ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
Vol. 39, Núm. 142, 1997, págs. 67 a 97

Análisis de concordancia comparativa difusa. Propuesta y evaluación mediante un caso práctico

por
ANTONIO MORILLAS RAYA
Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría)
Universidad de Málaga

BÁRBARA DÍAZ DIEZ
Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría)
Universidad de Málaga

JESÚS GONZÁLEZ HERRERA
Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría)
Universidad de Málaga

RESUMEN

En este trabajo se propone un análisis multiatributo difuso, que hemos llamado de *concordancia comparativa*, como instrumento de ayuda al proceso de toma de decisiones en un entorno de falta de información precisa, como es, generalmente, la selección de proyectos en planificación regional y del medio ambiente. Mediante una aplicación a la selección de programas de actuación del Plan de Medio Ambiente de Andalucía (1995-2000), se hace un estudio comparativo del método propuesto con otros planteamientos que pueden aplicarse a la selección de alternativas de actuación con información difusa.(1)

Palabras clave: números difusos, análisis multiatributo difuso, medio ambiente, planes regionales.

Clasificación AMS: 04A72, 90A30.

1. INTRODUCCIÓN

En múltiples ocasiones las Administraciones Públicas se ven obligadas a tomar decisiones acerca de cuantiosos volúmenes de inversión y/o de actuaciones de carácter normativo en situaciones de incertidumbre, con poco conocimiento de sus posibles efectos y escasa o nula información. Para establecer un mínimo umbral de formalización en el proceso de toma de decisiones no hay, frecuentemente, más opción que la de acudir a opiniones de expertos para valorar, según diversos criterios u objetivos, los efectos de las posibles alternativas de actuación. Esto es especialmente cierto cuando en los Planes de Desarrollo Regional, obligatorios para un gran número de Comunidades Autónomas con vistas a la obtención de fondos de la Unión Europea, se incorporan de forma explícita objetivos y actuaciones relacionadas con el Medio Ambiente. Si a veces resulta inalcanzable la valoración exacta de actuaciones o previsiones de comportamiento de ciertas variables en el ámbito puramente económico, mucho más difícil parece enfrentarse con valoraciones de variables relacionadas con los recursos naturales, la contaminación de las aguas o de la atmósfera, la destrucción de un paisaje, etc. En tales casos, la falta de información cuantificada sólo puede suplirse por información de carácter cualitativo que debe ser manejada en un ambiente de imprecisión, ambigüedad y vaguedad. La teoría de conjuntos difusos (borrosos) puede ser una vía adecuada para enfrentarse a este tipo de situaciones.

En las páginas que siguen, se desarrolla una aplicación de un método sencillo de ayuda a la decisión multiatributo con información difusa, para tratar de ordenar las diferentes alternativas de actuación propuestas en el Plan de Medio Ambiente de Andalucía 1995-2000.

(1) Los autores quieren agradecer públicamente a los evaluadores sus precisiones y sugerencias

2. LA TEORÍA DE CONJUNTOS DIFUSOS (FUZZY SETS)

Desde el primer momento en que se observa o mide la característica de una variable que deseamos estudiar, hasta la aplicación final de los métodos para su análisis que se consideren más oportunos, se pueden detectar diferentes fuentes de incertidumbre (véase Bandemer y Näther (1992) pp. 1-8). Una primera fuente de incertidumbre surge de la **variabilidad de los datos**. Es la propia naturaleza no determinista de los hechos sociales y naturales la que propicia tal variabilidad. Otra clase de incertidumbre es la **imprecisión** que surge al observar o medir los valores de una variable, tanto por parte del instrumento de medida, como por parte del observador que la realiza. Por último, la **vaguedad** aparece cuando se utiliza el lenguaje humano, sea o no profesional, para describir la observación o medida del resultado de un experimento como un dato. Esto es especialmente cierto cuando se trabaja con opiniones de expertos que se traducen en expresiones verbales que, posteriormente, han de ser tratadas como modalidades de una variable (variables lingüísticas).

Evidentemente, de entre las formas más conocidas para hacer frente al tratamiento de la incertidumbre está la teoría de la probabilidad. Hay quién, incluso, defiende que la lógica continua, en la que cabe incluir la lógica difusa, puede ser contemplada dentro de esta teoría. Sin embargo, hay, al menos, dos dificultades para considerar que eso puede ser así(2). En primer lugar, la probabilidad trata de la incertidumbre en la ocurrencia de sucesos *bien* definidos, mientras que la lógica continua trata del *grado de ocurrencia* de sucesos *mal* definidos. En segundo lugar, es un hecho matemático que la intersección de un conjunto con su complementario es siempre el conjunto vacío; por el contrario, trabajando con conjuntos difusos esto casi nunca sucede, salvo si se refiere al caso particular de un conjunto ordinario.

Para un conjunto difuso la cuestión de pertenencia de un elemento al conjunto no es cuestión de todo o nada, sino que son posibles diferentes *grados de pertenencia*. La función de pertenencia puede tomar cualquier valor en el intervalo real [0,1]. Es decir, si U es un subconjunto de R, $m_A : U \rightarrow [0, 1]$ es la función de pertenencia de un conjunto difuso, quedando perfectamente definido un conjunto difuso A como sigue(3):

---

(2) Una exposición sobre las relaciones entre la teoría de la probabilidad y la teoría de conjuntos difusos en experimentos aleatorios, puede verse, por ejemplo, en Gil, M.A. (1993). En las páginas. 482-483 se resumen los casos en que una y otra teorías cobran su pleno sentido.

(3) En adelante, un conjunto clásico será identificado por estar en letra negrita, mientras que un conjunto difuso se escribirá en letra de texto normal.

$$A=\{\ (x,\ m_A(x)) : x \in U\ ,\ m_A(x) \in [0,\ 1]\ \}$$

La función de pertenencia, lógicamente, puede ser discreta, continua o mixta.

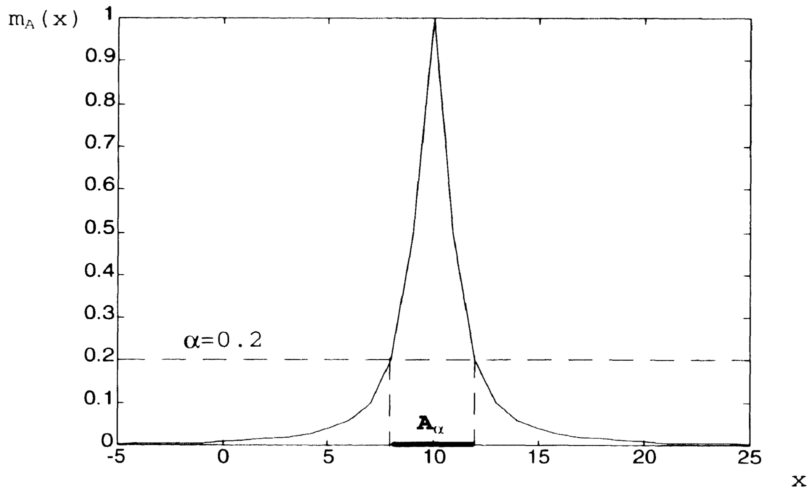
Un concepto muy útil es el de conjunto de nivel (umbral) α o ***α-cut*** (α-corte), como se conoce en la bibliografía sobre conjuntos difusos. Este concepto permite un enfoque interesante, ya que la familia formada por los α-cortes contiene toda la información sobre el conjunto difuso. Se llama *α-corte* del conjunto difuso A al conjunto común definido como sigue:

$$\mathbf{A}_\alpha = \{\ x \in U : m_A(x) \geq \alpha\ \},\quad \alpha \in [0,\ 1]$$

Se trata, por tanto, del conjunto que contiene todos los valores de x con un valor de pertenencia o compatibilidad (presunción, certeza, son otras expresiones utilizadas) de al menos α. Si sólo se consideran los valores de x tales que $m_A(x) > \alpha$, se llamará α-corte estricto o fuerte, y se le denomina como $\mathbf{A}^{>}_{\alpha}$. El conjunto $\mathbf{A}_{\alpha=1}$, se suele llamar el *núcleo* de A. La Figura 1 muestra la forma que toma un *α-corte.* En este caso, el conjunto resultante es el representado por el subintervalo en línea gruesa formado en torno al valor 10, que es el único elemento del núcleo del conjunto difuso correspondiente.

