

# **Análisis empírico del ciclo económico con un modelo factorial dinámico con cambio de régimen**

por

JOSÉ RAMÓN CANCELO(1)

Departamento de Economía Aplicada II  
Universidad da Coruña

## **RESUMEN**

En este trabajo sostenemos que el análisis empírico del ciclo económico se debe apoyar en un modelo factorial dinámico con cambio de régimen, en la línea de Diebold y Rudebusch. Entre las ventajas de este enfoque respecto a otras alternativas podemos destacar: integra en un marco coherente la construcción de indicadores sintéticos medidos en escala continua y la determinación y fechado de las fases cíclicas; plantea el problema en un contexto multivariante, haciendo uso de toda la información existente en el sistema; y capta la no linealidad en las variables observables inducida por comportamientos asimétricos a lo largo del ciclo. La metodología se ilustra con una aplicación al ciclo económico europeo.

*Palabras clave:* ciclo económico, análisis factorial, cambio de régimen, asimetría cíclica, series temporales

*Clasificación AMS:* 62H25, 62M05, 62M10, 91B84

---

(1) El autor agradece los comentarios de dos evaluadores anónimos a una versión anterior.

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio del ciclo ha ocupado un lugar central en la Economía desde que ésta empezó a constituirse como ciencia con entidad propia en el siglo XVIII. Las sociedades desarrolladas han logrado situarse en una trayectoria de crecimiento sostenido a largo plazo, pero este crecimiento secular no se produce de manera uniforme sino que aparece combinado con fluctuaciones de tal magnitud que en muchas ocasiones dominan la evolución observada. Por lo tanto es natural que los economistas se hayan preguntado por el origen de estas fluctuaciones, y en qué medida es posible atenuarlas o incluso eliminarlas.

Desde el punto de vista del análisis empírico lo que hace al ciclo especial es que los expertos no se ponen de acuerdo en cómo medirlo, en parte porque la ciencia económica aún no ha conseguido definirlo de manera inequívoca, pero también porque por su propia naturaleza los procedimientos habitualmente empleados en la elaboración de estadísticas económicas no son aplicables aquí. Así el ciclo no se identifica con una magnitud concreta que se pueda medir registrando determinadas operaciones que realizan los agentes. Por el contrario, abarca a todos los ámbitos de la vida económica y se manifiesta en todas las variables del sistema, aunque la manera concreta en que cada una de ellas responde a su influencia sea particular y específica. Por otra parte el ciclo económico reúne un conjunto muy diverso de fluctuaciones, con duraciones diferentes, distintas amplitudes y posiblemente asimétricas, es decir, con comportamientos diferentes en las fases ascendente y descendente. Todo esto conduce a que cada episodio histórico tenga sus propias características particulares y dificulta la identificación de un patrón común de comportamiento.

En este trabajo sostenemos la tesis de que la manera más adecuada de medir la evolución cíclica de una economía es utilizar modelos factoriales dinámicos donde el factor cambia de régimen, siguiendo una propuesta original de Diebold y Rudebusch (1996). Por un lado, la estructura factorial supone plantear la estimación del ciclo en un contexto multivariante, recogiendo así toda la información relevante que pueda existir en el sistema. En segundo lugar, los desarrollos recientes en la literatura de reducción de la dimensión con datos de series temporales garantizan que el modelo tenga unos fundamentos sólidos desde el punto de vista estadístico. Tercero, los cambios de régimen en el factor permiten que tanto éste como las variables observables exhiban un comportamiento asimétrico a lo largo del ciclo, como sugiere la evidencia empírica para los principales indicadores de actividad. Y cuarto, estos modelos integran en un marco coherente los aspectos cuantitativo y cualitativo del ciclo económico, proporcionando simultáneamente un indicador cuantitativo del ciclo y la probabilidad de que éste se encuentre en un determinado estado en un momento concreto.

El artículo se organiza de la siguiente manera. En la sección dos hacemos una revisión de los distintos métodos que se emplean en la actualidad para el análisis empírico del ciclo, revisión que no pretende ser exhaustiva aunque sí situar el problema en su contexto y presentar una visión comparada de los principales desarrollos que se han producido en los últimos años. La sección tres desarrolla el modelo factorial dinámico con cambio de régimen; primero analizamos sus fundamentos teóricos y posteriormente discutimos la estimación de sus parámetros y de las variables no observables a partir del algoritmo descrito en Kim y Nelson (1999). En la sección cuatro presentamos una aplicación a la estimación del ciclo europeo para ilustrar los principales resultados que se obtienen con la metodología propuesta y su interpretación. Por último la sección cinco resume las principales conclusiones.

## 2. MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA MEDICIÓN DEL CICLO

En la literatura aplicada de los últimos años es posible encontrar una gran variedad de propuestas para el análisis empírico del ciclo económico, tan diversas que llegan a confundir al lector que no está muy familiarizado con el tema. Sin embargo resulta relativamente sencillo establecer una clasificación que agrupe los métodos más afines en función de si: (1) optan por un enfoque univariante o multivariante; y (2) permiten que el ciclo sea asimétrico o imponen que el comportamiento sea el mismo en las fases ascendente y descendente.

Así la llamada literatura de los hechos estilizados propone medir el ciclo descomponiendo la serie temporal de una variable suficientemente general, normalmente el PIB, en sus componentes no observables utilizando técnicas estadísticas de extracción de señales. Esta corriente adopta un enfoque univariante, al suponer que es posible reunir toda la información sobre el ciclo en una única macromagnitud de referencia. Por otra parte los filtros que se utilizan no están diseñados para tratar la posible presencia de comportamientos asimétricos a lo largo del ciclo, ni en los procedimientos que hacen explícitos los modelos de los componentes no observables (Harvey 1989, Kaiser y Maravall 2001), ni en los métodos empiricistas que aplican el filtro Hodrick-Prescott (Kydlan y Prescott, 1990) o filtros pasabanda (Baxter y King, 1999) de manera automática sin tener en cuenta las características del proceso generador de los datos de la variable observada.

Frente a este planteamiento univariante ya en la primera mitad del pasado siglo Burns y Mitchell sostenían que la principal característica del ciclo económico era su generalidad (Burns y Mitchell, 1946). Según estos autores para estimar la evolución del ciclo es necesario considerar un conjunto de variables suficientemente representativo de la economía y detectar un patrón sistemático de comportamiento en

las fluctuaciones conjuntas. El problema de la medición del ciclo se traslada así a un contexto multivariante, lo que dará lugar a una extensa literatura sobre la construcción de indicadores sintéticos de comovimiento y su integración en un Sistema de Indicadores Cíclicos, cuyos principales hitos pasamos a resumir.

Los primeros desarrollos empíricos se basaron en una metodología desarrollada en el *National Bureau of Economic Research* (NBER) que a grandes rasgos se articula en tres etapas: (1) análisis individual de un gran número de variables observables con especial atención al fechado de sus puntos de giro, es decir, al momento en que sus fluctuaciones cíclicas pasan de la fase ascendente a la descendente o viceversa; (2) selección de un subconjunto suficiente que resuma la información existente; (3) agregación de las variables de este subconjunto en un indicador sintético calculado como promedio de tasas de crecimiento estandarizadas. Este procedimiento para la construcción de indicadores cíclicos se ha venido usando desde los años sesenta en muy distintos ámbitos y países, bien en su versión original bien con algunas modificaciones que no alteran su esencia en lo que se refiere a los objetivos de este trabajo.

