciclo-tendencia basados en un modelo de líneas aéreas, como los descritos en Burman (1980), Hillmer y Tiao (1982), Maravall (1987), Gómez y Melis (1989), Melis (1992) y Cristóbal y Quilis (1995), ocupa un lugar central el filtro:

$$(1) \quad \frac{S(B)}{E(B)} = \frac{1 + B + B^2 + \dots + B^{s-1}}{1 + eB^s}$$

que es una función racional en el operador de retardo  $\{B / B^k X_t = X_{t-k}\}$ .

La presencia del sumador estacional en los procedimientos modelo-basados no es una sorpresa porque parece un paso obligado en todo proceso de extracción de señal que exija raíces estacionales. El sumador estacional es la forma más simple de introducir ceros en la frecuencia estacional fundamental  $2\pi/s$  y sus armónicos:

$\frac{2\pi}{s}k$ ;  $k = 2, \dots, \frac{s}{2}$ ; Con el sumador o su versión normalizada a ganancia unidad, la media móvil de  $s$  pesos iguales se eliminan todas las oscilaciones estacionales, de períodos:  $\frac{s}{k}$ ;  $k = 1, 2, \dots, \frac{s}{2}$

Existe una correspondencia precisa entre los filtros componentes de  $S(B)$  y los períodos estacionales eliminados. Para  $s=12$  se tiene:

Períodos	2	2,4	3	4	6	12
$S(B)=$	$(1+B)$	$(1 + \sqrt{3}B + B^2)$	$(1+B+B^2)$	$(1+B^2)$	$(1-B+B^2)$	$(1 - \sqrt{3}B + B^2)$

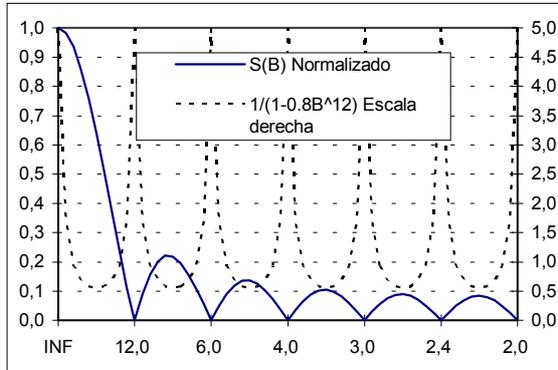
Para  $s=4$   $S(B)=(1+B)(1+B^2)=1+B+B^2+B^3$  y los ceros estacionales se reducen a 2 y 4 trimestres.

El efecto del sumador sobre el espectro o el periodograma de la serie de entrada es bien conocido y puede observarse en el Gráfico 1. Es un filtro de paso bajo o de ciclo-tendencia que actúa también como desestacionalizador.

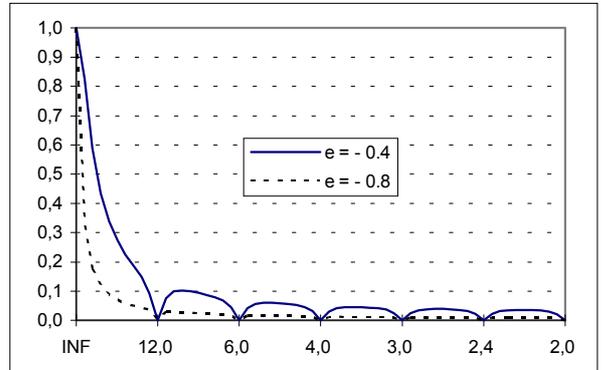
Como filtro de ciclo-tendencia no es eficiente. Definiendo el ratio señal/ruido como el cociente entre la ganancia en los ciclos de 5 años y la ganancia en la banda irregular (oscilaciones no estacionales de período inferior a 6 meses), el filtro  $S(B)$  tiene un ratio de 12,8, muy bajo para un filtro de ciclo-tendencia.

Como desestacionalizador tampoco es eficiente ya que no sólo elimina las oscilaciones estacionales sino que atenúa excesivamente las oscilaciones de período próximo a los estacionales.