Figura 1

NÚMEROS REALES PRÓXIMOS A 10



Sin embargo, es el *principio de extensión* una de las ideas fundamentales de la teoría de conjuntos difusos. Fue propuesta por Zadeh (1965) y da un método general para extender, o hacer posible, la aplicación de conceptos matemáticos no difusos al tratamiento de cantidades difusas. Es especialmente útil para los propósitos del cálculo difuso, por cuanto en muchas ocasiones es oportuna su aplicación al álgebra real con números difusos. Su formulación es como sigue:

Si X es el producto cartesiano de n universos, $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son n conjuntos difusos en $X_1, X_2, \ldots, X_n$, respectivamente. Entonces, si $f: X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \rightarrow Y$, el principio de extensión nos permite definir un conjunto difuso B en Y, en la forma:

$$B=\{(y, m_B(y)) \mid y=f(x_1,\ldots, x_n), (x_1,\ldots, x_n)\in X\}$$

donde,

$$m_B(y) = \sup_{\substack{(x_1,\ldots,x_n) \in X \\ (x_1,\ldots,x_n) \in f^{-1}(y)}} \min\{m_{A_1}(x_1),\ldots m_{A_n}(x_n)\}, \text{ si } f^{-1}(y) \neq \varnothing$$
$$= 0, \quad \text{en otro caso}$$

El principio de extensión ha sido reelaborado utilizando la suma algebraica en vez del supremo y el producto en vez del mínimo. Sin embargo, la definición más utilizada continúa siendo esta propuesta original de Zadeh. La aplicación de este principio supone, generalmente, una gran cantidad de cálculo, si no se imponen restricciones a la forma de la función de pertenencia. Por eso, tanto para la definición de variables lingüísticas, como, muy especialmente, para la representación de números difusos, la forma **triangular** de la función de pertenencia es una norma simplificadora general, a pesar de las serias advertencias vertidas por la teoría acerca de la tremenda importancia que puede tener la forma de la función de pertenencia.

3. NÚMEROS DIFUSOS

Un conjunto difuso A en R^1 se llama un *número difuso* si A es convexo y normal. La condición de convexidad, en referencia a la función de pertenencia, se define como sigue:

$$m_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{m_A(x_1), m_A(x_2)\}, \ \forall x_1, x_2 \in U \ \text{y} \ \forall \lambda \in [0, 1]$$

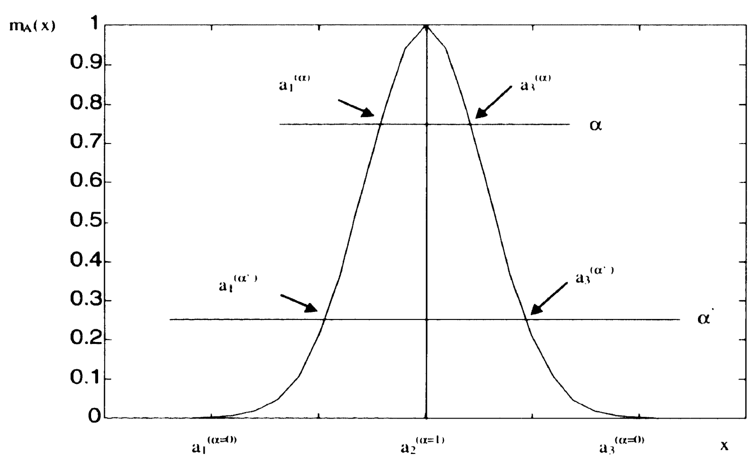
Alternativamente, también se puede decir que un conjunto difuso es convexo si todos los α-cortes son convexos (véase la Figura 2):

$$\alpha' < \alpha \Rightarrow (a_1^{(\alpha')} \leq a_1^{(\alpha)}\ ,\ a_3^{(\alpha')} \geq a_3^{(\alpha)})\ ,\ \text{siendo } a_1^{(\alpha)} = \min(\mathbf{A}_\alpha) \text{ y } a_3^{(\alpha)} = \max(\mathbf{A}_\alpha)$$

La condición de normalidad exige que exista al menos un punto, $M \in R^1$, con $m_A(M) = 1$, o, lo que es igual, $\mathbf{A}_{\alpha=1}$ no puede reducirse al conjunto vacío. Si ese punto es único, se llamará número triangular.

Figura 2

NÚMERO DIFUSO NORMAL Y CONVEXO CON α-CORTES



La expresión lingüística de tal número difuso sería: "Aproximadamente M". Para una mejor manipulación, suelen definirse los números difusos tipo L-R (left-right), propuestos por Dubois y Prade (1979, p. 340), como sigue:

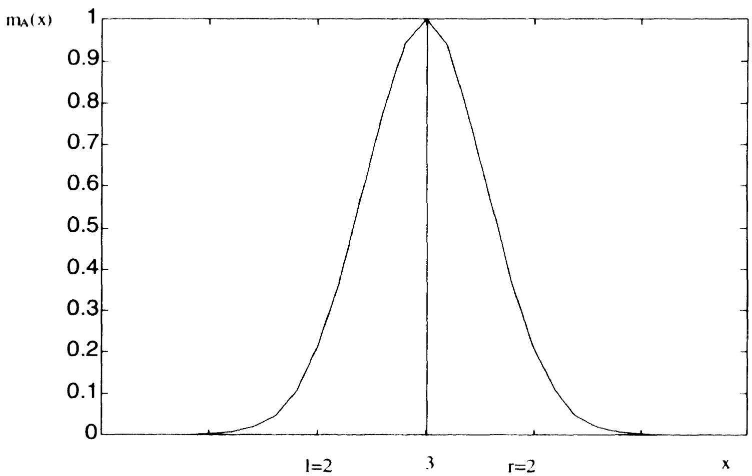
$$m_A(x) = L[(M - x)/l],\ \ \text{si } x \leq M\ ;\ \ l > 0$$

$$= R[(x - M)/r],\ \ \text{si } x \geq M;\ \ r > 0$$

donde L y R son funciones fuertemente decrecientes en R^+, con $L(0) = R(0) = 1$. M es llamado el *valor central* del número difuso. L y R son, respectivamente, las *funciones de forma* a izquierda y derecha, mientras que l y r son, respectivamente, la *extensión*, *amplitud* o *dispersión* a izquierda y derecha. En la Figura 3, puede contemplarse una interpretación gráfica del número difuso, del tipo L-R, "Aproximadamente 3".

Figura 3

NÚMERO DIFUSO DEL TIPO L-R.



La aplicación del principio de extensión para operar con este tipo de números no es una tarea cómoda, aunque se ha propuesto algún algoritmo (Dubois, D. y Prade, H, 1979; pp. 333-335). De ahí que el empleo de formas triangulares para definir números difusos, como caso particular en que las funciones L y R son lineales, se haya generalizado.

Un número difuso triangular tiene, como su nombre indica, la forma triangular recogida en la Figura 4. Como puede comprobarse, queda perfectamente definido mediante la terna (a_1, a_2, a_3). La función de pertenencia para este número difuso triangular viene dada por:

$$m_A(x) = 0, \quad x < a_1$$

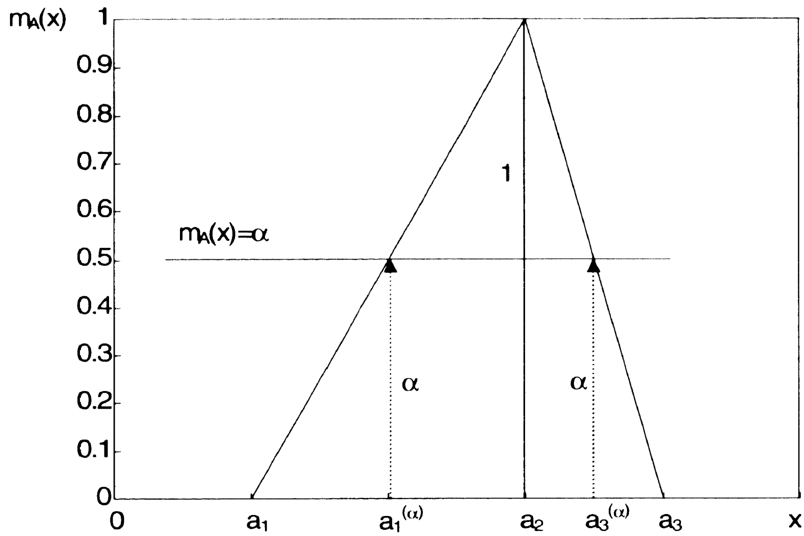
$$= (x-a_1) / (a_2-a_1), \quad a_1 \leq x \leq a_2$$

$$= (a_3-x) / (a_3-a_2), \quad a_2 \leq x \leq a_3$$

$$= 0, \quad x > a_3$$

Figura 4

NÚMERO DIFUSO TRIANGULAR $A=(a_1, a_2, a_3)$



Alternativamente, se puede definir un número difuso triangular mediante el conjunto alfa-corte, o soporte de nivel α, como sigue:

$$\mathbf{A}_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] = [a_1 + (a_2-a_1)\alpha, \ a_3 - (a_3-a_2)\alpha], \quad \forall\alpha \in [0, 1]$$