A medida que se fue desarrollando la teoría estadística de los modelos de reducción de dimensión para series temporales la literatura empezó a destacar el hecho de que un indicador sintético se puede interpretar como un factor común a una serie de variables observables, y por lo tanto que su construcción se debería enmarcar dentro de los modelos de análisis factorial. Así Stock y Watson (1991) adaptan el modelo de índice común de Sargent y Sims (1977) para reproducir el indicador coincidente de la economía americana. Su aportación no consiste en mejorar el indicador existente, sino en reproducir los resultados que se venían obteniendo de manera puramente empírica con un modelo paramétrico explícito y bien fundamentado desde el punto de vista estadístico: el factor común queda formalmente identificado con el supuesto de que todos los comovimientos entre las variables observadas tienen su origen en él; los parámetros se estiman por máxima verosimilitud suponiendo que todas las distribuciones de probabilidad son normales; y el indicador sintético del ciclo se define como el estimador concurrente del factor común, que se calcula aplicando el filtro de Kalman. Un planteamiento alternativo del modelo factorial dinámico que no restringe el número de factores es el desarrollado por Peña y Box (1987), con el que Abad y Quilis (1998) construyen un indicador cíclico para la economía española.

En los últimos años se han desarrollado el modelo factorial dinámico generalizado (Forni y otros, 2000) y el modelo de índices de difusión (Stock y Watson 1998, 2002), que tienen bastantes puntos en común. En ambos casos su principal característica es suprimir la etapa previa de selección de un subconjunto suficiente de variables, para incorporar directamente al modelo los cientos o miles de variables

que puedan contener información sobre el ciclo. Otras novedades respecto a Stock y Watson (1991) son que el número de factores comunes no está predeterminado y que se admite cierta correlación entre los componentes idiosincrásicos, relajando así la condición de identificación de los factores comunes del modelo factorial dinámico clásico. A pesar de que los desarrollos teóricos son relativamente recientes es posible encontrar en la literatura un número apreciable de aplicaciones (Altissimo y otros 2001, Camacho y Sancho 2003).

En definitiva podemos afirmar que en la última década se ha avanzado mucho en la construcción de indicadores cíclicos entendida como un problema de reducción de dimensión. Sin embargo todas las propuestas que hemos visto hasta ahora se plantean en un marco lineal y por lo tanto imponen un comportamiento simétrico del ciclo en sus fases ascendente y descendente. Ahora bien, en un contexto univariante hay sobrada evidencia empírica de que las principales variables relacionadas con la actividad económica tienen un comportamiento asimétrico a lo largo del ciclo (Teräsvirta y Anderson 1992, Skalin y Teräsvirta 1999) y se han desarrollado diversos modelos no lineales de series temporales para describirlo (Potter, 1999).

En esa dirección una de las propuestas que ha tenido más repercusión en el análisis aplicado es el modelo de regímenes cambiantes (Hamilton, 1989), que se apoya en otra característica básica del ciclo ya apuntada en Burns y Mitchell (1946). Estos autores sostenían que el objetivo del análisis cíclico no es tanto medir pequeñas diferencias cuantitativas en un indicador continuo, como determinar el estado cualitativo en que se encuentra la economía en un momento dado. Para ello la literatura tradicionalmente ha distinguido dos estados, fases o regímenes -expansión y recesión-, aunque algunos trabajos recientes defienden la tesis de que es necesario considerar tres (Sichel, 1994), cuatro (Emery y Koenig, 1992) e incluso seis (Kontolemis, 1997) regímenes diferentes para caracterizar adecuadamente el ciclo económico. Sea cual sea el número de estados, los modelos de regímenes cambiantes definen el ciclo a partir de un proceso estocástico discreto no observable. La asimetría cíclica que se aprecia en la variable observable se modeliza haciendo que algunos de los parámetros de su modelo univariante varíen con el estado del ciclo, lo que permite estimar la probabilidad de que el ciclo se encuentre en un determinado régimen condicionada a la evolución observada (Hamilton 1989, Lam 1990).

En la versión propuesta por Hamilton el modelo no resulta plenamente satisfactorio para el análisis del ciclo general de la economía, ya que supone que toda la información relevante que existe en el sistema se puede reunir en una única variable observable. Este inconveniente fue resuelto en Krolzig (1997, 2001), que generaliza el modelo de Hamilton al contexto multivariante proponiendo los modelos

VAR con regímenes cambiantes. En estos modelos hay una única variable discreta latente que incide sobre un vector de variables observables, y la probabilidad de que esa variable esté en un régimen concreto en un determinado momento se estima utilizando toda la información del sistema. Pero tampoco los modelos VAR con regímenes cambiantes constituyen una solución plenamente satisfactoria al problema de construcción de indicadores cíclicos, ya que se limitan a considerar la distinción entre estados y no proporcionan un indicador cuantitativo. En el análisis de coyuntura las variaciones cuantitativas son importantes aunque no modifiquen la probabilidad de que la economía esté en un determinado régimen, y por lo tanto es preciso disponer también de un indicador cuantitativo apropiado.

Este recorrido por la literatura reciente lleva a la conclusión de que es necesario integrar los dos grandes pilares sobre los que se asienta actualmente la construcción de indicadores sintéticos para el análisis del ciclo: (1) la consideración explícita del ciclo como un componente no observable común a un conjunto de variables económicas; y (2) el comportamiento asimétrico que ha de ser incorporado de manera igualmente explícita en los modelos. Esta es la síntesis por la que abogan Diebold y Rudebusch (1996), quienes proponen combinar la estructura factorial y el enfoque de regímenes cambiantes en un modelo factorial dinámico en el que el factor cambia de régimen, modelo que se discute a continuación.

### **3. EL MODELO FACTORIAL DINÁMICO CON CAMBIO DE RÉGIMEN**

#### **3.1 Especificación**

El modelo factorial dinámico con cambio de régimen proporciona un marco suficientemente general para el seguimiento del ciclo económico. Este se modeliza combinando dos indicadores complementarios: un indicador cuantitativo, que se identifica con un factor común  $C_t$  y que mide en escala continua las variaciones que se producen en el componente cíclico de la economía; y un indicador cualitativo  $S_t$  que refleja los grandes estados o fases cíclicas, y cuyo seguimiento en tiempo real se realiza estimando la probabilidad de que tome un valor determinado dado el conjunto de información disponible en cada momento. El modelo tiene su origen en la propuesta de Diebold y Rudebusch (1996). Los principales algoritmos de estimación están descritos en Kim (1994) desde un enfoque clásico y en Kim y Nelson (1998) desde una perspectiva bayesiana; algunas aplicaciones interesantes son Kim y Yoo (1995), Chauvet (1998) y Chauvet y otros (2002), especialmente los dos primeros que discuten algunos aspectos relevantes del modelo relacionados con el análisis del ciclo. Kim y Nelson (1999) resume el estado de conocimiento hasta ese momento.

Sea  $Y_t = (Y_{1t} Y_{2t} \dots Y_{Nt})'$  un vector  $N \times 1$  formado por variables observables que en conjunto reúnen toda la información sobre el ciclo que existe en el sistema, y que suponemos está generado por un proceso estocástico multivariante estacionario y ergódico. Diremos que  $Y_t$  sigue un modelo factorial dinámico con cambio de régimen si su proceso generador de datos (PGD) admite la siguiente representación:

$$Y_t = D + \gamma(L)C_t + e_t \quad [3.1]$$

$$\phi(L)(C_t - \mu_{S_t} - \delta) = u_t \quad [3.2]$$

$$\mu_{S_t} = \mu_0(1 - S_t) + \mu_1 S_t \quad [3.3]$$

$$P(S_t = 1 | S_{t-1} = 1) = p \quad P(S_t = 0 | S_{t-1} = 0) = q \quad [3.4]$$

$$u_t \sim N(0,1) \quad [3.5]$$

$$\psi(L)e_t = v_t \quad [3.6]$$

$$\psi(L) = \text{diag}(\psi^{(1)}(L) \dots \psi^{(N)}(L)) \quad [3.7]$$

$$v_t \sim \text{Niid}(0_N, \text{diag}(\sigma_{v_1}^2 \dots \sigma_{v_N}^2)) \quad [3.8]$$

$$E(u_t v_t) = 0_N \quad [3.9]$$

El modelo supone que cada variable observable  $Y_{it}$  es el resultado de combinar la aportación de un factor común y un componente idiosincrásico, como se indica en la ecuación [3.1]. La contribución del factor común  $C_t$  viene dada por  $\gamma^{(i)}(L)C_t$ , donde  $\gamma^{(i)}(L)$  es la función de transferencia asociada a  $Y_{it}$ . El componente idiosincrásico se define como la suma de una parte determinística  $D$ , que suponemos constante, y un proceso estocástico regular de media nula  $e_{it}$ , de manera que  $E(D_i + e_{it}) = D_i$ .