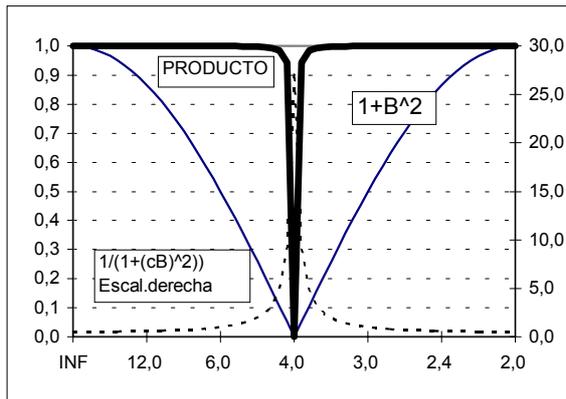
**GRÁFICO 1. S(B) y 1/E(B). GANANCIA**



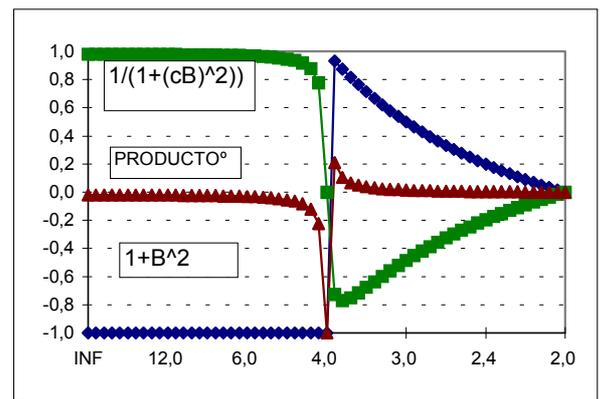
**GRÁFICO 2. S(B)/E(B) GANANCIA**



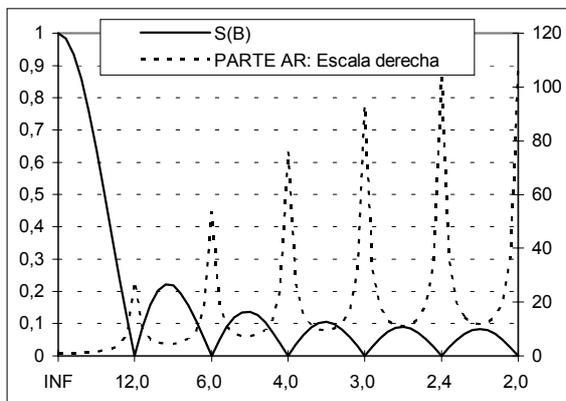
**GRÁFICO 3 ESTRECHANDO EL EMBUDO ESTACIONAL: GANANCIA**



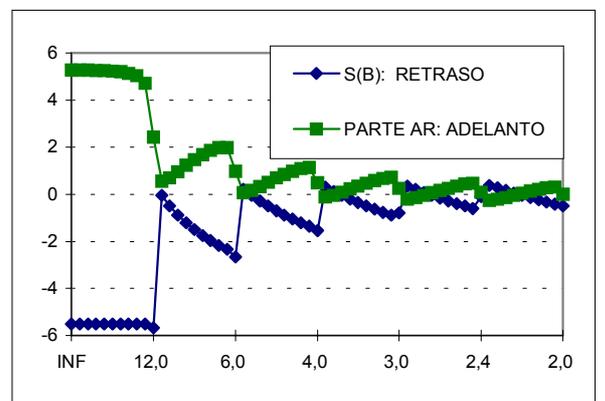
**GRÁFICO 4 ESTRECHANDO EL EMBUDO ESTACIONAL: DESFASE**



**GRÁFICO 5 COMPONENTES DEL ARMA(11,11): GANANCIA**



**GRÁFICO 6 COMPONENTES DEL ARMA(11,11): DESFASE**



Por último, tiene un desfase negativo de 5,5 meses, lo que quiere decir que se requieren 6 predicciones de la entrada para tener una medida actual de la salida.

La novedad que aportan los filtros modelo-basados viene con el operador autoregresivo estacional  $1/(1+eB^{12})$  con parámetro estacional negativo. El producto del sumador  $S(B)$  por el operador AR estacional afronta los dos problemas advertidos en la función de ganancia del sumador y resuelve felizmente el segundo: el exceso de anchura de los embudos estacionales.

Las características del producto pueden verse en el Gráfico 2:

- a) El ratio señal/ruido se incrementa ligeramente, hasta 15,2. El bajo incremento se debe al rápido decaimiento de la ganancia en las bajas frecuencias, que en el filtrado líneas aéreas se resuelve aplicando posteriormente un MA(2) próximo a la segunda diferencia  $(1-B^2)$ .
- b) La acción desestacionalizadora se localiza, restringiéndose a un reducido entorno de las frecuencias estacionales.