Es preciso señalar que si bien la suma, la resta y la multiplicación por un número real de números difusos triangulares, da como resultado un número difuso triangular, algunas operaciones con estos, tales como la multiplicación, inverso, división, máximo y mínimo, entre otras, no arrojan necesariamente como resultado un número difuso triangular, aunque se han propuesto algunas aproximaciones al respecto (Kauffman y Gupta, 1988). Las operaciones utilizadas para llevar a cabo la aplicación que desarrollamos a continuación, se han hecho sobre la base de las definiciones dadas por estos autores. Por poner un ejemplo, el producto de dos números difusos, definidos en R^+, obtenido por medio de sus α-cortes(4), sería:

(4) Es posible definir este producto en R. Véase, Kauffman y Gupta (1985, pp.325-334).

$$\mathbf{A}_\alpha\ (.)\ \mathbf{B}_\alpha = [a_1+(a_2-a_1)\alpha,\ a_3-(a_3-a_2)\alpha]\ (.)\ [b_1+(b_2-b_1)\alpha,\ b_3-(b_3-b_2)\alpha] =$$

$$= [(a_1+(a_2-a_1)\alpha)(\ b_1+(b_2-b_1)\alpha),\ (a_3-(a_3-a_2)\alpha)(\ b_3-(b_3-b_2)\alpha)] =$$

$$= [a_1b_1+(a_1(b_2-b_1)+b_1(a_2-a_1))\alpha+(a_2-a_1)(b_2-b_1)\alpha^2\ ,\ a_3b_3-(a_3(b_3-b_2)+b_3(a_3-a_2))\alpha+(a_3-a_2)(b_3-b_2)\alpha^2]$$

La aproximación propuesta(5) es un número difuso triangular P, definido de la siguiente forma:

$$P = (a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3)$$

Los α-cortes de P vendrían dados por:

$$\mathbf{P}_\alpha = [a_1b_1 + (a_2b_2-a_1b_1)\alpha,\ a_3b_3 - (a_3b_3-a_2b_2)\alpha]$$

4. ANÁLISIS MULTICRITERIO DIFUSO. APLICACIÓN AL P.M.A. DE ANDALUCÍA

Desde que a comienzos de los años sesenta comenzó a desarrollarse la programación por objetivos y los métodos multiatributo, el campo de la ayuda a la toma de decisiones con criterios múltiples se ha convertido en uno de los más activos e interdisciplinares en el ámbito de la gestión económica y empresarial y en el de la investigación operativa. Una puesta al día del tema, incluidos algunos comentarios sobre las metodologías multicriterio difusas, puede verse en Korhonen, Moskowitz y Wallenius (1992) y un trabajo de síntesis clásico es, sin duda, el de Vincke (1988). En Seo y Sakawa (1988) se hace, también, una amplia exposición de los temas básicos, incluido el enfoque difuso, poniendo especial énfasis en su aplicación a la planificación regional. En el campo del análisis multicriterio difuso, a partir del trabajo pionero de Bellman y Zadeh (1970), se sucedieron otros como los de Zadeh (1973), Roy (1977), Baas y Kwakernaaak (1977), Yager (1978), Takeda (1982), Siskos et al. (1984) o Zimmermann (1987). Una buena síntesis crítica, estableciendo limitaciones y posibilidades de estos enfoques, puede encontrarse en Kickert (1978). De interés son, también, el volumen editado por Zimmermannn, Zadeh y

(5) Los autores proponen una evaluación de la discrepancia (producida, generalmente, por la forma no lineal de la función de pertenencia del número resultante). Mediante diversos ejemplos, se muestra que tal aproximación es aceptable y compensa el ahorro de cálculo que se obtiene.

Gaines (1984), con un artículo introductorio de los propios editores sobre las perspectivas de la unión metodológica entre conjuntos difusos y análisis de decisión, y la obra de Chen y Hwang (1992), junto con algunos trabajos que intentan extender al caso difuso métodos rígidos tan conocidos como el ELECTRE o PROMETHEE(6). A título de ejemplo, véase Takeda (1982), Zimmermann (1987), ya citados, Singh, Rao y Alam (1989), Furuta (1993) o Munda, Nijkamp y Rietveld (1995).

Pero, en resumidas cuentas, los problemas básicos que se plantean, desde el punto de vista metodológico, son de dos tipos:

– Los criterios para la comparación y la agregación de alternativas.

– Los métodos de ordenación, en los que va normalmente implícita la definición de algún concepto de distancia entre las alternativas.

No es el propósito de este trabajo entrar en una valoración teórica de las diferentes propuestas que se han formulado para afrontar estos asuntos -algunos comentarios y críticas pueden verse en Kickert (1978), pp. 60-77) o Tong y Bonissone (1984)-. El objetivo que aquí se plantea es confrontar la solución que presentamos con los resultados obtenidos utilizando algunos de dichos métodos(7). Para ello, se evaluarán las actuaciones programadas en el Plan de Medio Ambiente de Andalucía, tomando como criterios de decisión los objetivos fijados en el mismo.

Todas las aplicaciones realizadas parten de una base común: tanto la valoración de las alternativas como la fijación, en su caso, de ponderaciones para los criterios, se hace por medio de *adjetivos* o *expresiones lingüísticas*. Un grupo de técnicos de la Consejería de Medio Ambiente hicieron las valoraciones correspondientes a la tabla de evaluación, tanto para el impacto de cada alternativa (programas) sobre los criterios (objetivos) como para las ponderaciones de los mismos. Las variables implicadas han sido llamadas, respectivamente, **valoraciones** y **ponderaciones**. Los adjetivos propuestos para cada una de dichas variables son los reflejados en la Tabla 1.

---

(6) Son métodos ya clásicos del análisis multicriterio, que pueden verse en Roy (1985) y Mareschal (1989).

(7) Como se comprenderá, ni se pretende ni sería posible ser exhaustivo en este sentido.

Tabla 1

VARIABLES LINGÜÍSTICAS

Valoraciones	*Ponderaciones*
Muy Negativa (MN)	Muy Baja (MB)
Negativa (N)	Baja (B)
Algo negativa (AN)	Media (M)
Indiferente (I)	Alta (A)
Algo Positiva (AP)	Muy alta (MA)
Positiva (P)	
Muy Positiva (MP)	

Como puede observarse, la variable *valoraciones* puede tomar siete expresiones distintas, que, en un entorno tan probablemente contradictorio como las actuaciones en materia de medio ambiente, van desde la evaluación de una alternativa como muy negativa para algún posible criterio, hasta la muy positiva. La variable *ponderaciones* puede tomar cinco expresiones distintas, en función de la importancia dada por los decisores a cada uno de los criterios u objetivos del plan.

Cada uno de los adjetivos de ambas variables constituye un conjunto difuso, cuya representación gráfica viene recogida en las Figuras 5 y 6. Como se dijo anteriormente, se ha optado por funciones de pertenencia triangulares, todas ellas con conjuntos soporte dentro de un intervalo unitario.

Figura 5

ADJETIVOS PARA LA VARIABLE *VALORACIONES*

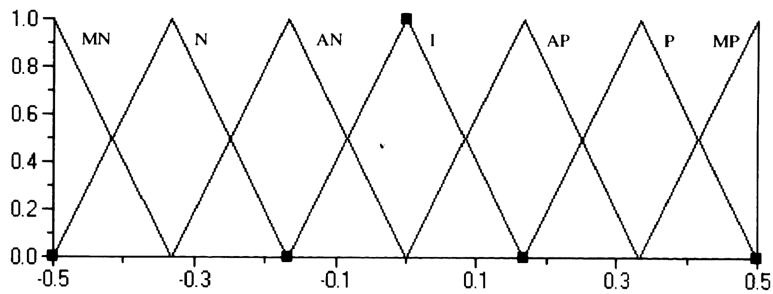
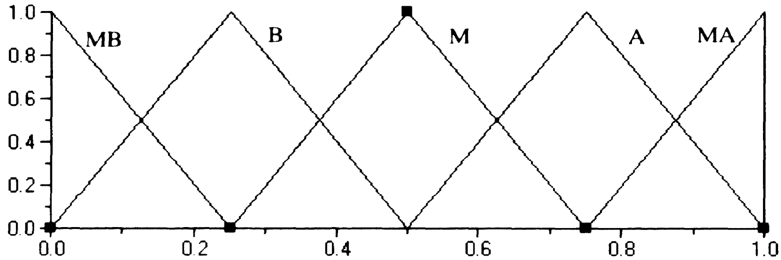


Figura 6

ADJETIVOS PARA LA VARIABLE *PONDERACIONES*



Los programas de actuación y los objetivos generales propuestos en el Plan de Medio Ambiente de Andalucía son los recogidos en la Tabla 2(8).