Las ecuaciones [3.2] a [3.5] representan el PGD del factor común, que sigue un proceso autorregresivo con todas sus raíces fuera del círculo unidad. Su media depende de una variable discreta no observable  $S_t$  que toma dos valores, 0 y 1;

para simplificar identificamos el estado 1 (0) con expansión (recesión), aunque la interpretación formal depende de los valores concretos de  $\delta$ ,  $\mu_1$  y  $\mu_0$ . El parámetro  $\delta$  denota la media a largo plazo de  $C_t$ ,  $E(C_t)=\delta$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_0$  son las desviaciones de esta media cuando  $S_t$  está en el estado 1 y 0 respectivamente, es decir  $E(C_t|S_t=1)=\delta+\mu_1$ ,  $E(C_t|S_t=0)=\delta+\mu_0$ . Puesto que  $E(C_t) = E(C_t|S_t=1) P(S_t=1) + E(C_t|S_t=0) P(S_t=0)$ , la condición de identificación es  $\mu_0+(\mu_1-\mu_0)\pi=0$ , siendo  $\pi=P(S_t=1)=1-P(S_t=0)$ . La dinámica de  $S_t$  viene dada por una cadena de Markov de primer orden con probabilidades de transición constantes  $p$  y  $q$ .

La parte estocástica del componente idiosincrásico,  $e_t$ , sigue un proceso VAR estacionario, como se especifica en las ecuaciones [3.6] a [3.8]. Todos los componentes idiosincrásicos están incorrelacionados entre sí en el tiempo y contemporáneamente, y sus innovaciones son ortogonales a la innovación del factor común. Todas las distribuciones de probabilidad son normales, de manera que los componentes idiosincrásicos de las variables observables son independientes del factor común y entre sí.

En definitiva el modelo definido en [3.1] a [3.9] genera variables observables correlacionadas entre sí y con comportamientos asimétricos para distintos valores de  $S_t$ . El modelo impone tres restricciones para identificar las dos variables no observables, el factor común  $C_t$  y la variable de estado  $S_t$ ; dos de ellas tienen un claro contenido económico, en tanto que la tercera es una condición de normalización. Así para identificar  $C_t$  el modelo aplica el supuesto estándar en el análisis factorial de que todos los comovimientos entre variables observables se deben a la influencia del factor común sobre las diversas variables del sistema. Además para fijar la escala se añade el supuesto de que la varianza de las innovaciones en el factor común es igual a la unidad. Por su parte  $S_t$  queda identificada con la restricción de que todos los cambios de régimen en las variables observables tienen un origen común. Las innovaciones idiosincrásicas  $v_{it}$  pueden tener consecuencias importantes desde el punto de vista cuantitativo, pero sólo las innovaciones agregadas que inciden sobre todo el sistema provocan cambios de régimen en  $Y_t$ .

### 3.2 Estimación

Para estimar los parámetros desconocidos y aproximar la evolución de las variables no observables es necesario expresar el modelo en la formulación de espacio de estados. Supongamos sin pérdida de generalidad que la dinámica es de orden dos, de manera que  $\gamma(L)=\gamma_0+\gamma_1L+\gamma_2L^2$ ,  $\phi(L)=1-\phi_1L-\phi_2L^2$  y  $\psi(L)=1-\psi_1L-\psi_2L^2$ . En ese caso la ecuación de transición viene dada por



$$\begin{pmatrix} C_t - \delta \\ C_{t-1} - \delta \\ C_{t-2} - \delta \\ e_{1,t} \\ e_{1,t-1} \\ \dots \\ e_{N,t} \\ e_{N,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(L)\mu_{S_t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_1^{(1)} & \psi_2^{(1)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \psi_1^{(N)} & \psi_2^{(N)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{t-1} - \delta \\ C_{t-2} - \delta \\ C_{t-3} - \delta \\ e_{1,t-1} \\ e_{1,t-2} \\ \dots \\ e_{N,t-1} \\ e_{N,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \\ 0 \\ v_{1,t} \\ 0 \\ \dots \\ v_{N,t} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

donde

$$\phi(L)\mu_{S_t} = \mu_{S_t} - \phi_1\mu_{S_{t-1}} - \phi_2\mu_{S_{t-2}} \tag{3.11}$$

La ecuación de medida es

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \dots \\ Y_{Nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_0^{(1)} & \gamma_1^{(1)} & \gamma_2^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_0^{(2)} & \gamma_1^{(2)} & \gamma_2^{(2)} & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_0^{(N)} & \gamma_1^{(N)} & \gamma_2^{(N)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_t \\ C_{t-1} \\ C_{t-2} \\ e_{1,t} \\ e_{1,t-1} \\ e_{2,t} \\ e_{2,t-1} \\ \dots \\ e_{N,t} \\ e_{N,t-1} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

y por lo tanto [3.10]-[3.12] se puede expresar de forma compacta como

$$\beta_t = M_t + F\beta_{t-1} + w_t \tag{3.13}$$

$$Y_t = D + H\beta_t \tag{3.14}$$

En la práctica el modelo es demasiado complejo para construir la función de verosimilitud exacta y además  $D$ ,  $\delta$  no están identificados, de manera que no es posible estimar todos los parámetros de [3.13]-[3.14] por máxima verosimilitud

exacta. A continuación analizamos cada uno de estos problemas con más detalle, comenzando con la complejidad de la función de verosimilitud.

Considérese por el momento el modelo para variables centradas,  $y_t = Y_t - E(Y_t)$  y  $c_t = C_t - \delta$ . Para construir la función de verosimilitud habría que aplicar conjuntamente el filtro de Kalman y el filtro de Hamilton, que posteriormente se maximizaría de la forma habitual. Sin embargo en un modelo con dos regímenes a medida que se va condicionando sobre el pasado cada iteración dobla el número de posibilidades, de manera que en una muestra de T observaciones terminamos con  $2^T$  combinaciones y los filtros a emplear son extremadamente complejos incluso con tamaños muestrales moderados. Para evitar esto Kim (1994) propone compactar la variable de estado  $\beta_t$  y su matriz de errores cuadráticos medios después de cada iteración, de manera que en la iteración t sólo sea necesario considerar  $2^m$  posibilidades, siendo m un número moderado. Con esta simplificación es posible aproximar la función de verosimilitud de manera satisfactoria, aunque los estimadores que se obtienen maximizando esta aproximación no son estimadores máximo-verosímiles en sentido estricto.

Respecto al valor de m Kim (1994) demuestra que depende de r, el número de retardos de la variable que cambia de régimen, de manera que la aproximación es válida tomando  $m=2^{r+1}$  si  $r>0$  y  $m=2^2$  si  $r=0$ . Por esa razón Kim y Yoo (1995) y Chauvet (1998) sustituyen (3.2) por

$$\phi(L)(C_t - \delta) = \mu_{S_t}^* + u_t \tag{3.15}$$

con  $\mu_{S_t}^*$  como en [3.3]. Desde el punto de vista computacional esta representación tiene la ventaja de que al expresar el modelo en la formulación de espacio de estados la nueva ecuación de transición es

$$\begin{pmatrix} C_t - \delta \\ C_{t-1} - \delta \\ C_{t-2} - \delta \\ e_{1,t} \\ e_{1,t-1} \\ \dots \\ e_{N,t} \\ e_{N,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{S_t}^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_1^{(1)} & \psi_2^{(1)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \psi_1^{(N)} & \psi_2^{(N)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{t-1} - \delta \\ C_{t-2} - \delta \\ C_{t-3} - \delta \\ e_{1,t-1} \\ e_{1,t-2} \\ \dots \\ e_{N,t-1} \\ e_{N,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \\ 0 \\ v_{1,t} \\ 0 \\ \dots \\ v_{N,t} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

$S_t$  sólo entra contemporáneamente en (3.16) y por lo tanto siguiendo la regla de Kim (1994) en cada iteración basta considerar  $2^2$  posibilidades. En cambio con la formulación que proponemos en este trabajo la ecuación de transición incluye dos retardos de  $S_t$  -véase [3.11]- y por lo tanto en cada iteración hay que mantener  $2^3$  posibilidades, lo que hace que el algoritmo sea más complejo e incrementa el tiempo de computación.

