

# Comportamiento asintótico de los contrastes de Dickey-Fuller en variables con un cambio en la media

por

ANTONIO MONTAÑÉS BERNAL(\*)

Departamento de Análisis Económico

Universidad de Zaragoza

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Gran Vía, nº 2

50005 Zaragoza

Tfno.: 976 76 22 21 Fax: 976 76 19 96

E-mail: amontane @posta.unizar.es

## RESUMEN

En este artículo se analiza el comportamiento asintótico de los contrastes de Dickey-Fuller cuando la variable sometida a estudio presenta un salto en sus niveles medios. Tomando como punto de partida los dos procesos generadores de datos utilizados en Perron (1990), demostramos que ni el pseudo t-ratio ni el estimador normalizado se ven asintóticamente afectados por la presencia de este tipo de ruptura. En muestras finitas, sin embargo, valores elevados de la magnitud de la ruptura pueden distorsionar su funcionamiento.

---

(\*) El autor agradece los comentarios de dos evaluadores anónimos que han servido para mejorar substancialmente la versión original. En cualquier caso, los posibles errores son de mi entera responsabilidad.

*Palabras clave:* Media segmentada; Contrates de Dickey-Fuller; Omisión de variables relevantes.

*Clasificación AMS:* 90A20

## 1. INTRODUCCIÓN

El tema relacionado con el contraste de la hipótesis de raíz unitaria es un campo de reciente expansión y que esta generando nuevos resultados con cierta asiduidad. Tras el artículo seminal de Dickey y Fuller (1979), posteriores investigaciones han sugerido nuevos métodos de contraste de dicha hipótesis. Así, a modo de ejemplo, podemos destacar las aportaciones de Said y Dickey (1984) y de Phillips y Perron (1988), donde se considera la presencia de autocorrelación en las perturbaciones del modelo, de Dickey y Pantula (1987), quiénes proponen un método para analizar si una variable es integrada de segundo orden, o de Dickey, Hasza y Fuller (1984) y de Hylleberg et al. (1990) para estudiar la existencia de una raíz unitaria en la parte estacional.

Al margen de estos trabajos, una de las parcelas más activas dentro de esta área es aquella que estudia el comportamiento de los estadísticos de raíz unitaria en presencia de rupturas estructurales. Unas de las razones de este interés es que la mayor parte de las variables utilizadas en los trabajos empíricos pueden presentar al menos un cambio bien en su media, bien en su tasa de crecimiento o, en ocasiones, en ambas. Los trabajos pioneros se deben a Perron (1989) y a Rappoport y Reichlin (1989), donde se demuestra que cuando la serie es estacionaria alrededor de una tendencia determinista, la presencia de una ruptura estructural en el proceso generador de los datos hace que el estimador del parámetro autorregresivo del modelo tienda asintóticamente hacia la unidad. Algo muy similar ocurre cuando la variable presenta un cambio en la media, pero carece de tendencia determinista. En este caso, los resultados de Perron (1990), Chen y Tiao (1990) o Hendry y Neale (1991) nos permiten concluir que el estimador del parámetro autorregresivo tiende hacia la unidad conforme la magnitud de la ruptura es mayor.

El mensaje que se extrae del conjunto de estos estudios es que la potencia de los estadísticos de raíz unitaria parece limitada en un escenario de variables que exhiben una ruptura estructural. Esto ha servido como justificación teórica del desarrollo de un buen número de contrastes de raíz unitaria en presencia de cambios estructurales. Cabe citar en este aspecto los trabajos de Perron (1989, 1990), Banerjee et al. (1992), Perron y Vogelsang (1992) o Zivot y Andrews (1992), todos ellos en el caso de que la variable presente sólo un cambio. Cuando consideramos

la presencia de dos rupturas estructurales, podemos utilizar los estadísticos diseñados en Lumsdaine y Papell (1997) y Clemente et al. (1997).

No obstante, en ninguno de los trabajos mencionados con anterioridad se analiza directamente el comportamiento del pseudo t-ratio propuesto en Dickey y Fuller (1979), que es el estadístico más utilizado en las aplicaciones empíricas, sino que su funcionamiento se extrapola a partir de la convergencia del estimador del parámetro autorregresivo. Algo similar ocurre con el estimador normalizado de este parámetro.

Esta laguna ha sido recientemente cubierta en los trabajos de Montañés (1996) y de Montañés y Reyes (1997, 1998). En ambos artículos se estudia el comportamiento asintótico de los dos estadísticos de Dickey-Fuller cuando el proceso generador incluye una tendencia determinista que presenta distintos tipos de ruptura. Los resultados que se obtienen en estos dos trabajos indican que, en términos generales, no es cierto que los estadísticos de Dickey-Fuller se encuentren asintóticamente sesgados a favor de la hipótesis nula de raíz unitaria cuando la variable en estudio presenta una tendencia segmentada. Siempre es posible rechazar dicha hipótesis para ciertas combinaciones de valores del tamaño muestral, del periodo en el que se produce la ruptura, de la magnitud de la misma y de las propiedades de la perturbación del proceso generador. No obstante, es cierto que, en muestras finitas, un valor elevado de la magnitud de la ruptura puede significar una pérdida considerable de potencia. Además, para algunos tipos de ruptura, el rechazo de la hipótesis nula sólo es posible en situaciones poco habituales en los trabajos aplicados. Cuando se tienen en cuenta estos resultados, sí que se justifica el uso de los estadísticos de raíz unitaria que incluyen en su especificación la presencia de rupturas estructurales.