Tabla 2

PLAN DE MEDIO AMBIENTE DE ANDALUCÍA

Programas		*Objetivos*	
Núm.	*Título*	*Núm.*	*Título*
1	Calidad de aire	1	Mejora ambiental del medio urbano
2	Prevención y reducción de ruido	2	Conservación del medio natural
3	Residuos	3	Mejorar la calidad ambiental del litoral
4	Mejora del entorno ambiental	4	Conseguir un modelo hidrológico sostenible
5	Conservación de hábitats	5	Fomento actividades económicas relacionadas con el medio ambiente
6	Conservación de flora y fauna		
7	Lucha contra la erosión y desertificación		
8	Prevención y extinción de incendios forestales		
9	Defensa de la vegetación contra plagas y enfermedades		
10	Gestión de espacios naturales protegdos		
11	Gestión de recursos naturales		

(8) Agradecemos su colaboración a los técnicos de la Consejería de Medio Ambiente por proporcionar las valoraciones de las alternativas y las ponderaciones de los objetivos.

Programas		Objetivos	
Núm.	*Título*	*Núm.*	*Título*
12	Uso público		
13	Vías pecuarias		
14	Calidad de aguas litorales		
15	Uso sostenible de recursos hídricos		
16	Calidad de aguas continentales		
17	Energía y medio ambiente		
18	Desarrollo integral del medio natural		
19	Economía y medio ambiente		
20	Participación		
21	I + D		
22	Formación y cualificación de recursos		
23	Educación ambiental y comunicación		
24	Cooperación internacional		

Los adjetivos para cada una de las variables lingüísticas que se han definido anteriormente son números difusos. Estos números difusos se introducirán en una matriz de impacto (V), cuyo elemento Vij es un número difuso que valora la contribución del programa i a la consecución del objetivo j. La matriz de impacto para n programas y k objetivos puede representarse como sigue:

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & \cdots & V_{1j} & \cdots & V_{1k} \\ \vdots & \ddots & & \iddots & \vdots \\ V_{i1} & & V_{ij} & & V_{ik} \\ \vdots & \iddots & & \ddots & \vdots \\ V_{n1} & \cdots & V_{nj} & \cdots & V_{nk} \end{bmatrix}$$

De la misma forma, la ponderación del objetivo j será un conjunto difuso que represente un adjetivo para la variable lingüística *ponderaciones*. El vector de ponderaciones será:

$$W = [W_1\ W_2 \ldots W_j \ldots W_k]$$

Presentamos a continuación varias aproximaciones utilizadas para la resolución del problema.

4.1. Suma simple ponderada

El primer método consiste en la suma simple ponderada con el fin de llegar a las utilidades difusas (puntuaciones difusas finales) de los diferentes programas. Este es un método clásico y frecuentemente utilizado, que agrega las alternativas para cada uno de los objetivos de una forma muy sencilla:

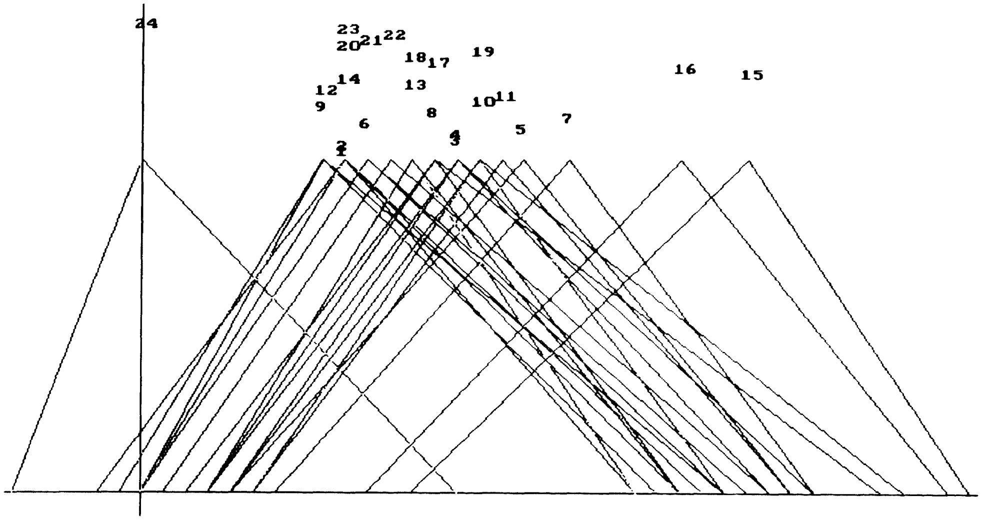
$$V_i = \sum_{j=1}^{k} W_j \cdot V_{ij}$$

Algunas aplicaciones, en términos difusos, de este método fueron llevadas a cabo por Baas y Kwakernaak (1977) y Yager (1978). Nosotros aplicaremos este método de forma diferente, usando la aritmética difusa y considerando que tanto la valoración de alternativas como la ponderación de los objetivos son números difusos. Además se utilizarán las aproximaciones triangulares de las funciones de pertenencia para las operaciones de aritmética difusa que no dan resultados triangulares (Kauffmann y Gupta (1988; pp. 55-67)). Véase, también, la aproximación de Bonissone, en Chen y Hwang (1992). Este vector de valoraciones se utilizará más adelante para la ordenación de alternativas.

La Figura 7 muestra las valoraciones difusas finales obtenidas para cada programa, mediante la agregación propuesta. Si se observa dicha figura, el resultado intuitivo es considerar los números difusos más a la derecha como los mejores o preferidos; es decir, como los que encabezarían la jerarquía de programas.

Figura 7

PUNTUACIONES DIFUSAS CON MÉTODO DE LA SUMA SIMPLE PONDERADA



A estos resultados, les hemos aplicado tres métodos de ordenación(9) diferentes para determinar matemáticamente la selección (ordenación) de alternativas:

a) Método del Semiorden Difuso:

Para la ordenación de alternativas se utiliza el concepto de semiorden difuso. El semiorden entre dos números difusos A y B se define como sigue:

$$A \overset{\sim}{<} B \Leftrightarrow B = \max(A, B) \text{ y } A = \min(A, B)$$

Donde *max* y *min* son, respectivamente, el máximo y el mínimo de dos números difusos, que se definen utilizando el principio de extensión. Suponiendo que *G=max(A, B)* y *G'=min(A, B)*, las funciones de pertenencia correspondientes se obtienen de la siguiente manera:

(9) Evidentemente, no son los únicos posibles. En nuestro caso, hemos combinado uno bastante exigente con el respeto a la esencia de lo difuso, a) , con otro que tiende más a una solución concreta, rígida, de la jerarquía, b). El método c) servirá de soporte al que proponemos.

$$m_G(z) = \sup_{z = \max(x,y)} \min\{m_A(x), m_B(y)\}$$

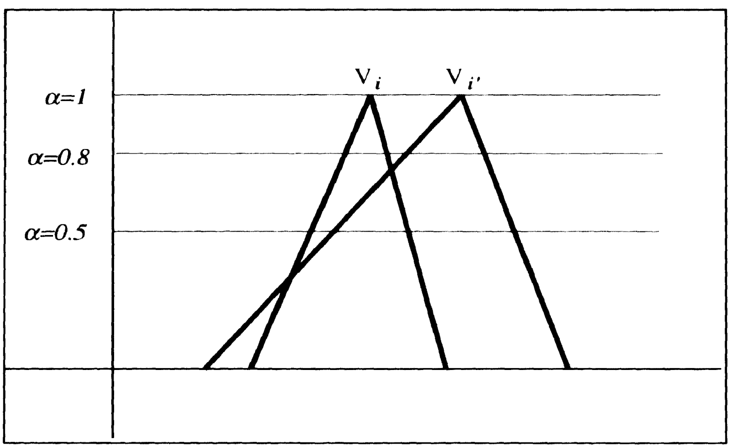
$$m_G(z) = \sup_{z = \min(x,y)} \min\{m_A(x), m_B(y)\}$$

Si la relación de semiorden $V_i \tilde{<} V_{i'}$ se satisface para un par V_i y $V_{i'}$, se puede decir que la alternativa i' es mejor que la alternativa i. Puede comprobarse que, para el caso particular de números difusos triangulares, aplicando el criterio anterior, tal relación se satisface siempre que $a_i \leq b_i$ y exista, al menos, un $a_i < b_i$, siendo a_i y b_i los elementos de la terna que define los números difusos $A=(a_1,a_2,a_3)$ y $B=(b_1,b_2,b_3)$, respectivamente.

Con este método, la mayoría de las alternativas de nuestra aplicación no podrían ser ordenadas con seguridad. Por esta razón, en ocasiones, puede ser de interés fijar un nivel de incertidumbre aceptable, bajo el que sea posible jerarquizar el conjunto de programas inicialmente no ordenados. Aplicando a los α-cortes la condición expresada anteriormente para números difusos triangulares, sustentado en tres valores de $\mathbf{A}_{\alpha=0}$, es posible obtener una ordenación más fina. En la Figura 8 puede verse cómo con la utilización de diferentes α-cortes pueden ordenarse números difusos. En principio, para α=0 no se podrían ordenar. Sin embargo, para α=0,5 (con solapamiento de los respectivos soportes) o α=0,8 (sin solapamiento), sí quedan ordenados, según este criterio de semiorden difuso.