No obstante desde el punto de vista de la interpretación de los resultados la expresión [3.15] tiene el inconveniente de que cambia el significado de los términos expansión y recesión, que ya no se definen sobre el factor común  $C_t$  sino sobre la variable filtrada  $\phi(L)C_t$ : se produce así un desfase entre los indicadores cuantitativo y cualitativo del ciclo, cuya magnitud depende de las raíces de  $\phi(L)$ . Esta distorsión es especialmente grave cuando se quiere comparar la cronología cíclica estimada en el modelo factorial con el fechado para variables observables estimado con un modelo univariante. De ahí que en este trabajo abogemos por la representación del modelo en términos de [3.1] a [3.9], ya que nos parece más adecuada desde el punto de vista de la interpretación de las variables no observables.

Para estimar los parámetros de [3.1]-[3.9] utilizamos el algoritmo desarrollado en Kim y Nelson (1999) adaptándolo al cambio en la parametrización del PGD del factor común. Sea el modelo en espacio de estados [3.13]-[3.14] para variables centradas

$$\beta_t = M_t + F \beta_{t-1} + w_t \tag{3.17}$$

$$y_t = H \beta_t \tag{3.18}$$

y sea  $E(w_t w_t') = Q$  la matriz de varianzas-covarianzas de la perturbación  $w_t$ . Al principio de la iteración  $t$  se conocen las siguientes variables:

$$\beta_{t-1|t-1}^{(h,i)} = E(\beta_{t-1} | \Omega_{t-1}, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h) \tag{3.19}$$

$$P_{t-1|t-1}^{(h,i)} = E[(\beta_{t-1} - \beta_{t-1|t-1}^{(h,i)})(\beta_{t-1} - \beta_{t-1|t-1}^{(h,i)})' | \Omega_{t-1}, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h] \tag{3.20}$$

$$P(S_{t-1} = i, S_{t-2} = h | \Omega_{t-1}) \tag{3.21}$$

donde  $\Omega_t = (y_t, y_{t-1}, \dots)$  representa el conjunto de información disponible en  $t$ . Siguiendo el procedimiento habitual a continuación se aplican de manera sucesiva (1) el filtro de Kalman para actualizar el vector de estado y su matriz de errores cuadráticos medios, (2) el filtro de Hamilton para actualizar las probabilidades de la variable

de estado, y (3) el filtro de Kim para mantener constante el número de combinaciones a considerar en la siguiente iteración.

Etapa 1: filtro de Kalman, que se articula en dos pasos:

Paso 1.a: Predicción del vector de estado y de su matriz de errores cuadráticos medios con la información disponible en t-1

$$\beta_{t|t-1}^{(h,i,j)} = E(\beta_t | \Omega_{t-1}, S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h) = M_t^{(h,i,j)} + F\beta_{t-1|t-1}^{(h,i)} \quad [3.22]$$

$$P_{t|t-1}^{(h,i,j)} = E\left[(\beta_t - \beta_{t|t-1}^{(h,i,j)})(\beta_t - \beta_{t|t-1}^{(h,i,j)})' | \Omega_{t-1}, S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h\right] = F P_{t-1|t-1}^{(h,i)} F' + \Omega \quad [3.23]$$

$$\eta_{t|t-1}^{(h,i,j)} = y_t - y_{t|t-1}^{(h,i,j)} = y_t - H\beta_{t|t-1}^{(h,i,j)} \quad [3.24]$$

$$f_{t|t-1}^{(h,i,j)} = H P_{t|t-1}^{(h,i,j)} H' \quad [3.25]$$

Paso 1.b: Actualización, incorporando la información recogida en t

$$\beta_{t|t}^{(h,i,j)} = E(\beta_t | \Omega_t, S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h) = \beta_{t|t-1}^{(h,i,j)} + P_{t|t-1}^{(h,i,j)} H' \left[ f_{t|t-1}^{(h,i,j)} \right]^{-1} \eta_{t|t-1}^{(h,i,j)} \quad [3.26]$$

$$\begin{aligned} P_{t|t}^{(h,i,j)} &= E\left[(\beta_t - \beta_{t|t}^{(h,i,j)})(\beta_t - \beta_{t|t}^{(h,i,j)})' | \Omega_t, S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h\right] = \\ &= \left\{ I - P_{t|t-1}^{(h,i,j)} H' \left[ f_{t|t-1}^{(h,i,j)} \right]^{-1} H' \right\} P_{t|t-1}^{(h,i,j)} \end{aligned} \quad [3.27]$$

Etapa 2: filtro de Hamilton, que se descompone en cuatro pasos:

Paso 2.a: Probabilidad conjunta inicial para t, t-1 y t-2 con información hasta t-1

$$\begin{aligned} P(S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h | \Omega_{t-1}) = \\ P(S_t = j | S_{t-1} = i, S_{t-2} = h) P(S_{t-1} = i, S_{t-2} = h | \Omega_{t-1}) \end{aligned} \quad [3.28]$$

Paso 2.b: Densidad marginal de  $y_t$  con información hasta t-1

$$\begin{aligned} f(y_t | \Omega_{t-1}) &= \sum_h \sum_i \sum_j f(y_t | S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h, \Omega_{t-1}) \times \\ &\times P(S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h | \Omega_{t-1}) \end{aligned} \quad [3.29]$$

con

$$\begin{aligned}
 & f(y_t | S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h, \Omega_{t-1}) = \\
 & = (2\pi)^{-N/2} \left| \Sigma_{t|t-1}^{(h,i,j)} \right|^{-1/2} \exp \left( -\frac{1}{2} \eta_{t|t-1}^{(h,i,j)} \Sigma_{t|t-1}^{(h,i,j)-1} \eta_{t|t-1}^{(h,i,j)} \right)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Paso 2.c: Probabilidad conjunta actualizada para t, t-1 y t-2

$$\begin{aligned}
 & P(S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h | \Omega_t) = \\
 & = \frac{f(y_t | \Omega_{t-1}, S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h) P(S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h | \Omega_{t-1})}{f(y_t | \Omega_{t-1})}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Paso 2.d: Marginalización con respecto a S<sub>t-2</sub>

$$\begin{aligned}
 & P(S_t = j | \Omega_t) = \\
 & = \sum_h \sum_i \frac{f(y_t | \Omega_{t-1}, S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h) P(S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h | \Omega_{t-1})}{f(y_t | \Omega_{t-1})}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
 & P(S_t = j, S_{t-1} = i | \Omega_t) = \\
 & = \sum_h \frac{f(y_t | \Omega_{t-1}, S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h) P(S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h | \Omega_{t-1})}{f(y_t | \Omega_{t-1})}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Etapa 3: filtro de Kim. Como se puede comprobar al comparar [3.19] con [3.26] y [3.20] con [3.27] la dimensión del problema se ha doblado, ya que para cada combinación (h,i) procedente de la iteración t-1 ahora tenemos que considerar (h,i,1) y (h,i,0). De ahí que el último paso sea marginalizar  $\beta_{t|t}^{(h,i,j)}$  con respecto a S<sub>t-2</sub>

$$\beta_{t|t}^{(i,j)} = E(\beta_t | \Omega_t, S_t = j, S_{t-1} = i) = \frac{\sum_h P(S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h | \Omega_t) \beta_{t|t}^{(h,i,j)}}{P(S_t = j, S_{t-1} = i | \Omega_t)} \tag{3.34}$$

cuyo error cuadrático medio es

$$P_{t|t}^{(i,j)} = \frac{\sum_h P(S_t = j, S_{t-1} = i, S_{t-2} = h | \Omega_t) \left[ P_{t|t}^{(h,i,j)} + (\beta_{t|t}^{(i,j)} - \beta_{t|t}^{(h,i,j)}) (\beta_{t|t}^{(i,j)} - \beta_{t|t}^{(h,i,j)})' \right]}{P(S_t = j, S_{t-1} = i | \Omega_t)} \tag{3.35}$$

con lo que ya se conocen  $\beta_{\psi_t}^{(i,j)}$ ,  $P_{\psi_t}^{(i,j)}$  y  $P(S_{t-1}=i, S_t=j | \Omega_t)$  y podemos proceder a la iteración  $t+1$ .