Los resultados de estos dos últimos trabajos han ayudado a mejorar el conocimiento de las propiedades de los contrastes de Dickey-Fuller en presencia de cambios estructurales. Sin embargo, hasta el momento ninguno de los trabajos anteriores se ha ocupado de estudiar el comportamiento de los contrastes de raíz unitaria cuando la variable exhibe un cambio en sus niveles medios, en ausencia de una tendencia determinista. Se desconoce, por tanto, cuáles serán las propiedades de los estadísticos de Dickey-Fuller en este tipo de circunstancias. Parece aconsejable entonces realizar un esfuerzo en esta línea y obtener los valores límite de estos estadísticos en este escenario.

Para ello, el resto del trabajo se organiza tal y como indicamos a continuación. En la siguiente sección estudiamos de forma analítica cual es el límite asintótico de los estadísticos de Dickey-Fuller cuando la variable es generada por los procesos generadores de los datos considerados en Perron (1990). Esto supone una exten-

sión de los trabajos de Montañés (1996) y Montañés y Reyes (1998) al caso en el que el proceso generador de los datos carece de tendencia determinista. En la tercera sección, investigamos si los anteriores resultados tienen vigencia en un marco de muestras finitas realizando a tal fin una serie de ejercicios de simulación de Monte Carlo. Por último, la cuarta sección recoge las principales conclusiones a las que hemos llegado a lo largo de nuestro trabajo, mientras que el apéndice final se incluyen una breve demostración de los teoremas de la sección 2.

## 2. EFECTO DE UN CAMBIO EN LA MEDIA SOBRE LOS CONTRASTES DE DICKEY-FULLER

El objetivo de esta Sección es el de analizar el comportamiento de los contrastes de raíz unitaria propuestos en Dickey y Fuller (1979) cuando la variable sometida a estudio se ve influida por la presencia de un salto en sus niveles medios. Aunque este tema ha sido tratado parcialmente en artículos precedentes, las investigaciones se han centrado básicamente en el comportamiento asintótico del estimador del parámetro autorregresivo ( $\hat{\rho}$ ). Sin embargo, su conocimiento no es suficiente para determinar cuál es el comportamiento asintótico de los estadísticos de raíz unitaria, ni siquiera cuando el valor del estimador  $\hat{\rho}$  converge asintóticamente hacia 1. Un ejemplo de ello lo tenemos en Montañés (1996) en el caso de que la variable presente una ruptura en la tendencia determinista. Además, el conocimiento de los valores límite de los estadísticos de raíz unitaria resulta útil de cara a comprender mejor su comportamiento en muestras finitas. Por estos motivos, parece adecuado obtener el funcionamiento asintótico de los dos estadísticos de raíz unitaria más utilizados habitualmente, cuando el proceso generador de los datos incorpora un cambio en los niveles medios de la variable.

A tal fin, y siguiendo el trabajo seminal de Perron (1990), vamos a considerar que la variable puede estar generada por dos procesos distintos. Bajo el primero de estos dos modelos, la variable  $y_t$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$y_t = y_{t-1} + \delta D(TB)_t + u_t \quad t=1, 2, \dots, T \quad [1]$$

donde  $D(TB)_t$  es una variable impulso que toma valor 1 si  $t=T_B+1$  y 0 en otro caso, con  $1 < T_B < T$ , donde  $T_B = \lambda T$  ( $1 > \lambda > 0$ ) es el periodo en el que se produce la ruptura. Asimismo, el parámetro  $\delta$  es el que mide el cambio producido en los niveles medios de la variable tras el periodo  $T_B$ . Por simplicidad, a lo largo del artículo suponemos que  $y_0=0$ . Como vemos, en este primer caso la variable es integrada.

En el segundo caso, la variable es estacionaria alrededor de un cambio en sus niveles medios. Este modelo se formula en los siguiente términos:

$$y_t = m + \theta DU_t + u_t \quad t=1, 2, \dots, T \quad [2]$$

donde  $DU_t$  es una variable escalón que toma valor 1 si  $T > t > T_B$  y 0 en otro caso y  $\theta$  es el parámetro que mide el salto producido en los valores medios de la variable  $y_t$ . En los dos modelos anteriores, suponemos que  $\{u_t\}_0^T$  es una secuencia de innovaciones que cumple las propiedades señaladas en el siguiente supuesto:

**Supuesto 1**

a)  $E(u_t) = 0 \quad \forall t$

b)  $\sup_t E|u_t|^{\beta+\epsilon} < \infty$  para algún  $\beta > 2$  y  $\epsilon > 0$

c)  $\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} E(T^{-1} S_T^2)$ , donde  $\sigma^2 > 0$  y  $S_T = \sum_{j=1}^T u_j$

d)  $\{u_t\}_1^\infty$  es una mixtura fuerte con coeficientes de mixtura  $\alpha_m$  que satisfacen:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{1-2/\beta} < \infty$$

Dado que el proceso generador de los datos no presenta una tendencia determinista, parece adecuado obtener los contrastes de raíz unitaria propuestos en Dickey y Fuller (1979) a partir de la estimación del siguiente modelo:

$$y_t = \mu + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad [3]$$

En concreto, el pseudo t-ratio se definiría como:

$$\tau_\mu = \frac{\hat{\rho} - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}} \quad [4]$$

mientras que el estimador normalizado del parámetro autorregresivo sería  $T(\hat{\rho} - 1)$ .