Figura 8

SEMIORDEN DIFUSO CON DISTINTOS α-CORTES ($V_i \tilde{<} V_{i'}$)



Una vez que se ha fijado un α-corte, podemos construir una matriz *booleana*, de elementos 0 y 1, que muestre las relaciones de dominancia entre alternativas, de acuerdo con el concepto de semiorden difuso. Un grafo difuso mostrará las relaciones de dominación para ese nivel de posibilidad *(α)*. Obviamente, cuando crezcan los valores de los α-cortes el orden de preferencia entre las alternativas se volverá más exhaustivo y más rígido, también, adoleciendo, por el contrario, de un mayor grado de incertidumbre.

La aplicación de este método al Plan de Medio Ambiente de Andalucía proporciona los resultados de la Tabla 3.

Tabla 3

JERARQUÍA RESULTANTE CON DIFERENTES α-CORTES CON EL MÉTODO DE SEMIORDEN DIFUSO

Número de Programa	*Ordenación con α=0*	*Ordenación con α=0.5*	*Ordenación con α=0.8*
1	15	15	15
2	16	16	16
3		7	7
4			5
5	R	R	
6	E	E	10, 11, 19
7	S	S	
8	T	T	
9	O	O	3, 4, 8, 17
10			
11	D	D	
12	E	E	
13			13, 18, 22
14	P	P	
15	R	R	6, 21
16	O	O	
17	G	G	
18	R	R	
19	A	A	1, 2, 14, 20, 23
20	M	M	
21	A	A	
22	S	S	9, 12
23			
24	24	24	24

b) Ordenación Lineal de Números Difusos:

Vamos a seguir el método que Kaufmann y Gupta (1988) propusieron para una ordenación lineal de números difusos, que consiste en la aplicación sucesiva de tres criterios, de tal forma que si el primero de ellos no da como resultado una única ordenación, se aplicará el segundo para aquellas alternativas que no hayan quedado ordenadas, y si este no da tampoco una ordenación total de las alternativas, se aplicaría el tercero. Estos criterios son: el desplazamiento (*removal*), la moda o valor central y la divergencia o amplitud.

Si $k \in R$ es un número ordinario y A un número difuso de tipo L-R, con soporte finito, el desplazamiento de A con respecto a k se define como sigue:

$$R(A,k)=\int_{k}^{M} dx+\frac{1}{2}\left\{\int_{M}^{max_A} R(x)dx-\int_{min_A}^{M} L(x)dx\right\}$$

donde min_A y max_A son, respectivamente, el valor inferior y superior del soporte de *A*.

Como puede comprobarse, el valor del desplazamiento es el promedio de las dos áreas delimitadas por *k* y las funciones que definen la forma del número a izquierda y derecha, respectivamente. Su valor para números triangulares difusos es mucho más fácil de obtener (Véase Kauffman y Gupta (1985; pp. 37-44). Por ejemplo, tomando como origen k=0, sería: $R(A,k=0)=(a_1+2a_2+a_3) / 4$. El valor de esta expresión puede ser positivo, negativo o nulo. Si se elige *k* convenientemente, se puede conseguir que todos los números tengan un desplazamiento positivo, que puede ser tomado como una medida de distancia con la que es posible ordenarlos. En nuestro caso, hemos tomado el valor mínimo de los soportes de todos los números difusos.

El segundo criterio a aplicar, entre las clases de igual desplazamiento, es la Moda (M) y, finalmente, si quedara alguna clase de alternativas sin ordenar, se acude al criterio de la divergencia: $\{max_A - min_A\}$.

La aplicación de este método de ordenación produce los resultados recogidos en la Tabla 4.

Tabla 4

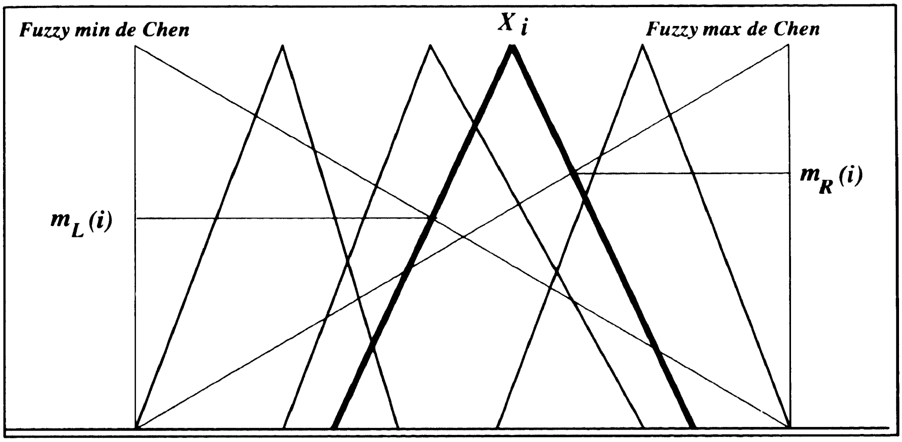
JERARQUÍA RESULTANTE CON EL MÉTODO DE ORDENACIÓN LINEAL DIFUSA

Número	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*
Ordenación	15	16	7	19	5	11	4	10	17	3	8	18	22	13	21	6	23	20	14	12	1	2	9	24

c) Aproximación de Chen: ordenación usando las puntuaciones a izquierda y derecha:

Dados los números difusos triangulares $X_1,..., X_i ,..., X_n$, las puntuaciones a izquierda y derecha se definen como las intersecciones de cada número difuso X_i con el mínimo y el máximo difuso de todos ellos, respectivamente (Véase Chen y Hwang (1992)). La Figura 9 ilustra los conceptos mencionados.

Figura 9
PUNTUACIONES A IZQUIERDA Y DERECHA CON EL MÉTODO DE CHEN



Las intersecciones, $m_R(i)$ y $m_L(i)$, son las puntuaciones a derecha e izquierda, respectivamente. Consideradas conjuntamente, garantizan la utilización completa de la información contenida en X_i. Dado que valores más altos de $m_R(i)$ indican números difusos mayores, y valores más altos de $m_L(i)$ indican números difusos inferiores, o menos preferidos, la puntuación total de X_i puede definirse como sigue:

$$m_M(i) = (m_R(i) + 1 - m_L(i)) / 2 \quad , \text{con } 0 \leq m_M(i) \leq 1$$

El valor más alto de $m_M(i)$ determina el número difuso preferido X_i. Los resultados alcanzados son los de la Tabla 5.

Tabla 5

RESULTADOS UTILIZANDO EL MÉTODO DE CHEN

Número	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*
Ordenación	15	16	7	5	19	11	10	4	17	3	8	18	22	13	21	6	23	20	14	12	1	2	9	24

4.2. Análisis de concordancia y discordancia

Método basado en los conceptos de concordancia y discordancia, que son bien conocidos en el análisis multicriterio, realizado por comparación, dos a dos, de todas las alternativas. Hemos utilizado estos conceptos incorporando valoraciones difusas y la aritmética difusa para obtener los respectivos índices de concordancia y discordancia difusos (aproximaciones triangulares), así como las correspondientes matrices. Posteriormente, aplicando la ordenación de Chen al conjunto de los elementos (números triangulares) de las matrices resultantes, se sustituye cada número difuso triangular, X_i, por el valor $m_M(i)$ que le corresponde. Se obtienen, así, unos índices de concordancia y de discordancia comparativos (con relación al máximo y mínimo borrosos de Chen), que son números reales, comprendidos entre 0 y 1. Cuanto más próximo a cero esté el elemento ii' de la matriz de concordancias, menor será el grado de credibilidad de la preferencia de i respecto a i'. Por el contrario, cuanto más próximo a 1 se encuentre dicho elemento, mayor será la credibilidad con que la alternativa i es preferida a la i'. Por tanto, se puede interpretar que los elementos de esta matriz de concordancia representan valores de una función de pertenencia establecida sobre una relación de ordenación (difusa) entre alternativas(10). A esta matriz, y por extensión al método empleado, la hemos llamado de *Concordancia Comparativa Difusa*. Veamos, a continuación, como se aplica este método.

La *concordancia difusa* refleja la preferencia de la actuación i con respecto a la i'. Se define como la suma del número de criterios para los que la alternativa i es preferida a la i´. Si se otorga diferente peso o importancia, W_j, a dichos criterios de evaluación de alternativas, su expresión formal sería la siguiente (11):

$$c_{ii'} = \sum_{j \in c_{ii'}} W_j, \quad \text{para} \quad C_{ii'}\left\{ j \middle| V_{ij} \geq V_{i'j} \right\}$$

(10) Véase, entre otros, Roy (1977), Takeda (1982) y Zadeh (1973).

(11) Si los criterios de comparación entre alternativas no tuviesen distinta importancia o peso, el índice $c_{ii'}$ sería igual al número de criterios para los que el programa i es preferido al i´.