Para comprender esta doble acción del AR estacional, considerese la siguiente factorización del producto, con  $e = -c^{12}$ :

$$\frac{S(B)}{E(B)} = \frac{1+B+\dots+B^{11}}{1-c^{12}B^{12}} = \frac{1}{1-cB} \frac{1+B}{1+cB} \frac{1+B^2}{1+c^2B^2} \frac{1+B+B^2}{1+cB+c^2B^2} \frac{1-B+B^2}{1-cB+c^2B^2} \frac{1+\sqrt{3}B+B^2}{1+c\sqrt{3}B+c^2B^2} \frac{1-\sqrt{3}B+B^2}{1-c\sqrt{3}B+c^2B^2}$$

El **primer término** del último miembro es la versión autoregresiva más sencilla de un filtro de ciclo-tendencia y proporciona a la ganancia del producto  $S/E$  el rápido decaimiento desde las bajas frecuencias que domina el Gráfico 2 y que es tanto más rápido cuanto mayor es  $c$  y más próximo  $e$  a  $-1$ .

Los **siguientes términos** aseguran una desestacionalización tanto más selectiva cuanto mayor es  $c$ , actuando cada término sobre un período estacional concreto.

Consideremos separadamente el componente de medias móviles (MA) y el autoregresivo (AR), fijando la atención en el cero estacional situado en el período  $p=4$ , en el centro del eje de frecuencias, que se ilustra en el Gráfico 3.

El **operador de medias móviles  $1+B^2$**  introduce un cero en las oscilaciones de 4 meses pero altera drásticamente el resto de las oscilaciones, con una atenuación que crece con la proximidad al período estacional. Puede afirmarse que el operador MA desestacionaliza excesivamente o que el embudo estacional tiene una boca demasiado amplia. Su función de respuesta frecuencial es:

$$1 + e^{-i2w} = e^{-iw} (e^{iw} + e^{-iw}) = e^{-iw} 2 \cos w ;$$

con funciones de ganancia y desfase temporal:

$$G(w) = |1 + e^{-i2w}| = |2 \cos w| = \sqrt{2(1 + \cos 2w)};$$

$$D(p) = \frac{1}{w} \text{Arg}(1 + e^{-i2w}) = \frac{-w}{w} = -1; \text{ con } w = \frac{2\pi}{p};$$

Para los gráficos, contruídos en una hoja electrónica, se emplean las expresiones:

$$G(w) = \sqrt{R(w)^2 + I(w)^2} = \sqrt{(1 + \cos 2w)^2 + \text{sen}^2 2w};$$

$$D(p) = \text{ATAN2}(R(w); -I(w)) / w;$$

donde R e I son las partes real e imaginaria de la función de respuesta frecuencial y ATAN2 es la función arco tangente definida sobre  $(-\pi, \pi)$ . Esta forma de calcular el desfase es más apropiada que la forma algebraica directa para las oscilaciones de periodo inferior al cero de la función. El Gráfico 4 enseña que la suma  $1+B^2$  retrasa un mes las oscilaciones de más de 4 meses pero, para oscilaciones de período inferior, la salida posee un adelanto que decrece cuando aumenta la frecuencia del input.

En la literatura de proceso de señales digitales los filtros como el  $1+B^2$  se conocen como **filtros de corte** (notch filter): son aquellos que contienen uno o más profundos cortes o muescas en su función de ganancia. Si el filtro introduce ceros uniformemente espaciados en el eje de frecuencias, como el sumador estacional S(B), se denominan **filtros en peine** (comb filters). Para introducir un cero en el período p (frecuencia  $2\pi/p$ ) se utiliza el filtro de medias móviles.

$$M(B) = (1 - e^{i\frac{2\pi}{p} B})(1 - e^{-i\frac{2\pi}{p} B}) = 1 - 2 \cos(\frac{2\pi}{p})B + B^2$$

que produce los filtros componentes de S(B) dando a p los valores 2,4, 3, 4, 6 y 12. Para p=2 basta con un MA(1):

$$1 - e^{-i\frac{2\pi}{p} B} = 1 + B; \quad e^{i\pi} = -1;$$

Como señalan Proakis y Manolakis (1992), el problema con los filtros de corte o en peine de medias móviles reside en que el corte posee un ancho de banda excesivamente grande, lo que significa que otros componentes de frecuencias próximas a la de corte se atenúan excesivamente.

El **operador autoregresivo  $1/(1+c^2B^2)$**  se comporta de forma opuesta, acentuando las oscilaciones de cuatro meses. La ganancia del filtro es muy pequeña salvo en las proximidades del cero estacional, en donde crece muy rápidamente, como puede verse en el Gráfico 3. Este rápido crecimiento de la ganancia ilustra la ventaja de las funciones racionales frente a los polinomios: los filtros autoregresivos pueden poseer bandas de transición muy estrechas.

Su desfase es casi de la misma magnitud que el del sumador, pero con signo positivo en las oscilaciones de más de 4 meses: la salida experimenta un adelanto próximo a la unidad.