Antes de pasar a estudiar el comportamiento asintótico de estos estadísticos ante los dos procesos generadores definidos en [1] y [2], resulta conveniente formular una serie de supuestos adicionales. El primero es que las muestras pre y post ruptura se incrementan al mismo tiempo que lo hace el tamaño muestral. El segundo es que los límites asintóticos se toman cuando  $T$  tiende a infinito en una secuencia tal que asegura un valor entero de  $T_B$  para un valor dado del parámetro  $\lambda$ . Por último, a lo largo de todo este estudio asumimos que la magnitud de la ruptura toma un valor finito. Los diversos resultados a los que hemos llegado se

presentan a través de los siguientes teoremas, cuya demostración incluimos en el apéndice. Comenzamos estudiando lo que sucede cuando la variable es integrada.

**Teorema 1.** *Supongamos que  $\{y_t\}_0^1$  es una muestra de tamaño  $T+1$  generada por el modelo [1] con su perturbación aleatoria cumpliendo las condiciones señaladas en el Supuesto 1. Asimismo,  $T_B = \lambda T$ , para todo  $T$  y  $0 < \lambda < 1$ , significando ' $\Rightarrow$ ' convergencia débil. Entonces, cuando  $T$  tiende a infinito se cumple que:*

$$\text{a) } T(\hat{\rho} - 1) \Rightarrow \frac{H}{K}$$

$$\text{b) } \tau_\mu \Rightarrow \frac{\sigma H}{\sigma_u K^{1/2}}$$

En las anteriores expresiones,  $H$  y  $K$  se definen como sigue:

$$H = \frac{1}{2} \left[ W(1)^2 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma^2} \right] - W(1) \int_0^1 W(r) dr$$

$$K = \int_0^1 W(r)^2 dr - \left[ \int_0^1 W(r) dr \right]^2$$

donde  $W(r)$  representa un proceso de Wiener estándar,  $\sigma^2$  es la varianza de largo plazo definida con anterioridad y  $\sigma_u^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T E(u_t^2)$ .

Demostración: ver apéndice.

Si analizamos los resultados del teorema anterior vemos que estas distribuciones límite coinciden con las obtenidas en Phillips y Perron (1988) para el caso  $\delta=0$ . Más aún, si suponemos que  $\sigma^2 = \sigma_u^2$ , las distribuciones anteriores son las tabuladas en Fuller (1976). Este hecho nos permite afirmar que, desde el punto de vista asintótico, los estadísticos de Dickey-Fuller no se ven afectados por la presencia de una ruptura como la definida en el modelo [1]. Este resultado parece lógico si tenemos en cuenta que  $y_t$  se puede definir como suma de dos componentes:  $\delta \sum_{i=1}^t u_i$  y  $\sum_{i=1}^t u_i$ . Dado que el primero converge más rápidamente hacia 0 que el segundo, es evidente que en muestras infinitas el comportamiento de  $y_t$  viene gobernado por el último de ellos. Montañés y Reyes (1998) llegan a un resultado cualitativamente similar cuando el modelo [1] incluye un término independiente.

Las conclusiones que emanan de este primer teorema hacen que cobre más importancia el estudio del funcionamiento de los estadísticos cuando la variable es

estacionaria alrededor de un cambio en la media: si demostramos que estos estadísticos son capaces de rechazar la hipótesis alternativa, podremos concluir que asintóticamente no se ven afectados por este tipo de rupturas. Este es el propósito del siguiente teorema.

**Teorema 2.** *Supongamos que  $\{y_i\}_0^T$  es una muestra de tamaño  $T+1$  generada por el modelo [2] con su perturbación aleatoria cumpliendo las condiciones del Supuesto 1. Asimismo,  $T_B = \lambda T$ , para todo  $T$  y  $0 < \lambda < 1$ , significando ' $\rightarrow$ ' convergencia en probabilidad. Entonces, cuando  $T$  tiende a infinito se cumple que:*

$$\begin{aligned}
 \text{a) } T^{-1} [T(\hat{\rho} - 1)] &\rightarrow -\frac{\sigma_u^2 - \gamma}{\sigma_u^2 + \theta^2 \lambda (1 - \lambda)} \\
 \text{b) } T^{-1/2} \tau_\mu &\rightarrow -\sqrt{\frac{\sigma_u^2 - \gamma}{\sigma_u^2 + \gamma + 2\theta^2 \lambda (1 - \lambda)}}
 \end{aligned}$$

donde  $\gamma$  se define como  $\gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T E(u_t u_{t-1})$  y el resto de los parámetros fueron definidos con anterioridad.