El conjunto, $C_{ii'}$, contiene la información de todos aquellos criterios, j, que apoyan la afirmación de que el programa i es preferido al i´. Obsérvese que la preferencia del programa i respecto al i´, incluye el signo de igualdad, por lo que $C_{ii'}$ define tanto una preferencia estricta como la indiferencia de elección entre uno y otro programa. Para determinar el conjunto de concordancias, se ha utilizado el método, ya expuesto, del semiorden, debido a su sencillez de cálculo. Generalmente, los conjunto difusos propuestos a los expertos para elegir entre las valoraciones posibles, vendrán ordenados de antemano (véanse las Figuras 5 y 6). La ordenación en este caso resulta, pues, trivial. De cualquier forma, este método permitiría la extracción de las clases $C_{ii'}$, incluso aunque las valoraciones vinieran expresadas en forma más compleja.

Para el cálculo de la concordancia difusa del programa i con el programa i´, $c_{ii'}$, se sumarán las ponderaciones (números triangulares) de los criterios de valoración que se encuentren en este conjunto de concordancias.

Puede calcularse una *matriz de concordancia difusa*, C, que incluya todos los valores obtenidos para los índices $c_{ii'}$. Los elementos diagonales de esta matriz serán, lógicamente, nulos. Los no diagonales contendrán números difusos triangulares, correspondientes a los índices de concordancia. Será una matriz cuadrada de orden igual al número de programas considerados, n. Dicha matriz tendrá la siguiente forma:

$$C = \left[c_{ii'}\right] = \begin{bmatrix} - & c_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & - & \ddots & & & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & - & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & - & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & - & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & - \end{bmatrix}$$

El concepto de discordancia, complementario al anterior, establece límites a la selección de la alternativa i frente a la i' , exigiendo que no haya criterio alguno por el que la alternativa i' sea preferida a la i con una diferencia importante. En este sentido, el índice de discordancia, $d_{ii'}$, da el nivel máximo de discrepancia (ponderado según criterios) para las valoraciones en que la actuación i´ es preferida a la i. El *índice de discordancia difusa* se define mediante la expresión:

$$d_{ii'} = \max_{j \in D_{ii'}} \left\{ W_j \cdot \left(V_{i'j} - V_{ij} \right) \right\}, \quad \text{con} \quad D_{ii'} = \left\{ j \middle| V_{ij} < V_{i'j} \right\}$$

Para su cálculo, previamente se define el conjunto de discordancias, $D_{ii'}$, complementario del conjunto de concordancias. Este conjunto contiene la información de todos aquellos criterios que apoyan la afirmación de que el programa i´ es preferido al programa i. Así, el conjunto de discordancias contendrá más elementos cuanto mayor sea el número de criterios en el que el programa i´ domina al i. Para determinar el conjunto de discordancias, se ha utilizado, también, el método del semiorden difuso. El objetivo que se persigue es determinar en qué criterios la alternativa i es preferida a la i'. Sin embargo, para obtener la distancia o discrepancia máxima (ponderada) con la que se produce tal preferencia entre esta pareja de alternativas, $d_{ii'}$, se ha utilizado el método del orden lineal difuso, por llegar a resultados siempre concluyentes en la ordenación de los números difusos resultantes del cálculo de la distancia difusa y su producto por la ponderación difusa correspondiente.

Los valores de los índices de discordancia pueden disponerse en forma matricial, tal como se hizo con los de concordancia, resultando la llamada *Matriz de Discordancia Difusa*, también con elementos diagonales nulos y de orden n. Tal matriz, quedará definida como sigue:

$$D = [d_{ii'}] = \begin{bmatrix} - & d_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & - & \ddots & & & d_{2n} \\ \vdots & \ddots & - & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & - & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & - & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & - \end{bmatrix}$$

Las relaciones de concordancia y de discordancia de cada programa i con el resto de programas, deben ser tenidas en cuenta, en forma conjunta, para definir las relaciones de preferencia de unos programas sobre otros, según las valoraciones iniciales aportadas por el grupo de expertos. Para ello, hemos seguido los siguientes pasos:

En primer lugar, hemos convertido estas matrices, cuyos elementos son números triangulares difusos, en dos nuevas matrices en las que cada uno de sus elementos es el valor de las puntuaciones obtenidas aplicando la aproximación de Chen a la ordenación de los n.(n-1) elementos de la correspondiente matriz. Tal ordenación refleja, por tanto, la posición comparativa, normalizada, de los índices de concordancia y de discrepancia entre alternativas. Los elementos de estas nuevas matrices, $c_{cii'}$ y $d_{cii'}$, se podrían llamar *índices de concordancia comparativa difusa e índices de discordancia comparativa difusa*, respectivamente, y presentan valores comprendidos entre cero y uno. Las matrices correspondientes, por tanto, serán designadas como *Matriz de Concordancia Comparativa Difusa y Matriz de Discordancia Comparativa Difusa*, respectivamente. La matriz de Concordancia Comparativa Difusa será:

$$C_c = [c_{cii'}] = \begin{bmatrix} - & c_{c12} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{c1n} \\ c_{c21} & - & \ddots & & & c_{c2n} \\ \vdots & \ddots & - & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & - & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & - & \vdots \\ c_{cn1} & c_{cn2} & \cdots & \cdots & \cdots & - \end{bmatrix}$$

siendo $c_{cii'} = (m_R(c_{ii'}) + 1 - m_L(c_{ii'})) / 2$; $0 \leq c_{cii'} \leq 1$.

Análogamente, la matriz de Discordancia Comparativa Difusa se define de la siguiente forma:

$$D_c = [d_{cii'}] = \begin{bmatrix} - & d_{c12} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{c1n} \\ d_{c21} & - & \ddots & & & d_{c2n} \\ \vdots & \ddots & - & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & - & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & - & \vdots \\ d_{cn1} & d_{cn2} & \cdots & \cdots & \cdots & - \end{bmatrix}$$

donde $d_{cii'} = (m_R(d_{ii'}) + 1 - m_L(d_{ii'})) / 2$; $0 \leq d_{cii'} \leq 1$.

Es evidente que, cuanto más próximo a uno sea el índice de concordancia comparativa difusa $c_{cii'}$, mayor será el grado en que, para el conjunto de criterios, la alternativa i domina sobre la i´. El índice de discordancia comparativa difusa, $d_{cii'}$, complementará la información dada por el de concordancia, añadiéndole información sobre el máximo grado de divergencia existente entre los programas i e i´, indicando el grado máximo en que el programa i´es preferido al i, en algún criterio dado.

La preferencia de un programa i sobre otro i´ ($m_{ii'}$) va a venir dada por el valor de la concordancia comparativa difusa ($c_{cii'}$) entre ambos, siempre que la discordancia comparativa difusa ($d_{cii'}$) esté por debajo de un umbral establecido (d_v) o umbral de veto. Los índices de discordancia comparativa difusa de valor mayor a este umbral no permitirán decir que existe preferencia de un programa respecto a otro, por muy elevada que sea la concordancia. Dicho de otra forma, por muchos que sean los criterios para los que el programa i es preferido al i', si existe un criterio concreto para el que la discordancia es muy elevada, es decir, para el que i' es mejor que i, no podrá afirmarse que el programa i domina al i'.

Bajo estos criterios, se ha definido una *matriz de dominancia difusa,* que establece las relaciones difusas de preferencia entre alternativas, como sigue:

$$M = [m_{ii'}] = \begin{bmatrix} - & m_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & - & \ddots & & & m_{2n} \\ \vdots & \ddots & - & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & - & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & - & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & - \end{bmatrix}$$

$$\text{siendo} \quad m_{ii'} = \begin{cases} c_{cii'} & \text{si} \quad d_{cii'} < d_v \\ 0 & \text{si} \quad d_{cii'} \geq d_v \\ & 0 \leq m_{ii'} \leq 1 \end{cases}$$

El índice de dominancia, $m_{ii'}$ toma el valor del índice de concordancia comparativa difusa en el caso de que la discordancia comparativa difusa sea menor al valor de veto introducido para la misma, y cero en caso de que sea mayor que este(12). Los valores de la relación de dominancia, $m_{ii'}$, informan, por tanto, sobre el grado de credibilidad de la preferencia o dominación de la alternativa i sobre la i'.

