ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
Vol. 49, Núm. 166, 2007, págs. 473 a 499

Una revisión de la aplicación de las cadenas de Markov discretas al estudio de la movilidad geográfica(∗)

por
MARÍA HIERRO FRANCO Y MARTA GUIJARRO GARVI
Departamento de Economía. Universidad de Cantabria.

RESUMEN

Tras un recorrido por los antecedentes y fundamentos del empleo de cadenas de Markov al análisis de la movilidad, en este trabajo se profundiza en el contenido de las hipótesis de homogeneidad de la población y homogeneidad temporal de una cadena de Markov discreta, valorándose, primero, su posible inconsistencia en un marco particular de análisis social, como es la movilidad geográfica, y apuntándose y revisándose críticamente, después, las principales soluciones de relajación de estas dos hipótesis contempladas en la literatura.

Palabras clave: cadenas de Markov, homogeneidad de la población, homogeneidad temporal.

Clasificación AMS: 60J10, 60J20.

(∗) Las autoras agradecen al Profesor José Miguel Casas Sánchez sus comentarios en la elaboración del trabajo y a los dos evaluadores anónimos sus sugerencias para mejorar el mismo.

1. INTRODUCCIÓN

La movilidad social es un fenómeno multidisciplinar y de marcadas connotaciones sociológicas, cuyo conocimiento ha creado una enorme expectación en el campo de la investigación desde aproximadamente los años cincuenta; además de constituir un tema sugerente, la movilidad social se ha caracterizado, sobre todo, por abarcar una gran diversidad de comportamientos dinámicos en los que participa un colectivo de individuos.

La labor de búsqueda y mejora de procedimientos de modelización del fenómeno de la movilidad geográfica, inscrita en lo que Sorokin, y más tarde Mayer (1975) y Sorensen (1975), han definido como una movilidad social de tipo intrageneracional y horizontal, ha sido intensa, siendo el *causal* y el *dinámico* los enfoques más generales desde los que se ha producido dicha modelización. Mientras los modelos causales se han ocupado de estudiar los determinantes de la movilidad geográfica, los modelos dinámicos se han centrado en su componente temporal.

Dentro de las alternativas de modelización dinámica de las migraciones se encuentran las cadenas de Markov, metodología que, sin haber alcanzado el nivel divulgativo del discurso causal, ha tocado parcelas muy diversas. A partir del trabajo pionero de Blumen, Kogan y McCarthy (1955), precursores en la aplicación de cadenas de Markov discretas al estudio de la movilidad social, a lo largo de las décadas sesenta, setenta y ochenta se produjeron importantes aportaciones, tanto metodológicas como empíricas, en la utilización de cadenas de Markov a fenómenos muy diversos, entre ellos la movilidad ocupacional (Blumen, Kogan y McCarthy, 1955; Hodge, 1966; Sorensen, 1975; Ginsberg, 1971), los cambios en las preferencias de los consumidores (Telser, 1962; Lipstein, 1965; Kesavan, 1982) y la movilidad geográfica (Goodman, 1962; Rogers, 1966; Brown, 1970; Gale, 1972; Spilerman, 1972b; Rogerson, 1979; Plane y Rogerson, 1984 y 1986). Más recientemente, ha sido destacada la divulgación de cadenas de Markov en estudios sobre la distribución regional de la renta y la pobreza (Quah, 1996; Gardeazabal, 1996; Magrini, 1999; Amplatz, 2003; Domínguez, 2004) y en estudios relacionados con los mercados financieros (Betancourt, 1999; Dezzani, 2002).

La formulación más divulgada de cadenas de Markov discretas es aquella que se apoya sobre tres hipótesis fundamentales: la *dependencia markoviana de orden 1*, la *homogeneidad de la población* y la *homogeneidad temporal*. La dependencia markoviana de orden 1 supone que la posición del sistema en un instante depende solamente de su posición en un instante de tiempo anterior y, además, que el tiempo de ocupación en la localización actual, al igual que cualquier otra variable, posee un efecto nulo en la probabilidad de transición a otro estado. Los llamados *procesos semi-markovianos* son una alternativa de generalización de las cadenas de Markov que permiten flexibilizar la hipótesis anterior, considerando, para ello, que las probabilidades de transición que caracterizan la cadena son función del tiempo de ocupación en el estado de localización(1). En este trabajo analizaremos las dos hipótesis restantes: la homogeneidad de la población y la homogeneidad temporal.

El objetivo de este artículo es realizar una revisión histórica minuciosa de la metodología de cadenas de Markov en el estudio de la movilidad, presentado, en último término, las principales propuestas de mejora de su formulación inicial de cara a su aplicación en contextos sociales.

Tras esta introducción, el resto del trabajo se estructura del siguiente modo. En la segunda sección se revisan los antecedentes y fundamentos en la aplicación de cadenas de Markov al estudio de la movilidad, y en la sección tercera, se analiza el contenido de las hipótesis citadas; este estudio, llevado cabo desde la perspectiva del fenómeno de la migración, se completa con una revisión crítica de las propuestas recogidas en la literatura sobre relajación de las hipótesis de homogeneidad de la población y homogeneidad temporal.