Demostración: Ver apéndice

Este teorema extiende los resultados obtenidos en Perron (1990), modificándolos ligeramente como analizaremos a continuación. Antes debemos recordar que en dicho artículo se demuestra que el estimador del parámetro autorregresivo converge hacia el siguiente valor asintótico:

$$\hat{\rho} \rightarrow \frac{\gamma + \theta^2 \lambda (1 + \lambda)}{\sigma_u^2 + \theta^2 \lambda (1 + \lambda)} \tag{5}$$

Como se puede apreciar, el valor límite de  $\hat{\rho}$  se aproxima a la unidad, conforme el valor del parámetro  $\theta$  aumenta. Sin embargo, no es cierto que los contrastes de raíz unitaria estén sesgados hacia la aceptación de la hipótesis nula de raíz unitaria, tal y como se expresa en (Perron 1990, pg. 153). El teorema anterior modifica esta conclusión, ya que demuestra que los estadísticos divergen hacia  $-\infty$  y, dado un valor del parámetro  $\theta$ , siempre encontraremos un tamaño muestral que nos conduzca hacia el rechazo de la hipótesis nula. Por lo tanto, la probabilidad de que estos estadísticos sean capaces de rechazar la hipótesis de raíz unitaria es mayor de lo que cabría esperar a tenor de los resultados de Perron (1990), especialmente cuando disponemos de un número de observaciones amplio.

Otro hecho que llama la atención es que el estimador normalizado del parámetro autorregresivo diverge a velocidad  $T$ , mientras que el pseudo t-ratio lo hace de manera más lenta (a velocidad  $T^{1/2}$ ). Asimismo, los valores asintóticos resultan cualitativamente similares a los obtenidos en Montañés (1996) y Montañés y Reyes (1998) cuando el proceso generador presenta tendencia determinista y la ruptura afecta al término independiente.

Un resultado asimismo interesante es que en el denominador del pseudo t-ratio la magnitud de la ruptura aparece multiplicada por 2. Este hecho, combinado con la mayor lentitud en la convergencia del pseudo t-ratio, hace previsible que el estimador normalizado del parámetro autorregresivo vaya a ser más potente en el escenario definido en este trabajo.

La combinación de los resultados de ambos teoremas nos permite concluir que, desde el punto de vista asintótico, los contrastes de Dickey-Fuller no se ven alterados por la presencia de un cambio en los niveles medios de las variables. No obstante, debemos señalar que lo habitual es disponer de un número no muy elevado de observaciones. Entonces, aun cuando los resultados anteriores pueden proporcionarnos información útil acerca de cuál va a ser el funcionamiento de ambos estadísticos en muestras finitas, también es cierto que no siempre los valores de muestras finitas se acercan rápidamente a los valores límite. Además, es previsible que los dos contrastes de raíz unitaria pierdan buena parte de su potencia a medida que aumente la magnitud de la ruptura, especialmente si el número de observaciones disponible no es elevado. En consecuencia, parece aconsejable estudiar cómo se comportan los dos estadísticos en tamaños muestrales de uso común. Este es el objetivo de la siguiente sección.

### 3. UN ESTUDIO DE MONTE CARLO PARA MUESTRAS FINITAS

Para estudiar cuál es el funcionamiento de los estadísticos de Dickey-Fuller en muestras finitas vamos a realizar una serie de ejercicios de simulación. A tal fin, el diseño de los diversos ejercicios es el siguiente. El término independiente del modelo [2] es  $\mu=1$ , los tamaños muestrales considerados son  $T=\{50, 100, 250\}$ , los valores que pueden adoptar los parámetros que miden la magnitud de la ruptura son  $\delta=\theta=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ . Asimismo, el parámetro que controla el periodo en el que se produce la ruptura es igual a  $\lambda = \{0'3, 0'5, 0'7\}$ . Bajo estas consideraciones, las observaciones de la variable  $y_t$  fueron generadas de acuerdo con los modelos [1] y [2] con las innovaciones de ambos modelos siguiendo una distribución niid(0,1). El número de replicaciones para cada una de las combinaciones de los parámetros fue de 50.000, generándose los números aleatorios mediante la subrutina RNDN de



Gauss. Los principales resultados a los que llegamos se presentan en los cuadros 1 y 2. Estos dos cuadros recogen, respectivamente, el tamaño y la potencia de los estadísticos ante diversos valores del tamaño muestral, de la magnitud de la ruptura y del periodo en el que ésta ocurre.

Del análisis de estos dos cuadros se desprenden las siguientes conclusiones. En primer lugar, del estudio del cuadro 1 se desprende que el tamaño empírico de los estadísticos se encuentra siempre próximo al teórico 5%. Sólo aquellas combinaciones de parámetros que conjugan un número de observaciones escaso, con un valor de la magnitud de la ruptura elevado evidencian un alejamiento significativo de este valor teórico. Asimismo, no se aprecian diferencias sensibles en el tamaño de los contrastes ante variaciones del parámetro  $\lambda$ .