En el campo de los filtros digitales, un filtro como el  $1/(1+c^2B^2)$  se denomina **resonador digital** por la amplificación que introduce sobre una frecuencia concreta. Son filtros pasabanda de dos polos complejos conjugados situados cerca, pero en el interior, del círculo unidad: uno en la frecuencia  $2\pi/p$  y otro en la frecuencia  $-2\pi/p$ . Su función de transferencia es:

$$H(B) = \frac{k}{(1 - ce^{i\frac{2\pi}{p}} B)(1 - ce^{-i\frac{2\pi}{p}} B)} = \frac{k}{1 - 2c \cos(\frac{2\pi}{p}) + c^2 B^2} ; 0 < c < 1;$$

donde k es una constante de normalización que asegura que la función de ganancia en el período p sea la unidad.

El producto de un filtro de corte por un resonador digital sobre la misma frecuencia tiene un cero o embudo estacional muy estrecho, dejando inalterado el resto del eje frecuencial, como puede verse en el Grafico 3. La boca del embudo se cierra conforme se aproxima c a la unidad, reduciéndose el drenaje de varianza ocasionado por la desestacionalización. A menor c, mayor es la boca del embudo y mayor la acción desestacionalizadora.

El desfase del producto es prácticamente constante para todas las frecuencias, salvo en el cero estacional y su magnitud muy próxima a 0. Para  $c^2 = 0,96$  (e = - 0,8), el retraso de la salida es de 0,02 meses y para  $c^2=0,8$  el retraso es de 0,11 meses.

Como esta misma compensación de ganancias y desfases se produce para cada término o ARMA estacional, el filtro producto de los 6 últimos términos es el desestacionalizador sin desfase que se presenta:

$$\frac{1+B}{1+cB} \frac{1+B^2}{1+c^2B^2} \frac{1+B+B^2}{1+cB+c^2B^2} \frac{1-B+B^2}{1-cB+c^2B^2} \frac{1+\sqrt{3}B+B^2}{1+c\sqrt{3}B+c^2B^2}$$

$$\frac{1-\sqrt{3}B+B^2}{1-c\sqrt{3}B+c^2B^2} = \frac{1+B+\dots+B^{11}}{1+cB+\dots+c^{11}B^{11}} = \frac{\sum_{j=0}^{11} B^j}{\sum_{j=0}^{11} c^j B^j} = \frac{1-B^{12}}{1-B} \frac{1-cB}{1-c^{12}B^{12}} ;$$

La actuación de los componentes MA y AR se presenta en los Gráficos 5 y 6 en términos de ganancia y desfase temporal, respectivamente.

El desestacionalizador ARMA(11,11) que se presenta es, por tanto:

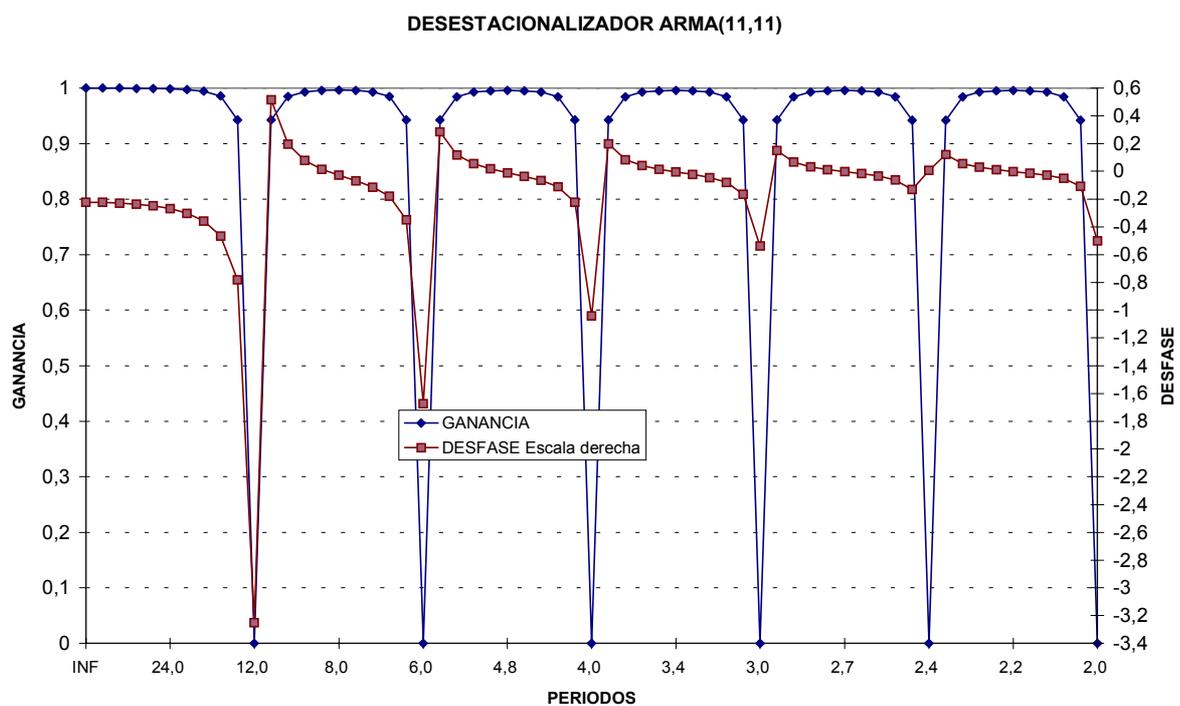
$$D(B) = a \frac{1+B+B^2+\dots+B^{11}}{1+cB+c^2B^2+\dots+c^{11}B^{11}} ; a = \frac{1+c+\dots+c^{11}}{12} ;$$