A una matriz de este tipo, representativa de una relación de orden difusa, se le puede asociar un grafo difuso, en el que cada nodo o vértice representa un programa o alternativa y cada $m_{ii'} \neq 0$ es el valor asignado al arco que sale del nodo i y termina en el nodo i'. Cada uno de los $m_{ii'}$ elementos de M se puede interpretar como el grado de credibilidad de la relación de dominancia (preferencia) del programa i sobre el programa i'. Este grafo difuso puede ser analizado estableciendo las matrices de relación (Kaufmann (1975) y Zadeh (1971)) para distintos conjuntos de nivel o α-cortes; es decir, para distintos grados de credibilidad de la relación de dominancia. Tales matrices no son sino las matrices booleanas (de incidencia) asociadas a cada uno de los umbrales introducidos mediante los α-cortes. La opción más generalizada es la de utilizar como umbrales los valores medios, tanto para el índice de concordancia como para el de discordancia, aunque se pueden utilizar otras alternativas, como la mediana o, en general, un cuantil determinado, especialmente si la representatividad de la media se puede poner en cuestión o si

(12) Singh, D., Rao, J. R. y Alam, S. (1989), utilizaron $m_{ii'} = \min \{ c_{ii'}, (1 - d_{ii'}) \}$.

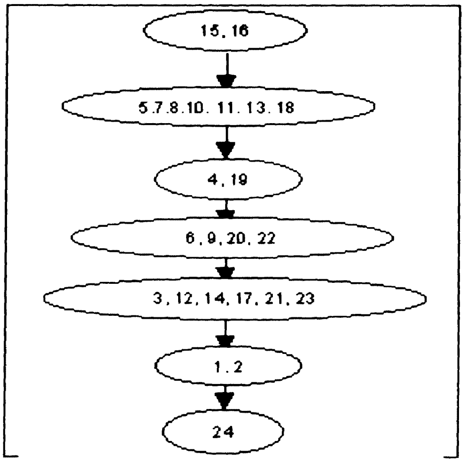
se desea precisar el número de arcos del grafo de las relaciones de dominancia a incluir en el análisis. Además, para cada matriz, es posible emplear algunos conceptos de la teoría de grafos que han mostrado su gran utilidad en el análisis de las características de una estructura de relaciones (Morillas (1982, 1983 y 1995)).

Con la aplicación de este método, dando, por ejemplo, los valores medios de los respectivos índices, tanto al umbral de veto, d_v , para la discordancia, como al umbral de credibilidad, c_t , para la concordancia, se obtiene la correspondiente matriz de relación, que es una matriz *booleana* en la que, si la alternativa *i* es preferida a la i' (con el nivel de credibilidad dado por el umbral), el correspondiente elemento, $m_{ii'}$, tomará valor 1 y, de no existir tal preferencia, tomará valor cero. Esta matriz será utilizada como la *matriz de incidencia* del grafo representativo de las relaciones de dominancia entre alternativas o programas. A partir de ella, se procede al análisis de las *componentes fuertemente conexas* (bloques de alternativas no comparables) y la obtención subsiguiente del *grafo reducido* (jerarquía estricta entre alternativas y bloques de alternativas).

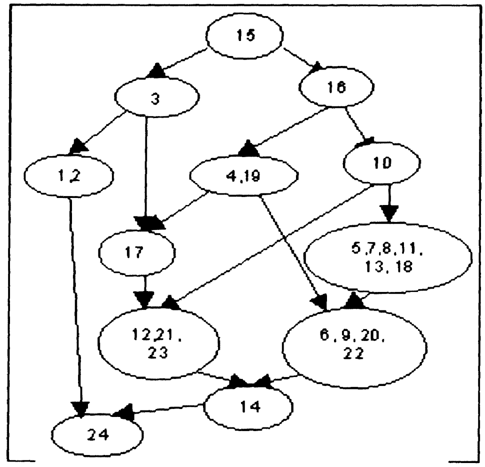
Los resultados obtenidos para la aplicación que venimos desarrollando son los recogidos en la Figura 10. Es posible repetir el análisis para distinto grado de credibilidad en la preferencia y/o distinto umbral de veto. Otra posibilidad, más clara y directa, sería estudiar nuevas relaciones de dominancia exclusivamente dentro de cada uno de los bloques, incrementando los niveles de los umbrales sólo para ellos y repitiendo el mismo procedimiento a la submatriz de relaciones correspondiente. En la figura citada anteriormente pueden contemplarse las ordenaciones obtenidas mediante la aplicación de cada una de estas posibilidades. En a) se observa una jerarquía por bloques, en la que ocupa el primer lugar el formado por los programas 15 y 16, que no pueden ser ordenados entre sí, para el nivel de credibilidad medio adoptado. En segundo lugar, un grupo formado por siete programas, sin que sea posible establecer una relación de preferencia entre ellos. En b), el incremento del grado de credibilidad de la relación de preferencia da lugar a la desaparición de parte de las relaciones del grafo inicial. La imagen puede inducir a confusión, por el desplazamiento hacia la parte superior del gráfico de programas como el 3 y el bloque formado por el 1 y el 2, que en el grafo inicial ocupaban lugares bajos de la jerarquía. En realidad lo único que ha ocurrido ha sido que, al subir el umbral para la concordancia, se han descompuesto los bloques que ocupaban el nivel 2 y el nivel 5 de la jerarquía, y se ha perdido, a la vez, la relación de preferencia del bloque del nivel cuatro (programas 6, 9, 20 y 22), sobre el del nivel 5, al que pertenecía el programa 3. Este programa, para este umbral, sólo puede ordenarse con relación al programa 15 (que le precede) y al bloque 1-2, al que domina en la ordenación.

Figura 10

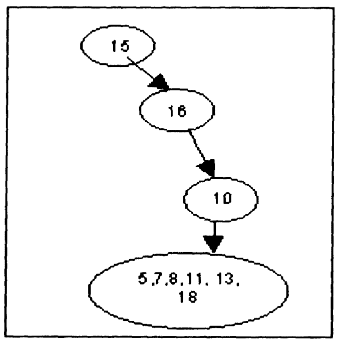
ORDENACIÓN MEDIANTE EL ANÁLISIS DE CONCORDANCIA COMPARATIVA DIFUSA



a) Grafo reducido con $d_r=0.43$ y $\alpha=0.467$



b) Grafo reducido con $d_r=0.43$ y $\alpha=0.5$

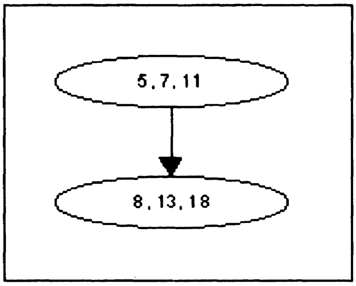


c) Descomposición de las componentes conexas (15,16) y (5, 7, 8, 10, 11, 13, 18) con $\alpha=0.5$

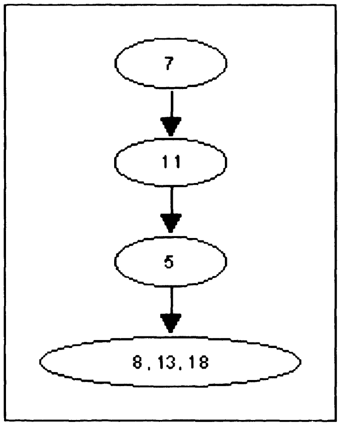
Así, pues, una mayor exigencia en el grado de credibilidad supone, lógicamente, una pérdida en las posibilidades de comparación y una subsiguiente modificación del grafo inicial, al menos en apariencia. Por esta razón, parece más aconsejable hacer un análisis por etapas, partiendo del grafo inicial y, manteniendo su jerarquía por bloques, realizando la subida del umbral sólo dentro de cada uno de ellos. El apartado c) de la figura, a modo de ejemplo, muestra la estructura de relaciones de preferencia en la relación entre los bloques del nivel 1 y 2 del grafo inicial. La selección otorgaría a los programas 15, 16 y 10, por este orden, los tres primeros lugares de la jerarquía. En los últimos lugares estarían el par de programas 1-2 y el 24. Finalmente, en la Figura 11, se ha continuado elevando el umbral, para mostrar el grado de incertidumbre al que sería necesario llegar para conseguir una ordenación en la componente fuertemente conexa más importante del grafo inicial.

Figura 11

ORDENACIÓN DE LOS PROGRAMAS DE LA COMPONENTE FUERTEMENTE CONEXA (5,7,8,11,13,18) CON MAYORES NIVELES DE α



Descomposición de la componente fuertemente conexa: (5, 7, 8, 11, 13, 18) con α=0.51



Descomposición de la componente fuertemente conexa: (5, 7, 11) con α=0.62

5. CONCLUSIONES

Basándonos en los resultados obtenidos y teniendo en cuenta la necesidad que muchas administraciones públicas tienen de apoyar sus tomas de decisiones con argumentos coherentes y, a ser posible, debidamente objetivados, creemos que el uso de técnicas multicriterio con valoraciones difusas puede ser una alternativa válida en ciertas ocasiones. Especialmente, en ausencia de información precisa, total o parcial.