**Cuadro 1**  
TAMAÑO DE LOS ESTADÍSTICOS DE DICKEY-FULLER(1)

	$\lambda = 0.3$		$\lambda = 0.5$		$\lambda = 0.7$	
	$\tau_{\mu} T (\hat{\rho} - 1)$		$\tau_{\mu} T (\hat{\rho} - 1)$		$\tau_{\mu} T (\hat{\rho} - 1)$	
	T = 50					
$\delta = 1$	4.86	4.56	4.83	4.63	4.83	4.56
$\delta = 3$	4.07	4.26	4.16	4.40	4.02	4.22
$\delta = 5$	2.96	3.51	2.86	3.38	2.82	3.41
$\delta = 7$	1.69	2.23	1.77	2.39	1.73	2.39
$\delta = 9$	0.90	1.36	0.87	1.31	0.82	1.34
	T = 100					
$\delta = 1$	5.02	4.85	4.84	4.74	4.85	4.65
$\delta = 3$	4.58	4.59	4.51	4.58	4.55	4.62
$\delta = 5$	3.92	4.22	3.91	4.36	3.85	4.26
$\delta = 7$	3.09	3.62	2.93	3.58	2.95	3.52
$\delta = 9$	2.16	2.86	2.12	2.87	2.07	2.78
	T = 250					
$\delta = 1$	4.94	4.95	4.80	4.73	5.00	4.94
$\delta = 3$	4.65	4.63	4.77	4.78	4.66	4.64
$\delta = 5$	4.36	4.54	4.49	4.60	4.42	4.46
$\delta = 7$	4.08	4.38	4.02	4.35	3.94	4.40
$\delta = 9$	3.54	4.01	3.34	3.93	3.55	4.01

(1) Los valores recogidos en este cuadro se calcularon de la siguiente manera. La variable  $y_t$  fue generada a partir del modelo [1] con las innovaciones siguiendo una distribución  $niid(0,1)$ . A continuación se estimó el modelo [3]. Para cada combinación de parámetros se realizaron 50.000 replicaciones. Los resultados expresan el porcentaje de rechazos la hipótesis nula, dado un nivel de significación del 5%.

Desde el punto de vista de la potencia de los estadísticos, el cuadro 2 señala la clara dependencia de la potencia de los estadísticos con respecto al tamaño muestral y a la magnitud de la ruptura. Así, por ejemplo, observamos que cuando disponemos de 50 observaciones, una magnitud de la ruptura equivalente a cinco veces

**Cuadro 2**  
**POTENCIA DE LOS ESTADÍSTICOS DE DICKEY-FULLER(1)**

$\lambda = 0.3$		$\lambda = 0.5$		$\lambda = 0.7$	
$\tau_{\mu} T (\hat{\rho} - 1)$		$\tau_{\mu} T (\hat{\rho} - 1)$		$\tau_{\mu} T (\hat{\rho} - 1)$	
T = 50					
$\delta = 1$	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
$\delta = 3$	86.73	93.84	65.50	83.04	74.26
$\delta = 5$	6.38	10.27	0.36	1.62	1.07
$\delta = 7$	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
$\delta = 9$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
T = 100					
$\delta = 1$	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
$\delta = 3$	100.00	100.00	99.98	100.00	100.00
$\delta = 5$	88.61	96.47	45.27	74.96	60.64
$\delta = 7$	6.28	12.66	0.05	0.58	0.22
$\delta = 9$	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
T = 250					
$\delta = 1$	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
$\delta = 3$	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
$\delta = 5$	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
$\delta = 7$	100.00	100.00	98.16	99.97	99.56
$\delta = 9$	81.57	96.29	5.44	39.85	16.95

(1) Los valores recogidos en este cuadro se calcularon de la siguiente manera. La variable  $y_t$  fue generada a partir del modelo [2] con las innovaciones siguiendo una distribución niid(0,1). A continuación se estimó el modelo [3]. Para cada combinación de parámetros se realizaron 50.000 replicaciones. Los resultados expresan el porcentaje de rechazos la hipótesis nula, dado un nivel de significación del 5%.

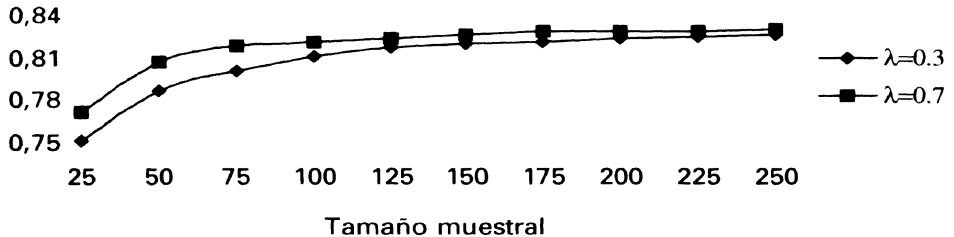
la desviación típica de la perturbación supone que los estadísticos tiendan a sobreaceptar la hipótesis nula de raíz unitaria. Este resultado está en consonancia con los enunciados de Perron (1990), ya que en este caso el límite del estimador del parámetro autorregresivo es 0.828. Sin embargo, esta proximidad del estimador  $\hat{\rho}$  a la unidad no impide que, para tamaños muestrales más elevados, se pueda rechazar la existencia de una raíz unitaria en el 100% de las ocasiones. El mensaje que se desprende de este análisis es que a medida que aumenta el tamaño muestral disponible, mayor es la magnitud de la ruptura necesaria para evidenciar un mal funcionamiento de los contrastes de Dickey-Fuller. No obstante, para que se aprecie esta circunstancia, la magnitud de la ruptura debe tomar valores que son poco habituales en la práctica.