asegurando el parámetro a que la ganancia en la frecuencia 0 sea la unidad:

$$D(w) = a \frac{\sum_{j=0}^{11} e^{-ijw}}{\sum_{j=0}^{11} c^j e^{-ijw}} = 1 \quad \text{para } w = 0 ;$$

Las funciones de ganancia y desfase temporal se presentan en el Gráfico 7.

**GRÁFICO 7**



### 3. Extensiones

Existen dos desarrollos que pueden tener utilidad en la búsqueda de una desestacionalización óptima o que reduzca al máximo la acción desestacionalizadora:

a) Realizar un test previo de estacionalidad para cada período estacional, como se hace en Melis (1989), y eliminar los términos innecesarios de la factorización. Si el periodograma de la serie no presenta estacionalidad en el período 12 (existe un ejemplo en la referencia citada) el filtro se reduce a un ARMA(9,9) de parámetros (antes de aplicar la normalización):

MA	AR
$\sqrt{3} + 1$	$c(\sqrt{3} + 1)$
$\sqrt{3} + 3$	$c^2(\sqrt{3} + 3)$
$2\sqrt{3} + 3$	$c^3(2\sqrt{3} + 3)$
$2\sqrt{3} + 4$	$c^4(2\sqrt{3} + 4)$
$2\sqrt{3} + 4$	$c^5(2\sqrt{3} + 4)$
$2\sqrt{3} + 3$	$c^6(2\sqrt{3} + 3)$
$\sqrt{3} + 3$	$c^7(\sqrt{3} + 3)$
$\sqrt{3} + 1$	$c^8(\sqrt{3} + 1)$
1	$c^9$

b) Utilizar el test previo de estacionalidad para fijar el parámetro  $c$ , en función del máximo ratio estacionalidad/ruido. A mayor y más ancho pico estacional, más debe abrirse el embudo estacional y menor debe ser  $c$ .

Si se desea, además, introducir un cero en una frecuencia concreta, como la correspondiente a 2,872 meses que es el alias del ciclo semanal en series mensuales (ver Melis (1992)), puede construirse el término ARMA correspondiente y añadirlo como un factor más a la expresión del desestacionalizador.

El ciclo semanal tiene un periodo:

$$p = \frac{7}{(4 * 365 + 1) / 48} = \frac{7}{30.4375} \text{ meses}$$

Para introducir un cero en este período, y en su alias de 2,872 meses, se emplea el filtro:

$$(1 - e^{i\frac{2\pi}{p}B})(1 - e^{-i\frac{2\pi}{p}B}) = 1 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)B + B^2 = 1 + 2\sin\left(\frac{11\pi}{56}\right)B + B^2 ;$$

$$\text{con } p = 7 / 30,4375$$

Y para estrechar el ancho embudo que este MA(2) introduce en el período 2,872, se multiplica por el resonador digital AR asociado:

$$\frac{1 + 2\sin\frac{11\pi}{56}B + B^2}{1 + 2c\sin\frac{11\pi}{56}B + c^2B^2}$$

Este operador ARMA(2,2) introduce un cero en el período 2,872, tanto más selectivo o estrecho cuanto mayor es  $c$  y con un desfase despreciable (-0,03 meses para  $c=0,96$ ). Al calcular la función de ganancia para verificar la afirmación debe asegurarse que el período citado sea uno de los calculados.

# Anexo. El desfase en las medias móviles unilaterales.

Los filtros de medias móviles de pesos simétricos que se generan por procedimientos minimocuadráticos llevan asociados una familia de filtros asimétricos generados en el proceso de mínimos cuadrados. Estos filtros asimétricos tienen menor desfase, pero una función de ganancia poco eficiente.