Para comenzar la recursión son necesarias las condiciones iniciales  $\beta_{\psi_0}^{(h,i)}$ ,  $P_{\psi_0}^{(h,i)}$  y  $P(S_0=i, S_1=h)$ . La probabilidad bivalente se calcula siguiendo la propuesta de Hamilton (1989): a partir de las probabilidades de transición  $p$  y  $q$  se obtienen las probabilidades en estado estacionario aplicando

$$\begin{pmatrix} \pi \\ 1-\pi \end{pmatrix} = (A'A)^{-1}A' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [3.36]$$

con  $\pi=P(S_t=1)$  y

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & -(1-q) \\ -(1-p) & 1-q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [3.37]$$

Tomando las probabilidades marginales para  $S_t$ ,  $P(S_{t-1}=1)=\pi$  y  $P(S_{t-1}=0)=1-\pi$ , se obtiene la probabilidad inicial como

$$P(S_{-1} = h, S_0 = i) = P(S_0 = i | S_{-1} = h) P(S_{-1} = h) \quad [3.38]$$

Por lo que respecta al vector de estado y su error cuadrático medio, en el modelo lineal las condiciones iniciales habitualmente utilizadas son la media y varianza marginales de  $\beta_t$ , que si el modelo es estacionario vienen dadas por

$$\beta_{0|0} = (I - F)^{-1}M \quad [3.39]$$

$$\text{vec}(P_{0|0}) = (I - F \otimes F)^{-1}\text{vec}(Q) \quad [3.40]$$

donde  $F$  se definió en (3.17),  $Q=E(w_t w_t')$  y  $M$  es el valor de  $M_t$  definida en [3.17] en el estado estacionario. Puesto que  $F$  y  $Q$  son constantes que no dependen de  $S_t$  podemos tomar  $P_{0|0}^{(h,i)}=P_{0|0}$  constante para todo  $h,i$ . Por último si tenemos en cuenta que

$$M_t = (\mu_{S_t} - \phi_1 \mu_{S_{t-1}} - \phi_2 \mu_{S_{t-2}} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)' \quad [3.41]$$

entonces para  $S_0=i$ ,  $S_{-1}=h$  podemos usar la media marginal de  $S_t$ ,  $\mu_0+(\mu_1-\mu_0)\pi$ , como condición inicial para  $\mu_{S_{-2}}$ , calcular  $M_{00}^{(h,i)}$  con [3.41] y llevar ese resultado a [3.39] para obtener el correspondiente  $\beta_{00}^{(h,i)}$ , completando así todas las condiciones iniciales.

Con los resultados obtenidos hasta aquí podemos construir la función de verosimilitud aproximada para un subconjunto de parámetros que en notación compacta podemos expresar como  $\{\gamma, \phi, \mu_1, \mu_0, \rho, q, \psi, \sigma_{v_1}^2, \dots, \sigma_{v_N}^2\}$ , y maximizando esta función obtenemos los llamados estimadores aproximados de máxima verosimilitud.

Queda sin embargo pendiente la estimación de  $D$  y  $\delta$ , que desde el punto de vista económico descomponen la media marginal de cada variable observable,  $E(Y_{it})$ , en la parte que se debe a la contribución del factor común,  $\gamma^{(i)}(1)\delta$ , y la aportación del componente idiosincrásico  $D$ . Estos parámetros tampoco están identificados en el modelo factorial dinámico lineal, pero Stock y Watson (1991) obtienen estimadores por el método de los momentos a partir de la expresión

$$\delta = \lambda(1)E(Y_t) \quad [3.42]$$

donde el polinomio temporal  $\lambda(L)$  es la primera fila de la matriz  $[I-(I-KH)FL]^{-1}K$ ,  $K$  es la ganancia de Kalman en estado estacionario, y  $\lambda(1)$  es la ganancia de  $\lambda(L)$ .

Sin embargo hemos visto que el filtro de Kalman se vuelve inmanejable y es necesario simplificarlo aplicando el filtro de Kim cuando el modelo se generaliza para incluir cambio de régimen en el factor común. El efecto de esta simplificación en la ganancia de Kalman es desconocido y no hay garantía de que la ganancia que se calcula con la versión simplificada sea una buena aproximación a la ganancia real, lo que impide aplicar [3.42] en este caso. Kim y Nelson (1998, 1999) resuelven el problema replanteando la estimación del modelo desde una perspectiva bayesiana y aplicando muestreo de Gibbs, pero una discusión detallada de esta propuesta excede los objetivos planteados en este trabajo.

#### 4. UNA APLICACION AL CICLO EUROPEO

En esta sección mostramos cómo utilizar el modelo desarrollado en la sección anterior para caracterizar el ciclo económico de la Unión Europea. La presentación que sigue se limita a ilustrar los principales resultados desde el punto de vista estadístico; para una discusión más detallada desde el punto de vista económico, incluyendo la comparación con un indicador alternativo, véase Cancelo (2004).

El ciclo europeo se estima a partir de la evolución observada de una selección de países de la Unión Europea. Las variables observables son el PIB trimestral y desestacionalizado de Alemania, Bélgica, Francia, Italia, Holanda, España y el Reino Unido. Los datos provienen de las Cuentas Nacionales Trimestrales de la OCDE (*OECD Quarterly National Accounts*), y se han obtenido a través de la página web de *DSI Data Service & Information* en febrero de 2003. La muestra se extiende desde el primer trimestre de 1980 al segundo de 2002. Los datos alemanes han sido tratados para corregir el cambio de nivel que se produce a partir del primer trimestre de 1991 como consecuencia de la reunificación. Los contrastes habituales de raíces unitarias concluyen que todas las series analizadas son  $I(1)$ . Como uno de los requisitos del modelo es que las variables sean estacionarias en lo que sigue utilizamos las tasas de crecimiento intertrimestrales calculadas como 100 veces la diferencia del logaritmo.

En la expresión general del modelo [3.1] a [3.9] se han introducido dos modificaciones. Para fijar la cronología cíclica se impone en [3.12] la restricción

$$\gamma_1^{(ALE)} = \gamma_2^{(ALE)} = 0 \quad (\text{Rissman, 1999}).$$

Además los datos originales se han estandarizado dividiendo cada serie por su desviación típica para facilitar la convergencia del algoritmo de estimación (Kim y Nelson, 1999), lo que modifica los parámetros de la función de transferencia  $\gamma(L)$  y las varianzas de las innovaciones de los componentes idiosincrásicos nacionales; en particular estas últimas ahora se expresan en unidades de la varianza de la correspondiente serie observada. Recuérdesse que las medias  $D$  y  $\delta$  no están identificadas de manera que el modelo se estima para las variables centradas  $y_t = Y_t - E(Y_t)$  y  $c_t = C_t - \delta$ . Todos los cálculos se programaron en Gauss modificando el programa *SW\_MS.OPT* de Kim y Nelson (1999) de la manera que se explicó en la sección anterior.