Otro hecho que se aprecia a partir de los resultados del Cuadro 2 es la relación entre la potencia de los estadísticos y el periodo en el que se produce la ruptura. Como se puede comprobar en el cuadro 2, la potencia de los estadísticos para  $\lambda=0.5$  es siempre menor o igual a la obtenida en los otros dos casos. La explicación de este fenómeno la tenemos en los valores límite expresados en el Teorema 2. Si consideramos como dado el valor de todos los parámetros, excepto de aquél que gobierna el periodo en el que se produce la ruptura ( $\lambda$ ), resulta evidente que el valor límite de los dos estadísticos se maximiza para  $\lambda=0.5$ . Por tanto, parece lógico que el número de rechazos sea menor en el centro de la muestra.

Asimismo, del análisis de los resultados del Teorema 2 también se desprende que los valores límite de estos estadísticos son simétricos con respecto al parámetro  $\lambda$ . Por tanto, los valores asintóticos para  $\lambda=0.3$  coinciden con los de  $\lambda=0.7$ . Sin embargo, en muestras finitas se evidencia un comportamiento diferenciado de los estadísticos de Dickey-Fuller atendiendo al periodo en el que se produjo el cambio en la media de la variable. Como vemos en el Cuadro 2, la potencia de los estadísticos es superior cuando  $\lambda=0.3$ . Este hecho se justifica teniendo en cuenta el gráfico 1. En él se representa la evolución del estimador del parámetro autorregresivo para distintos tamaños muestrales. Este gráfico se obtuvo de la siguiente manera. Las observaciones de la variable  $y_t$  se generaron a partir del modelo [2] con  $\mu=1$ ,  $\theta=5$  y las innovaciones del modelo siguiendo una distribución  $niid(0,1)$ . A partir de estos valores se estimó el modelo [3] para diversos tamaños muestrales. El número de replicaciones en cada caso fue de 50.000 veces. El gráfico 1 reproduce los valores medios del estimador del parámetro autorregresivo para los distintos tamaños muestrales. El análisis de este gráfico nos permite observar que los valores empíricos para  $\lambda=0.3$  se aproximan más lentamente hacia el valor asintótico que los

Gráfico 1

## EVOLUCIÓN DEL ESTIMADOR DEL PARÁMETRO AUTORREGRESIVO PARA DISTINTOS TAMAÑOS MUESTRALES



valores empíricos para  $\lambda=0.7$ (1). Esta disparidad en la aproximación de los valores empíricos a los asintóticos es la causante de que, en muestras finitas, la potencia de los dos estadísticos de raíz unitaria sean siempre superior cuando  $\lambda=0.3$ .

Por último, resulta destacable que la potencia del estimador normalizado no sea nunca inferior a la del pseudo t-ratio. Este resultado es fácilmente explicable si atendemos de nuevo a los valores límite de los estadísticos. Por lo tanto, parece lógico que este estadístico posea una potencia superior a la del pseudo t-ratio en un escenario de variables con cambio en la media.

#### 4. CONCLUSIONES

En este artículo hemos analizado el comportamiento asintótico de los contrastes de Dickey-Fuller cuando la variable que queremos estudiar presenta un cambio en su media, extendiendo los resultados de Perron (1990). Al contrario de lo que cabría esperar de acuerdo a algunos resultados precedentes de la literatura, los estadísticos de Dickey-Fuller no se ven influidos asintóticamente por la presencia de un cambio finito en la media de la variable. Cuando la variable en estudio se genera bajo la hipótesis nula considerada en Perron (1990), estos estadísticos convergen hacia las distribuciones obtenidas en Phillips y Perron (1998), que fueron tabuladas en Fuller (1976) bajo la hipótesis de no autocorrelación de las perturbaciones. Al mismo tiempo divergen hacia  $-\infty$  cuando el proceso generador de los datos se relaciona con una variable estacionaria alrededor de una media que presenta un cambio en un periodo determinado.

(1) Para la combinación de parámetros  $\mu = 1$ ,  $\theta = 5$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\sigma^2 = 1$ , el valor límite del estimador del parámetro autorregresivo es igual a 0.84.

Para evaluar la importancia de estos resultados en tamaños muestrales de interés, realizamos diversos ejercicios de simulación. Sus resultados nos indican que los estadísticos de Dickey-Fuller, en especial el estimador normalizado, se comportan de un modo razonablemente correcto en muestras finitas. Sin embargo, para una magnitud de la ruptura superior a 5 veces la desviación típica de la innovación los estadísticos muestran serias distorsiones, incluso en muestras de 100 observaciones. No obstante, debemos indicar que este tipo de valores de la magnitud de la ruptura no es muy frecuente en las variables habitualmente utilizadas en los trabajos empíricos.

## APÉNDICE

Para demostrar los resultados recogidos en los teoremas 1 y 2 vamos a adoptar el procedimiento seguido en Perron (1989) y en Montañés y Reyes (1997). Para ello debemos comenzar por considerar que los diferentes elementos que intervienen en la determinación de los valores asintóticos se pueden expresar en función de una serie de momentos muestrales de la variable  $y_t$ . En concreto, el estimador del parámetro autorregresivo de puede expresar como:

$$\hat{\rho} = \frac{T \sum y_t y_{t-1} - \sum y_t \sum y_{t-1}}{T \sum y_{t-1}^2 - (\sum y_{t-1})^2} \quad [\text{A.1}]$$