---

## 1. Filtros obtenidos por aproximación polinomial.

La señal se obtiene sustituyendo el valor central de cada tramo de longitud  $T=2m+1$  por el punto central del polinomio ajustado a los  $T$  valores. Si el polinomio es una parábola, llamando  $X$  al tramo seleccionado y  $C$  a la señal de ciclo-tendencia, se tiene:

$$X_t = C_t + e_t ; C_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 ; t = 1, 2, \dots, T;$$

En notación matricial;

$$X = C + e = Ra + e; C = Ra = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & T & T^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix};$$

El estimador minimocuadrático de  $a$  es:

$$\hat{a} = (R' R)^{-1} R' X;$$

De forma que, el vector  $C$  de ciclo-tendencia es:

$$\hat{C} = R\hat{a} = R(R' R)^{-1} R' X = MX;$$

La fila central de M (o la media de las centrales si T es par) es el filtro simétrico y las restantes filas constituyen la familia asociada de filtros unilaterales. La suma de los pesos de cada fila (y columna) es la unidad. Ajustando una recta a tramos de tres observaciones se obtiene:

$$\begin{bmatrix} C_{t-2} \\ C_{t-1} \\ C_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & 2/6 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 2/6 & 5/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-2} \\ X_{t-1} \\ X_t \end{bmatrix}$$

Puede comprobarse que la tercera fila es un filtro de desfase prácticamente nulo en las bajas frecuencias. Para T=12 la media de las filas centrales es la media móvil de 12 términos.

Los gráficos 1 y 2 que acompañan al Anexo corresponden a filtros generados con T=13 y una parábola.

Resultados de interés para estos filtros obtenidos por regresión minimocuadrática sobre funciones del tiempo son:

El aumento del grado del polinomio ajustado eleva el grado de tangencia de la función de respuesta frecuencial en el origen. (Hamming, 1977, cap.3).

Parábolas y cúbicas proporcionan el mismo filtro central pero distintos asimétricos.

## 2. Mínimos cuadrados bayesianos.

Si el modelo para la señal no es polinomial sino autoregresivo, el planteamiento es distinto y conduce a mínimos cuadrados bayesianos:

$$X_t = C_t + e_t ; (1-B)^m C_t = \varepsilon_t ; t = 1, 2, \dots, T;$$

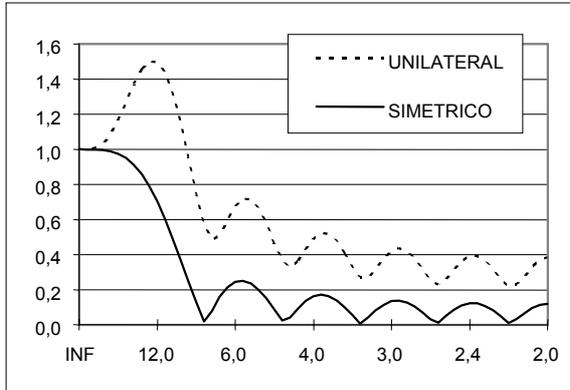
En este caso, la descomposición de la serie en señal y ruido exige minimizar:

$$\sum_{t=1}^T (X_t - C_t)^2 + k^2 \sum_{t=m+1}^T [(1-B)^m C_t]^2$$

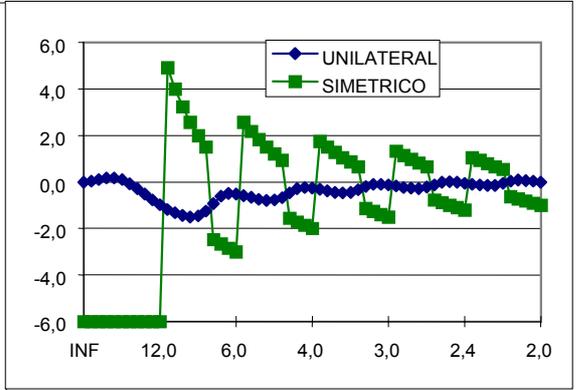
Este planteamiento, formulado originalmente por Witterker y Henderson en los años 1919-1924 expresa el problema de la descomposición como un compromiso entre la bondad del ajuste o fidelidad al dato observado y la suavidad o fidelidad al modelo. El valor del parámetro K refleja el compromiso.