El cuadro 1 presenta las estimaciones de los parámetros del modelo. El indicador cuantitativo del ciclo  $C_t$  es un factor común de las tasas de crecimiento de los países seleccionados. Su dinámica de corto plazo viene dada por un proceso  $AR(2)$  que genera un ciclo de módulo 0.65 y periodo 12.7 trimestres. La caracterización del ciclo se completa con un segundo indicador cualitativo, cuyas probabilidades de transición confirman la asimetría del ciclo europeo: cuando la economía europea está en expansión la probabilidad de que siga en ese estado en el próximo trimestre es 0.957, pero cuando está en recesión la probabilidad de que no cambie de estado baja a 0.560; como consecuencia la duración esperada de las expansiones es de 23.3 trimestres mientras que la duración promedio de las recesiones es de apenas 2.3 trimestres. Las desviaciones del indicador cuantitativo respecto a su media a largo plazo son grandes cuando la economía está en recesión. Aunque los valores individuales de  $\mu_1$  y  $\mu_0$  no tienen una interpretación económica directa ya



que dependen de la condición de normalización  $\text{var}(u_t)=1$  impuesta en [3.5] para fijar la escala del factor común, el hecho de que  $|\hat{\mu}_1| < |\hat{\mu}_0|$  sí tiene implicaciones para el análisis del ciclo. En definitiva el modelo apunta inequívocamente a que las recesiones suelen ser cortas y severas, en tanto que las expansiones son largas y suaves.

Cuadro 1

## MODELO ESTIMADO

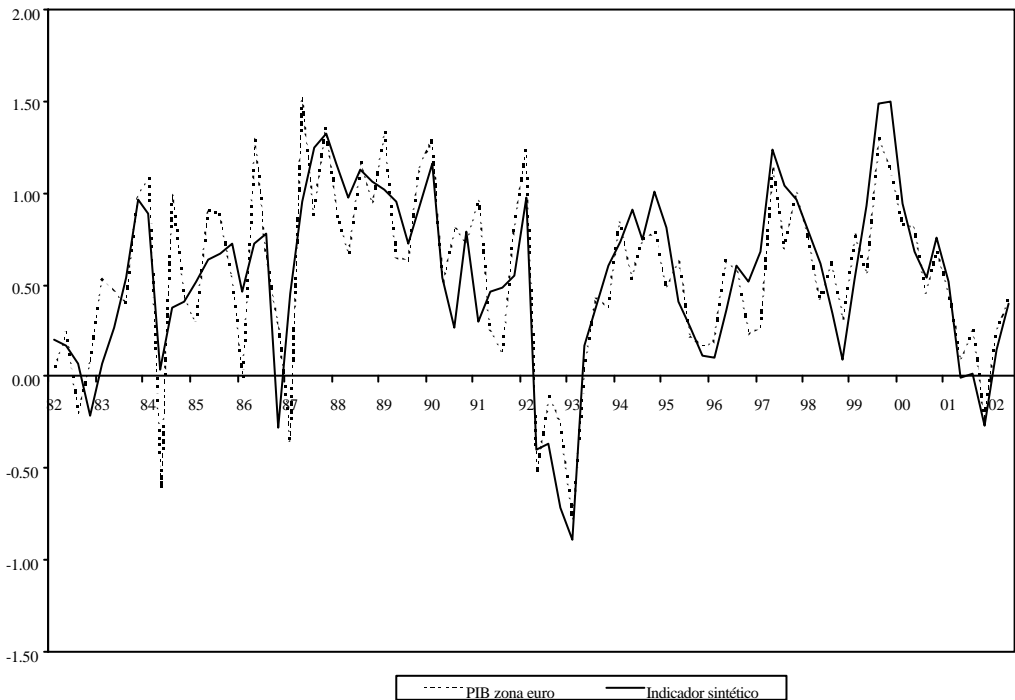
<i>Función de transferencia</i>				<i>Componente idiosincrásico</i>			
	<i>Parámetro</i>	<i>Estimación</i>	<i>Desviación típica</i>		<i>Parámetro</i>	<i>Estimación</i>	<i>Desviación típica</i>
Alemania	$\gamma_0^{(1)}$	0.177	0.059	Alemania	$\psi_1^{(1)}$	-0.262	0.121
					$\psi_2^{(1)}$	-0.125	0.133
					$\sigma_{v1}^2$	0.759	0.122
Bélgica	$\gamma_0^{(2)}$	0.062	0.041	Bélgica	$\psi_1^{(2)}$	-0.431	0.308
	$\gamma_1^{(2)}$	0.454	0.122		$\psi_2^{(2)}$	-0.060	0.278
	$\gamma_2^{(2)}$	-0.191	0.128		$\sigma_{v2}^2$	0.023	0.095
Francia	$\gamma_0^{(3)}$	0.241	0.080	Francia	$\psi_1^{(3)}$	-0.163	0.137
	$\gamma_1^{(3)}$	0.011	0.089		$\psi_2^{(3)}$	0.116	0.134
	$\gamma_2^{(3)}$	0.111	0.131		$\sigma_{v3}^2$	0.471	0.087
Italia	$\gamma_0^{(4)}$	0.147	0.075	Italia	$\psi_1^{(4)}$	-0.326	0.129
	$\gamma_1^{(4)}$	0.203	0.116		$\psi_2^{(4)}$	-0.056	0.123
	$\gamma_2^{(4)}$	-0.107	0.142		$\sigma_{v4}^2$	0.563	0.098
Holanda	$\gamma_0^{(5)}$	0.292	0.121	Holanda	$\psi_1^{(5)}$	-0.070	0.117
	$\gamma_1^{(5)}$	-0.229	0.178		$\psi_2^{(5)}$	0.048	0.121
	$\gamma_2^{(5)}$	0.143	0.088		$\sigma_{v5}^2$	0.734	0.126
España	$\gamma_0^{(6)}$	0.328	0.101	España	$\psi_1^{(6)}$	-0.250	0.129
	$\gamma_1^{(6)}$	-0.269	0.154		$\psi_2^{(6)}$	0.074	0.129
	$\gamma_2^{(6)}$	0.217	0.077		$\sigma_{v6}^2$	0.581	0.105
Reino Unido	$\gamma_0^{(7)}$	0.050	0.079	Reino Unido	$\psi_1^{(7)}$	0.272	0.114
	$\gamma_1^{(7)}$	0.206	0.107		$\psi_2^{(7)}$	0.105	0.119
	$\gamma_2^{(7)}$	-0.175	0.118		$\sigma_{v7}^2$	0.718	0.120
Factor común	$\phi_1$	1.140	0.279				
	$\phi_2$	-0.425	0.213				
	$\mu_1$	0.369	0.443	Logaritmo verosimilitud			
	$\mu_0$	-3.962	1.410				
	p	0.957	0.031				
q	0.560	0.211					
					-194,4		

La evolución en el tiempo del indicador cuantitativo se presenta en el gráfico 1. Siguiendo la práctica habitual en la literatura hemos optado por el estimador concu-

rente o filtrado del factor común,  $C_{t|t} = E(C_t | Y_t, Y_{t-1}, \dots)$ , en vez del estimador final o suavizado  $C_{t|T} = E(C_t | Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_t, Y_{t-1}, \dots)$ . También representamos la tasa de crecimiento intertrimestral del PIB de la zona euro; puesto que la media y varianza de  $C_{t|t}$  son arbitrarias para facilitar la comparación hemos reescalado la serie para que sus dos primeros momentos coincidan con los del crecimiento del PIB agregado.