Del mismo modo, la suma residual del modelo [3] se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{SR} = & \left[ -T(\sum y_t y_{t-1})^2 + 2\sum y_t \sum y_t y_{t-1} \sum y_{t-1} - (\sum y_t)^2 \sum y_{t-1}^2 - (\sum y_{t-1})^2 \sum y_t^2 + \right. \\ & \left. + T \sum y_{t-1}^2 \sum y_t^2 \right] \left[ T \sum y_{t-1}^2 - (\sum y_{t-1})^2 \right]^{-1} \end{aligned} \quad [\text{A.2}]$$

y, de forma similar, el segundo elemento de la diagonal principal de la matriz  $(X'X)^{-1}$  es igual a:

$$(X'X)_{\hat{\rho}\hat{\rho}}^{-1} = \frac{T}{T \sum y_{t-1}^2 - (\sum y_{t-1})^2} \quad [\text{A.3}]$$

La obtención de los valores límites incluidos en los Teoremas 1 y 2 depende ahora del cálculo de los diversos momentos muestrales y de su posterior sustitución

en las ecuaciones [A.1]-[A.3]. En el caso del Teorema 1, dichos momentos se presentan en el siguiente Lema.

Lema A.1: *Supongamos que  $y_t$  está generada de acuerdo con el modelo [1] con la perturbación del modelo cumpliendo las condiciones expresadas en el Supuesto 1. Entonces, cuando  $T$  tiende hacia infinito se cumple que:*

$$\sum y_t = T^{3/2} \sigma \int_0^1 W(r) dr + T(1-\lambda)\delta + O_p(T) \quad [a]$$

$$\sum y_t y_{t-1} = T^2 \sigma^2 \int_0^1 W(r)^2 dr + 2\delta T^{3/2} \sigma \int_0^1 W(r) dr + T \left\{ \delta^2 (1-\lambda) - \sigma_u^2 - \frac{\sigma^2}{2} \left[ W(1)^2 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma^2} \right] \right\} + O_p(T) \quad [b]$$

$$\sum y_t^2 = T^2 \sigma^2 \int_0^1 W(r)^2 dr + 2\delta T^{3/2} \sigma \int_0^1 W(r) dr + O_p(T^{3/2}) \quad [c]$$

donde  $\delta$ ,  $\sigma^2$ ,  $\sigma_u^2$  y  $W(r)$  fueron definidos con anterioridad.  $O_p(T^m)$  indica la existencia de términos que tienden hacia 0 a velocidad  $T^m$ . La demostración de los resultados incluidos en este lema es sencilla siguiendo los trabajos de Perron (1989, pg. 1389) o Banerjee et al. (1993, pg. 91).

Sustituyendo los valores procedentes del Lema A.1 en la expresión [A.1] se obtiene que:

$$\hat{\rho} = \frac{\sigma^2 K T^3 + \sigma^2 H T^2 + O_p(T^2)}{\sigma^2 K T^3 + O_p(T^3)} \quad [A.4]$$

donde  $H$  y  $K$  fueron definidos previamente. Si además tenemos en cuenta que, bajo la hipótesis nula, la varianza estimada del estimador del parámetro autorregresivo converge hacia el verdadero valor de la varianza de la perturbación y que el límite del segundo elemento de la diagonal principal de la matriz  $(X'X)^{-1}$  se puede obtener a partir de la siguiente expresión:

$$(X'X)^{-1}_{pp} = \frac{T}{\sigma^2 K T^3 + O_p(T^3)} \quad [A.5]$$

la demostración de los resultados del Teorema 1 es inmediata.

Para obtener los resultados del Teorema 2 debemos comenzar por definir nuevamente los valores muestrales de la variable  $y_t$ . Estos se recogen en el siguiente Lema.

*Lema A.2: Supongamos que  $y_t$  está generada de acuerdo con el modelo [2] con la perturbación del modelo cumpliendo las condiciones expresadas en el Supuesto 1. Entonces, cuando  $T$  tiende hacia infinito se cumple que:*

$$\sum y_t = [\mu + (1-\lambda)\theta]T + O_p(T) \quad [a]$$

$$\sum y_t y_{t-1} = [\gamma + \theta^2(1-\lambda) + 2\theta(1-\lambda)\mu + \mu^2]T + O_p(T) \quad [b]$$

$$\sum y_t^2 = [\sigma_u^2 + \theta^2(1-\lambda) + 2\theta(1-\lambda)\mu + \mu^2]T^2 + O_p(T^2) \quad [c]$$

donde los parámetros  $\mu$ ,  $\theta$ ,  $\sigma_u^2$  y  $\gamma$  fueron definidos previamente. Sustituyendo los valores de este Lema en (A.1), el estimador del parámetro autorregresivo se puede expresar como sigue:

$$\hat{\rho} = \frac{[\gamma + \theta^2\lambda(1-\lambda)]T^2 + O_p(T^2)}{[\sigma_u^2 + \theta^2\lambda(1-\lambda)]T^2 + O_p(T^2)} \quad [A.6]$$

A partir de este resultado es directa la obtención de el apartado (a) del Teorema 2. Para demostrar la convergencia del pseudo t-ratio debemos empezar por obtener el límite de la suma residual. Sin más que sustituir las expresiones del Lema A.2. en [A.2], tenemos que la suma residual se expresa como:

$$SR = \frac{(\sigma_u^2 - \lambda) [\gamma + \theta^2\lambda(1-\lambda)]T^3 + O_p(T^3)}{[\sigma_u^2 + \theta^2\lambda(1-\lambda)]T^2 + O_p(T^2)} \quad [A.7]$$