## EL DESFASE DE LOS FILTROS DE MEDIAS MOVILES

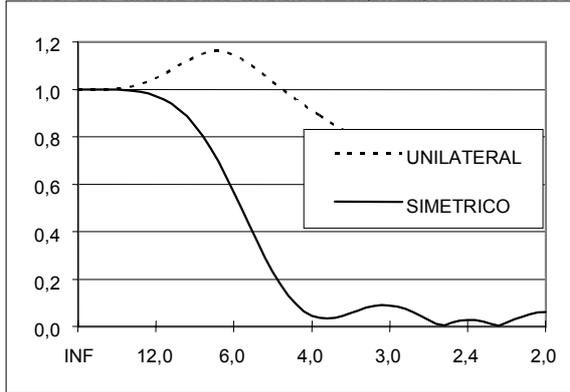
**1. REGRESION PARABOLICA T=13:GANANCIA**



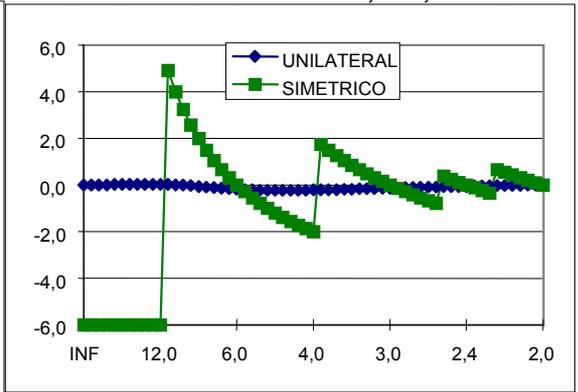
**2.1. REGRESION PARABOLICA T=13:DESFASE**



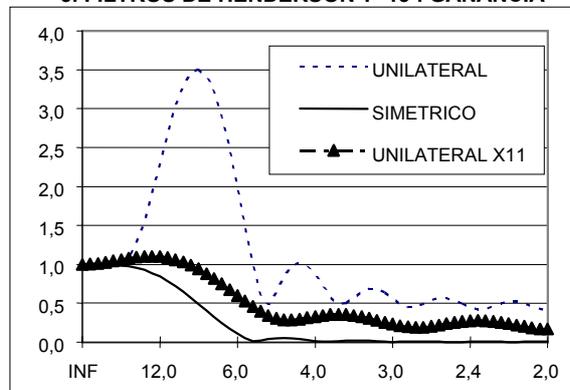
**3. REGRESION BAYESIANA T=13, m=3, K=1:GANANCIA**



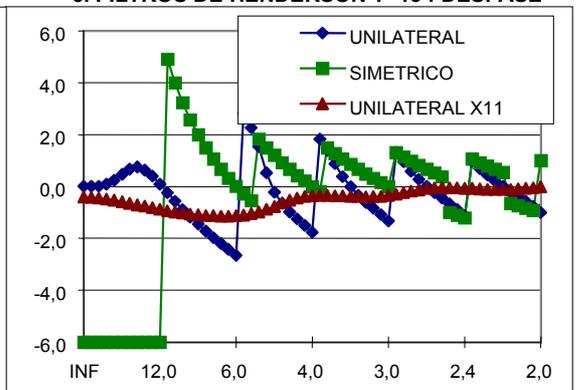
**4. REGRESION BAYESIANA T=13, m=3, K=1:DESFASE**



**5. FILTROS DE HENDERSON T=13 : GANANCIA**



**5. FILTROS DE HENDERSON T=13 : DESFASE**



En la aproximación de Akaike (1980) el problema se resuelve por mínimos cuadrados bayesianos.

$$\begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ kD \end{bmatrix} C + \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}; \quad \bar{X} = AC + \bar{\varepsilon} \quad ; D = (I - B)^m ;$$

donde I es la matriz unidad de tamaño T y B es la expresión matricial del operador de retraso. Para m=3 las T-3 últimas filas de la matriz D son:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Las tres primeras filas pueden adoptar las formas:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -b & b & 0 & \cdot & 0 \\ c & -2c & c & \cdot & 0 \end{bmatrix} \text{ con } a = b = c = 0,001; \text{ o bien } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -3 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 3 & -3 & 1 & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

La primera es la disposición de Akaike y se emplea para la obtención de los filtros por mínimos cuadrados bayesianos. La segunda se emplea para la generación de los filtros de Henderson porque proporciona la mejor aproximación a los pesos publicados en el manual del X11.

La solución es:

$$\hat{C} = \left[ \begin{bmatrix} I' \\ kD' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & kD \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} I' \\ kD' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} = (I + k^2 D' D)^{-1} X = MX$$

De nuevo, la fila central de M proporciona el filtro simétrico y las restantes forman la familia asociada de filtros asimétricos de menor fase. Los gráficos 3 y 4 corresponden a filtros generados con T=13, k=1 y m=3.

En las aplicaciones prácticas de estos filtros el parámetro se selecciona (entre un conjunto prefijado de antemano) minimizando el criterio de información de Akaike;

$$ABIC(k) = T \ln\left(\frac{1}{T} \|\bar{\varepsilon}\|^2\right) + \ln|k^2 D' D + I| - \ln|k^2 D' D|; \quad \|\bar{\varepsilon}\|^2 = \bar{\varepsilon}' \bar{\varepsilon} = [\bar{X} - AC]' [\bar{X} - AC];$$

donde |M| es el determinante de M.