Trabajar con números difusos triangulares permite la aplicación cómoda, desde el punto de vista de los cálculos, de la aritmética difusa, tanto en la etapa de valoración de alternativas como en la de ordenación de las mismas, por lo que su uso se hace recomendable, especialmente si no se tiene una buena razón para pensar en otra posibilidad acerca de la forma de las funciones de pertenencia. En especial, el método de aproximación a una ordenación lineal con los tres criterios sucesivos, propuesto por Kauffman y Gupta arroja buenos resultados, aunque puede que sea excesivamente rígido, lo que va en detrimento del propio concepto de imprecisión y vaguedad con el que está tratando. De hecho, el concepto de desplazamiento, en esta aplicación, ha sido suficiente para conseguir una jerarquización estricta aceptable de los programas.

La aproximación de Chen es también muy sencilla en su aplicación y arroja resultados muy similares al anterior. En cualquier caso, el método del semiorden difuso presenta más problemas a la hora de clasificar las alternativas porque supone una condición más fuerte a la hora de establecer el concepto de semiorden. Ciertamente, esta es la apuesta de la metodología difusa frente a la rigidez del enfoque clásico, pero hay que decir que, en la práctica, en nuestro ejemplo al menos, sólo es posible diferenciar los dos primeros programas y el último de la jerarquía. Bien es verdad, que, no obstante, podemos ir relajando las condiciones aplicando sucesivos α-cortes, haciendo nuestra decisión cada vez más concreta.

Los tres métodos de ordenación de alternativas comentados arrojan resultados similares excepto hacia la mitad de la ordenación, porque resulta muy difícil diferenciar entre alternativas que están muy próximas.

El método de la concordancia comparativa difusa que hemos propuesto en este trabajo, da resultados iguales para las dos primeras y la última alternativa, pero es ligeramente diferente en el resto de la ordenación. Esto es debido a que este método utiliza una forma de agregación muy distinta. La comparación de alternativas dos a dos, aunque mucho más compleja, utiliza más información y por tanto, presenta mayores posibilidades de alcanzar resultados más depurados. Además, conjuga un adecuado manejo e interpretación de la vaguedad y la imprecisión de la información inicial, con el potencial de análisis que da la teoría de grafos para el estudio no sólo del orden estricto entre alternativas, sino, también, para poner en evidencia sus relaciones en un sentido más amplio.

Por último, en relación al Plan de Medio Ambiente de Andalucía, hay que decir que, de acuerdo con las valoraciones y ponderaciones, en forma de expresiones lingüísticas, hechas por los técnicos de la Dirección General de Planificación de la Consejería de Medio Ambiente, el programa más importante para el Plan debiera ser el uso sostenible de recursos hídricos (Programa 15). Un resultado bastante en consonancia con la situación real y necesidades, ya no sólo ambientales, sino, también, socioeconómicas de la Comunidad Autónoma Andaluza.

REFERENCIAS

BAAS, S. M.; KWAKERNAAK, H. (1977): «Rating and Raking of Multiple-Aspects Alternatives Using Fuzzy Sets», *Automatica*, *13*, 47-58.

BELLMANN, R.E.; ZADEH, L.A.(1970): «Decision Making in a Fuzzy Environment», *Management Science*, 17B, 141-164.

BANDEMER, H. Y NÄTHER, W. (1992): «Fuzzy Data Analysis». *Dordredht: Kluwer Academic Press.*

CHEN, SH.-J.; HWANG, CH.-L.(1992): «Fuzzy Multiple Attribute Decision Making». Berlin: *Springer-Verlag.*

DUBOIS, D.; PRADE, H.(1979): «Fuzzy Real Algebra: Some Results», *Fuzzy Sets and Systems*, 2, 327-348.

FURUTA, H.(1993): «Comprehensive Analysis for Structural Damage Based upon Fuzzy Sets Theory», *Journal of Intelligent &Fuzzy Systems*, 1, 55-61.

GIL, M.A. (1993): «Análisis y tratamiento de elementos difusos en experimentos aleatorios». *Estadística Española, Vol. 35, No. 134, 477-525.*

KAUFFMANN, A. (1975): «Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets. Vol. I». *Academic Press.*

KAUFFMANN, A.; GUPTA,M.M.(1985): «Introduction to Fuzzy Arithmetic. Theory and Applications». New York: *Van Nostrand Reinhold Company.*

KAUFFMANN, A.; GUPTA,M.M.(1988): «Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science». *Amsterdam: North Holland*

KICKERT, W.J.M.(1978): Fuzzy Theories on Decision Making. *A Critical review. Leiden: Martinus Nijhoff.*

KORHONEN, H,; MOSKOWITZ, H; WALLENIUS, J. (1992): Multiple Criteria Decision Support. A Review, *European Journal of Operational Research*, 63, 361-375.

MARESCHAL, B. (1989): «Aide À La Décision Multicritère: Développements Théoriques Et Applications», *C.C.E.R.O., 31*, pp. 13-120.

MORILLAS, A. (1982): «Análisis estructural de modelos económicos. Aportaciones de la teoría de grafos» *Estadística Española*. Jul.-Sep. 1982.

MORILLAS, A. (1983): «La teoría de grafos en el análisis input-output». *Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Málaga.*

MORILLAS, A. (1995): «Aplicación de la teoría de grafos al estudio de los cambios en las relaciones intersectoriales de la economía andaluza en la década de los 80», en *Contabilidad Nacional y Tablas Input-Output de Andalucía 1990. Análisis de resultados*. Vol. 1; 90-141. Instituto de Estadística de Andalucía.

MUNDA, G.; NIJKAMP, P.; RIETVELD, P.(1995): «The Economics of Project Appraisal and the Environment», 161-183.

ROY, B. (1977): «Partial Preference Analysis and Decision-Aid: The fuzzy Outranking Relation Concept», *Conflicting Objectives in Decissions* , Ed Bell, D.E., Keeney, R.L., Raiffa, H., 40-75, , New York: Wiley.

ROY, B. (1985): «Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision». *Économica*.

SEO, F.; SAKAWA, M. (1988): «Multiple Criteria Decision Analysis in Regional Planning». *Dordredht: D. Reidel Publishing Company.*

SING, D.; RAO, J.R.; ALAM, S.S.(1989): «Partial Preferences Structure with Fuzzy Relations for MCDM Problems», *International Journal of Systems Science.*, *20*, 2387-2394.

SISKOS, J.L.; LOCHARD, J.; LOMBARD, J. (1984): «A Multicriteria Decision making Methodology Under fuzziness: Aplication to the Evaluation of Radiological Protection in Nuclear Power Plants», *TIMS/ studies in the Management Sciences* , Ed. Zimmermann, H. J., 261-283, North Holland: Elsevier Science Publishers.

TAKEDA, E. (1982): «Interactive Identification of Fuzzy Outranking Relations in a Multicriteria Decision Problem», in M.M. Gupta y E. Sanchez (eds.): *Fuzzy Information and Decision Processes.*

TONG, R.M.; BONISSONE, P.P.(1984): «Linguistics Solutions to Fuzzy Decison Problems», *Fuzzy Sets and Decision Anlysis*, Ed Zimmermann, H.J.; Zadeh, L.A.; Gaines, B.R, 323-334. Amsterdam: North Holland

VINCKE, PH.(1988): «L'Aide Multicritère à la Décision». Bruxelles: *Édit. de l'Université de Bruxelles.*

YAGER, R.R.(1978): «Fuzzy Decision Making Including Unequal Objective», *Fuzzy Sets and Systems*, 1, 87-95.

ZADEH, L.A.(1965): «Fuzzy Sets», *Information and Control*, 8, 338-353.

ZADEH, L.A.(1971): «Similarity Relations and Fuzzy Ordering». *Information Sciences*, 3, 177-200.

ZADEH, L.A.(1973): «Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes», *IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics*, 2, 28-44.

ZIMMERMANN, H.J.; ZADEH, L.A.; GAINES, B.R.(1984), eds.: «Fuzzy Sets and Decision Anlysis». Amsterdam: *North Holland.*

ZIMMERMANN, H.J.(1987): «Fuzzy sets, decision making, and expert systems». Boston: *Kluwer A.P.* (Four printing, 1993).

ZIMMERMANN, H. J. (1990): «Decision Making In Ill-Structured Environments And With Multiple Criteria». *Readings in Multiple Criteria Decision Aid.* Springer-Verlag.

ZIMMERMANN, H.J.(1991): «Fuzzy sets and its applications». Boston: *Kluwer A.P.*

FUZZY COMPARATIVE CONCORDANCE ANALYSIS. PROPOSAL AND EVALUATION BY A CASE STUDY.

SUMMARY

In this paper it is proposed a fuzzy multiple attribute analysis, that we have called *comparative concordance*, as a help instrument to the decision-making process in an environment of lack of precise information as it generally is the decision-making in regional and environmental planning. Through an application to the selection of proceeding programs of the Environmental Plan of Andalusia, 1995-2000, it will be compared to other methods.

Key Words: fuzzy numbers, fuzzy multiple attribute analysis, Environment, regional plans.

AMS Classification: 04A72, 90A30.