Al mismo tiempo, el valor límite del segundo elemento de la diagonal principal de la matriz se puede obtener a partir de:

$$(X'X)_{\hat{\rho}\hat{\rho}}^{-1} = \frac{T}{[\sigma_u^2 + \theta^2\lambda(1-\lambda)]T^2 + O_p(T^2)} \quad [A.8]$$

A partir de [A.7] y [A.8] resulta sencillo demostrar que las varianzas estimadas del estimador del parámetro autorregresivo converge hacia:

$$T \hat{\sigma}_v^2 \rightarrow \frac{\sigma_v^2 - \gamma}{[\sigma_v^2 + \gamma + 2 \theta^2 \lambda (1 - \lambda)]^2} \quad [A.9]$$

Utilizando los resultados (A.6) y (A.9), es inmediato lograr la expresión (b) del Teorema 2.

## REFERENCIAS

- BANERJEE, A, J. DOLADO, J. GALBRAITH Y D. HENDRY (1993). "Co-integration, Error Correction and the Econometric of Non-Stationary Data" Oxford University Press, Oxford.
- BANERJEE, A., R. LUMSDAINE AND J. STOCK (1992). "Recursive and Sequential Tests of the Unit Root and Trend Break Hypothesis: Theory and International Evidence" *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 271-287.
- CLEMENTE, J., A. MONTAÑÉS Y M. REYES (1997). "Testing for a Unit Root in Variables with Two Changes in the Mean" (de próxima aparición en *Economics Letters*).
- CHEN, C. Y G. TIAO (1990). "Random Level-Shift Time Series Models, ARIMA Approximations, and Level Shift Detection" *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 83-97.
- DICKEY, D.A., D. P. HASZA Y W. A. FULLER (1984). "Testing for Unit Roots in Seasonal Time Series", *Journal of American Statistical Association*, 79, 355-367.
- DICKEY, D. Y W. FULLER (1979). "Distribution of the Estimator for Autoregressive Time series with a Unit Root", *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-31.
- DICKEY, D. A. Y S. G. PANTULA (1987). "Determining the Order of Differencing in Autoregressive Processes", *Journal of Business and Economic Statistics*, 5, 445-461.
- FULLER, W. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*. Ed. Wiley, New York.
- HENDRY, D. Y A. NEALE (1991). "A Monte Carlo Study of the Effects of Structural Breaks on Tests for Unit Root" Capítulo 8 de *Economic Structural Change: Analysis and Forecasting*. Springer-Verlag. New York.
- HYLLEBERG, S., R. F. ENGLE, C. W. J. GRANGER Y B. S. YOO (1990). "Seasonal Integration and Cointegration", *Journal of Econometrics*, 49, 215-238.



- LUMSDAINE, R. L. Y D. H. PAPELL (1997), Multiple Trends and the Unit Root Hypothesis, *The Review of Economic and Statistics*, 79, 212-218.
- MONTAÑÉS, A. (1996). "Efecto de una ruptura estructural sobre los contrastes de Dickey-Fuller" *Revista Española de Economía*, Vol. 13.2, 221-236.
- MONTAÑÉS, A. Y M. REYES (1997). "Effect of a Shift in the Trend Function on Dickey-Fuller Unit Root Tests" *Econometric Theory*.
- MONTAÑÉS, A. Y M. REYES (1998). "The Asymptotic Behaviour of the Dickey-Fuller Tests Under the Crash Hypothesis ", Manuscrito, Universidad de Zaragoza.
- PERRON, P. (1989). "The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis" *Econometrica*, 57, 1361-1401.
- PERRON, P. (1990). "Testing for a Unit Root in a Time Series With a Changing Mean" *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 153-162.
- PERRON, P. Y T. VOGELSANG (1992). "Nonstationarity and Level Shifts With an Application to Purchasing Power Parity" *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 301-320.
- PHILLIPS, P.C.B. Y P. PERRON (1988). "Testing for a Unit Root in Time Series Regression", *Biometrika*, 75, 335-346.
- RAPPOPORT, P. Y L. REICHLIN (1989). "Segmented Trends and Non-Stationary Time Series" *The Economic Journal*, 99, 168-177.
- SAID, S. E. Y D. DICKEY (1984). "Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order", *Biometrika*, 71, 599-607.
- ZIVOT, E. Y D. W. K. ANDREWS (1992), Further Evidence on the Great Crash, the oil-Price Shocks, and the Unit-Root Hypothesis, *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 251-270.

## **ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE DICKEY-FULLER CONTRASTS IN VARIABLES WITH A MODIFIED MEASURE**

### **SUMMARY**

This paper analyses the asymptotic behaviour of the Dickey-Fuller test when the variable under consideration shows a jump at the medium levels. Considering the processes generating the data used in Perron (1990), we prove that neither the pseudo t-ratio nor the normalized estimator are asymptotically concerned by the existence of this type of breaking. In finite samples, however, high magnitudes of the breaking may distort their performance.

*Key words:* Segmented average; Dickey-Fuller Contrasts; Omission of relevant variables

*AMS Classification:* 90A20