### 3. Mínimos cuadrados condicionados: Medias de Henderson.

El vector  $W=[w_1, w_2, \dots, w_t, \dots, w_N]$  es un filtro de Henderson si:

a) Su tercera diferencia  $(1-B)^3 w_t$  tiene norma mínima.

$$\|\eta\|^2 \text{ minima} ; \quad \eta = (I - B)^3 W = DW ; \quad \|\eta\|^2 = W' D' DW ;$$

b) Es invariante frente a las cúbicas.

$$P_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=-m}^m w_j P_{t-j} \text{ filtro simetrico } N = 2m+1 \\ \sum_{j=0}^N w_j P_{t-j} \text{ filtro unilateral} \end{array} \right\}$$

La invarianza frente a las cúbicas implica:

$$\sum_j w_j = 1 ; \quad \sum_j j w_j = 0 ; \quad \sum_j j^2 w_j = 0 ; \quad \sum_j j^3 w_j = 0 ;$$

Si el filtro es simétrico  $w_j = w_{-j}$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ; y se cumplen las igualdades segunda y cuarta. La condición de invarianza, expresada matricialmente es en este caso:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & -1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 1 & 0 & -1 & \cdot & 0 \\ m^2 & \cdot & 1 & 0 & 1 & \cdot & m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \cdot \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad RW = r ;$$

Si el filtro es unilateral, la matriz R adopta la forma:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & N-1 \\ 0 & 1 & 2^2 & \dots & (N-1)^2 \\ 0 & 1 & 2^3 & \dots & (N-1)^3 \end{bmatrix}; \quad r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se trata, por tanto, de minimizar  $W'D'DW$  sujeto a  $RW=r$ .

$$\Phi(W, \lambda) = W'D'DW + 2\lambda'(RW - r) \quad \text{min.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial W} = 2D'DW + 2R'\lambda = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 2(RW - r) = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} D'DW + R'\lambda = 0 \\ RW = r \end{array} \right. \quad \begin{bmatrix} D'D & R' \\ R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

El vector W buscado está formado por los N primeros elementos del vector:

$$\begin{bmatrix} D'D & R' \\ R & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

Los Gráficos 5 y 6 del Anexo corresponden a los filtros de Henderson así generados. El filtro simétrico es muy próximo al que aparece en el manual del X11. El filtro unilateral que publica el X11 tiene sólo 7 elementos pero su desfase para las bajas frecuencias también es prácticamente nulo.

# Referencias

---

Akaike H. (1980) *Likelihood and the Bayes procedure*. en Bayesian Statistics. J.N. Bernardo, M.H. De Groot, D.V. Lindley y A.F.M. Smith (Eds.) University Press.

---

Burman J.P. (1980) *Seasonal adjustment by signal extraction*. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, N° 143.

---

Cristóbal A., Quilis E.M. (1995) *Señal de ciclo-tendencia frente al ajuste estacional en la Contabilidad Nacional Trimestral*. Boletín Trimestral de Coyuntura N° 55.

---

Gómez V., Melis F. (1989) *Sobre los filtros de ciclo-tendencia obtenidos por descomposición de modelos ARIMA*. INE, Documento de Trabajo.

---

Gómez V., Maravall A. (1996) *Programs TRAMO and SEATS. Instructions for the user*. Documento de Trabajo N° 9628. Servicio de Estudios. Banco de España.

---

Hamming R.W. (1977) *Digital Filters*. Prentice-Hall.

---

Hillmer S.C., Tiao G.C. (1982) *An ARIMA model based approach to seasonal adjustment*. Journal of the American Statistical Society. Vol 77, N° 377.

---

Maravall A. (1987) *Descomposición de series temporales: especificación, estimación e inferencia. (Con una aplicación a la oferta monetaria en España)*. Estadística española. Vol.29, N° 114.

---

Matlab (1986) *PC-Matlab User's Guide*. The Math Works Inc.

---

Melis F. (1986) *Apuntes sobre series temporales*. Documento de Trabajo. INE.

---

Melis F. (1989) *Sobre la hipótesis de componentes y la extracción de la señal de coyuntura sin previa desestacionalización*. Revista Española de Economía. Vol 6. Nos 1 y 2.

---

Melis F. (1991) *La estimación del ritmo de variación en series económicas*. Estadística Española. Vol.33, N° 126.

---

Melis F. (1992) *Agregación temporal y solapamiento o aliasing*. Estadística Española. Vol.34, N° 130.

---

Proakis J.G., Manolakis D.G. (1992) *Digital signal processing. Principles, Algorithms and Applications*. Second Edition. MacMillan.