### Gráfico 1

#### INDICADOR SINTÉTICO DEL CICLO EUROPEO Y CRECIMIENTO TRIMESTRAL DEL PIB DE LA ZONA EURO

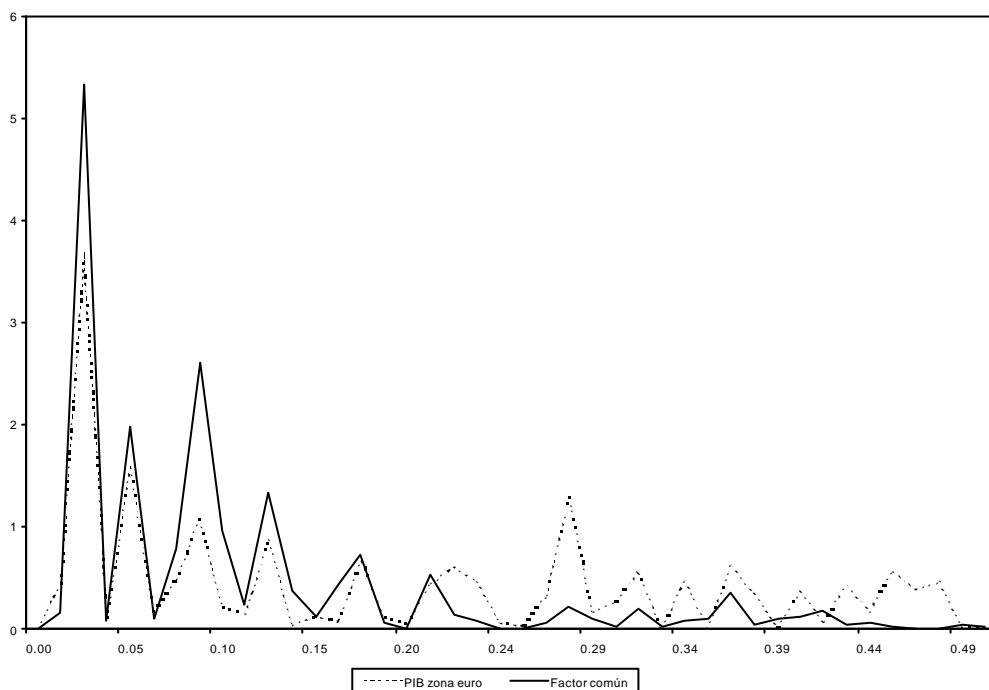


Como se puede comprobar en el gráfico el indicador cuantitativo del ciclo obtenido con el modelo factorial reproduce las fluctuaciones cíclicas del PIB agregado. Por construcción las desviaciones típicas de ambas series son iguales, y sin embargo la serie de crecimiento del PIB parece más volátil que la del factor común. Para confirmar esta impresión en el gráfico 2 comparamos el periodograma de las dos series, y en efecto se comprueba como teniendo la misma varianza el factor

común tiene más potencia en las frecuencias asociadas a las fluctuaciones de carácter cíclico.

**Gráfico 2**

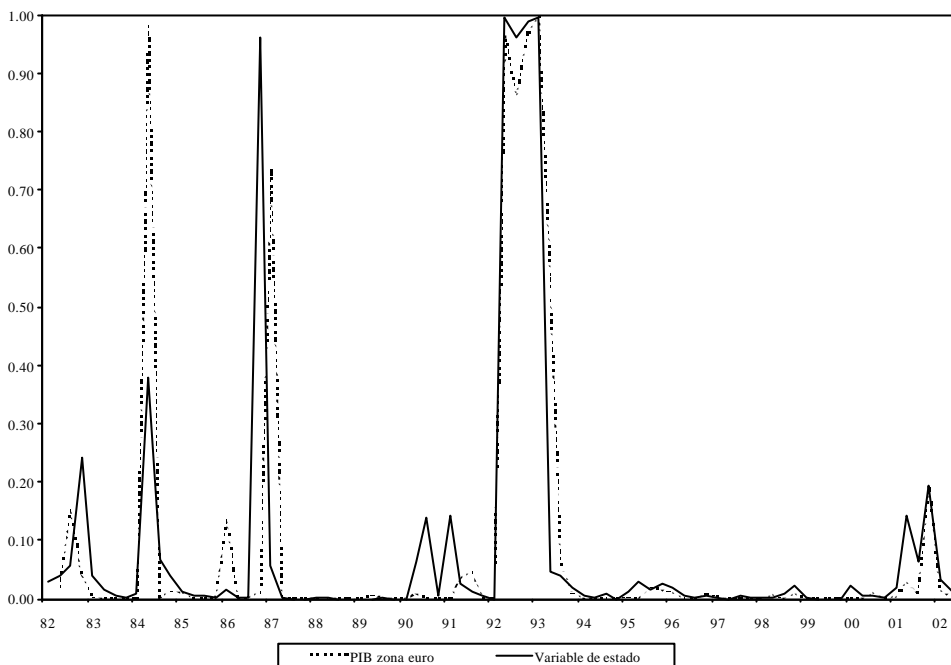
PERIODOGRAMAS DEL INDICADOR SINTÉTICO DEL CICLO EUROPEO Y DEL CRECIMIENTO TRIMESTRAL DEL PIB DE LA ZONA EURO



Respecto al indicador cualitativo en el gráfico 3 representamos la evolución del estimador concurrente de la probabilidad de recesión,  $P(S_t=0 | Y_t, Y_{t-1}, \dots)$ . Para facilitar la interpretación hemos construido un modelo univariante con cambio de régimen para el PIB de la zona euro -véase Cancelo (2004) para los detalles- y en el gráfico también mostramos el correspondiente estimador de la probabilidad de recesión. Si seguimos el criterio de Hamilton (1989) podemos decir que según el modelo factorial Europa estuvo en recesión en 1986:4 y de 1992:2 a 1993:1, una cronología cíclica que prácticamente coincide con la que se obtiene con un modelo univariante para el PIB agregado.

### Gráfico 3

PROBABILIDADES FILTRADAS DE RECESIÓN PARA LA VARIABLE DE ESTADO Y EL CRECIMIENTO TRIMESTRAL DEL PIB DE LA ZONA EURO



Los gráficos 1 y 3 también permiten comprobar las ventajas de considerar (3.2) en vez de (3.15). En la especificación del PGD del factor común de Kim y Yoo (1995) o Chauvet (1998) la cronología cíclica derivada de  $P(S_t=0 | Y_t, Y_{t-1}, \dots)$  está asociada a  $\phi(L)C_t$  y no a  $C_t$ . Esto impide la comparación directa y simultánea del indicador cuantitativo con una variable observable -gráfico 1- y de la probabilidad del indicador cualitativo con la de la variable de estado latente en el modelo univariante -gráfico 3-. Sin embargo esta comparación es inmediata con la reparametrización considerada en este trabajo, como se aprecia en los gráficos mencionados.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos defendido la tesis de que el análisis empírico del ciclo económico se debe apoyar en modelos factoriales dinámicos con cambio de régimen, tal y como se propone en Diebold y Rudebusch (1996). La estructura factorial surge de manera natural cuando no es posible reunir en una única variable observable toda la información relevante que existe en el sistema económico para la estimación del ciclo. En ese caso es necesario elaborar un indicador sintético a partir de un vector de variables, y el modelo factorial proporciona un marco bien fundamentado desde el punto de vista estadístico. Por su parte el cambio de régimen modeliza el comportamiento asimétrico a lo largo del ciclo, sobre el que hay abundante evidencia empírica que invalida las aproximaciones lineales que imponen que las variables se comporten de la misma manera cuando la economía está en expansión y en recesión.

La propuesta que hacemos en este trabajo integra de manera natural las dos grandes aproximaciones al análisis empírico del ciclo económico, la línea cuantitativa según la cual el ciclo ha de medirse en escala continua, y el enfoque discreto que considera que el análisis debe centrarse en los grandes estados, fases o regímenes cualitativos. Tal y como expusimos en la revisión de la Sección 2 la mayor parte de los procedimientos propuestos en la literatura obliga al analista a decantarse a priori por una de estas aproximaciones, lo que no ocurre aquí ya que el modelo desarrollado en la Sección 3 combina los dos enfoques: el factor común se interpreta como un indicador cuantitativo del ciclo, y la variable discreta de estado es un indicador cualitativo que permite fechar los puntos de giro y construir la correspondiente cronología cíclica. En ese sentido podemos concluir que el modelo factorial dinámico con cambio de régimen, a diferencia de otros procedimientos habitualmente empleados, ofrece un enfoque integrado y completo para el análisis empírico del ciclo económico.

Sin embargo para que esta pretendida integración de los aspectos cuantitativo y cualitativo del ciclo sea real es preciso especificar adecuadamente los componentes no observables. Hemos visto en la Sección 3 que es posible reparametrizar el modelo para simplificar la estimación de los parámetros poblacionales; sin embargo con esta simplificación los regímenes se definen sobre el factor común filtrado  $\phi(L)C_t$ , cuya evolución puede ser muy distinta de la de  $C_t$  dependiendo de las raíces del polinomio  $\phi(L)$ . Esto provoca una falta de sincronización entre los dos indicadores cíclicos, anulando así una de las principales ventajas del modelo. La aplicación de la Sección 4 ha confirmado que con la especificación propuesta en este trabajo los indicadores cuantitativo y cualitativo del ciclo son plenamente coherentes y complementarios, de manera que entre ambos permiten caracterizar el proceso

generador de datos del ciclo y llevar a cabo un seguimiento en tiempo real de su evolución.

## REFERENCIAS

- ABAD, A.M. y QUILIS, E.M. (1998): «A monthly index for the Spanish business cycle designed by means of dynamic factor analysis», *Research in Official Statistics*, 1, 31-49.
- ALTISSIMO, F., BASSANETTI, A., CRISTADORO, R., FORNI, M., LIPPI, M., REICHLIN, L. y VERONESE, G. (2001): «Eurocoin: a real time coincident indicator of the euro area business cycle», *Discussion Paper No. 3108*, Centre for Economic Policy Research.
- BAXTER, M. y KING, R. (1999): «Measuring business cycles: approximate band-pass filters for economic time series », *Review of Economics and Statistics*, 81, 575-593.
- BURNS, A.F. y MITCHELL, W.C. (1946): «Measuring Business Cycles », *Studies in Business Cycles*, no. 2, New York: National Bureau of Economic Research.
- CAMACHO, M. y SANCHO, I. (2003): «Spanish diffusion indexes », *Spanish Economic Review*, 5, 173-203.
- CANCELO, J.R. (2004): «Modeling the European cycle with factor structure and regime switching », *International Advances in Economic Research*, 10, 87-99.
- CHAUVET, M. (1998): «An econometric characterization of business cycle dynamics with factor structure and regime switching », *International Economic Review*, 39, 969-996.
- CHAUVET, M., JUHN, C. y POTTER, S. (2002): «Markov switching in disaggregate unemployment rates », *Empirical Economics*, 27, 205-232.
- DIEBOLD, F.X. y RUDEBUSCH, G.D. (1996): «Measuring business cycles: a modern perspective », *Review of Economics and Statistics*, 78, 67-77.
- EMERY, K.M. y KOENIG, E.F. (1992): «Forecasting turning points. Is a two-state characterization of the business cycle appropriate?», *Economics Letters*, 39, 431-435.
- FORNI, M., HALLIN, M., LIPPI, M. y REICHLIN, L. (2000): «The generalized dynamic-factor model: identification and estimation », *Review of Economics and Statistics*, 82, 540-554.

- HAMILTON, J.D. (1989): «A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle», *Econometrica*, 57, 357-384.
- HARVEY (1989): «Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter», Cambridge: Cambridge University Press.
- KAISER, R. y MARAVALL, A. (2001): «Measuring Business Cycles in Economic Time Series», Berlin: Springer.
- KIM, C.-J. (1994): «Dynamic linear models with Markov-switching», *Journal of Econometrics*, 60, 1-22.
- KIM, C.-J. y NELSON, C.R. (1998): «Business cycle turning points, a new coincident index, and tests of duration dependence based on a dynamic factor model with regime switching», *Review of Economics and Statistics*, 80, 188-201.
- KIM, C.-J. y NELSON, C.R. (1999): «State-space Models with Regime Switching», Cambridge: The MIT Press.
- KIM, M.-J. y YOO, J.-S. (1995): «New index of coincident indicators: a multivariate Markov switching factor model approach», *Journal of Monetary Economics*, 36, 607-630.
- KONTOLEMIS, Z.G. (1997): «Does growth vary over the business cycle? Some evidence from the G7 countries», *Economica*, 64, 441-460.
- KROLZIG, H.-M. (1997): «Markov Switching Vector Autoregressions. Modelling, Statistical Inference and Application to Business Cycle Analysis», Berlin: Springer.
- KROLZIG, H.-M. (2001): «Business cycle measurement in the presence of structural change: international evidence», *International Journal of Forecasting*, 17, 349-368.
- KYDLAND, F.E. y PRESCOTT, E.C. (1990): «Business cycles: real facts and a monetary myth», *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 14, 3-18.
- LAM, P.-S. (1990): «The Hamilton model with a general autoregressive component», *Journal of Econometrics*, 26, 409-432.
- PEÑA, D. y BOX, G.E.P. (1987): «Identifying a simplifying structure in time series», *Journal of the American Statistical Association*, 82, 836-842.
- POTTER, S.M. (1999): «Nonlinear time series modelling: an introduction», *Journal of Economic Surveys*, 13, 505-528.
- RISSMANN, E.R. (1999): «Regional Employment Growth and the Business Cycle», *Economic Perspectives*, Federal Reserve Bank of Chicago, 23, Iss. 4, 21-39.

- SARGENT, T.J. y SIMS, C.A. (1977): «Business cycle modeling without pretending to have too much *a priori* economic theory», en C.A. SIMS (ed.) *New Methods in Business Research*, Minneapolis: Federal Reserve Bank of Minneapolis.
- SICHEL, D.E. (1994): «Inventories and the three phases of the business cycle», *Journal of Business & Economic Statistics*, 12, 269-277.
- SKALIN, J. y TERÄSVIRTA, T. (1999): «Another look at Swedish business cycles 1861-1988», *Journal of Applied Econometrics*, 14, 359-378.
- STOCK, J.H. y WATSON, M.W. (1991): «A probability model of the coincident economic indicators», en K. LAHIRI y G.H. MOORE (eds.) *Leading Economic Indicators: New Approaches and Forecasting Records*, Cambridge: Cambridge University Press, 63-89.
- STOCK, J.H. y WATSON, M.W. (1998): «Diffusion indexes», *Working Paper 6702*, National Bureau of Economic Research.
- STOCK, J.H. y WATSON, M.W. (2002): «Macroeconomic forecasting using diffusion indexes», *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 147-162.
- TERÄSVIRTA, T. y ANDERSON, H. M. (1992): «Characterizing nonlinearities in business cycles using Smooth Transition Autoregressive Models», *Journal of Applied Econometrics*, 7, S119-S136.



## MEASURING BUSINESS CYCLES WITH DYNAMIC FACTOR MODELS AND REGIME SWITCHING

### ABSTRACT

We claim that the empirical analysis of the business cycle should be based on a dynamic factor model with regime switching, following Diebold and Rudebusch's proposal. We emphasize some features of the model to support this assertion: it provides a comprehensive framework that includes both a quantitative composite indicator and a chronology to account for changes in the phases of the cycle; it casts the problem in a multivariate framework, to consider all the available information about the cycle; and it captures nonlinear behavior of the observed time series stemming from cyclical asymmetries. These features are illustrated with an application to the European business cycle.

*Key words:* Business cycle, Factor models, Markov switching, Cyclical asymmetries, Time series

*AMS Classification:* 62H25, 62M05, 62M10, 91B84