2. ANTECEDENTES Y FUNDAMENTOS EN LA APLICACIÓN DE CADENAS DE MARKOV DISCRETAS AL ESTUDIO DE LA MOVILIDAD

Una cadena de Markov es un tipo de proceso estocástico en el que la sucesión de variables aleatorias que lo definen, unidas mediante la llamada dependencia markoviana, determinan la ubicación de un sistema en el tiempo, teniendo en cuenta su posición previa. De cara a destacar las bondades de este planteamiento frente a los modelos de corte causal en estudios de movilidad, la discusión sobre el grado de definición causal o incluso sobre la existencia o no de definición causal que despliega el fenómeno que se está analizando es un aspecto de suma importancia. A este respecto, el comportamiento de un sistema migratorio es más complejo que el de otros fenómenos demográficos como la natalidad o la mortalidad; a la falta de consenso sobre las variables a las que responden los flujos migratorios, que alcanza, incluso, a variables económicas convencionales (Devillanova y García-Fontes, 2004), se une la fuerte carga subjetiva y personal presente en la estrategia de localización de los emigrantes. Esta situación, sin ser de total indefinición causal, otorga ventaja al análisis mediante cadenas de Markov, pues con su utilización, y en contra de la opinión en algunos sectores (Ginsberg, 1972), no se preten-

(1) Para más detalles sobre los procesos semi-markovianos, pueden consultarse los trabajos de Ginsberg (1971), Howard (1971), Ginsberg (1972), Bartholomew (1973) y Jansen y Manca (2001).

de ignorar por completo los determinantes de la movilidad geográfica, sino de asumir el desconocimiento que invade al investigador en relación a la identificación de las principales causas que subyacen a la dinámica de este fenómeno, haciendo uso, para ello, de una estructura temporal que, en lugar de intentar hacer explícitas dichas causas, las hace implícitas, lo cual no significa en ningún modo ignorarlas. Con respecto a esta última idea, el análisis con esta clase de proceso estocástico no quiere ser, de ninguna manera, reduccionista, sino agregador. Esta ventaja del enfoque mediante cadenas de Markov se magnifica al plantearse cuestiones predictivas, pues, sin necesidad de conocer las causas de la movilidad geográfica, el investigador cuenta con un instrumento valiosísimo con el que predecir, sin por ello renunciar a la consistencia en los resultados, al menos, a corto plazo (Rogerson, 1979; Plane y Rogerson, 1984; Plane y Rogerson, 1994; Betancourt, 1999). De acuerdo con lo anterior, una primera razón que dota de un indudable potencial a las cadenas de Markov es el hecho de poder abordar el análisis dinámico de un sistema complejo, sin tener, para ello, que reparar en su estructura causal.

Otra de las ventajas de este enfoque es su particular planteamiento sistémico (Plane y Rogerson, 1986). Como señala Ginsberg (1972), un correcto estudio de un sistema de flujos migratorios hace imprescindible considerar, no solamente todos esos flujos de manera simultánea, sino también las dependencias que operan entre estos flujos. Este es, justamente, el planteamiento que poseen las cadenas de Markov. El enfoque causal, en cambio, entiende un sistema migratorio como un conjunto de flujos no interrelacionados, por lo que su planteamiento sistémico resulta incompleto. Asimismo, los numerosos aspectos estocásticos que el enfoque proporcionado por las cadenas de Markov contempla(2), su particular descripción de un sistema a través de la construcción que hace posible de medidas de movilidad (Bibby, 1975; Shorrocks, 1978; Sommers y Conlisk, 1978; Bartholomew, 1996; Ezcurra, Pascual y Rapún, 2003; Hierro, 2006) y estabilidad (Lipstein, 1965; Plane y Rogerson, 1986, 1994; Guijarro y Hierro, 2005) y su utilidad como herramienta predictiva, especialmente de corto plazo, la convierten en una valiosa técnica de análisis.

Aunque las bondades enumeradas anteriormente conceden un gran atractivo a las cadenas de Markov como herramienta de análisis de sistemas migratorios, sorprende que, a diferencia de lo sucedido en otros países, especialmente en Estados Unidos, donde la divulgación de esta herramienta ha sido formidable, en España no haya tenido una repercusión comparable. Durante las últimas dos décadas en España, el análisis cuantitativo de las migraciones interiores se ha

(2) Cabe destacar, por ejemplo, los tiempos medios de recurrencia de un estado como una medida de "distancia social" (Beshers y Laumann, 1967) y de "distancia funcional" (Brown y Horton, 1970).

llevado a cabo desde muy distintos puntos de vista y utilizando herramientas diversas, tales como medidas demográficas comunes(3), índices de segregación (Martori, Hoberg y Suriñach, 2004), índices de dispersión o concentración espacial (Pujadas, García y Puga, 1994; Faura y Gómez, 2002; Ródenas y Martí, 2005; Hierro, 2006), modelos de regresión y componentes principales (Antolín y Bover, 1997; Abellán, 1998; De la Fuente, 1999; Juárez, 2000; Ródenas y Martí, 2005; Maza y Villaverde, 2004; Puga, 2004), modelos de elección discreta (Gil y Jimeno, 1993; Gámez y García, 2002), modelos de gravedad (Ródenas, 1994; Devillanova y García, 2004) y la ecuación master (Faura, Gómez y Aranda, 2000). La utilización de modelos markovianos ha sido bastante marginal; tenemos, por ejemplo, a Gómez (1997), Sánchez Fernández (1999) y Guijarro y Hierro (2005).

3. REVISIÓN CRÍTICA DE LAS HIPÓTESIS DE UNA CADENA DE MARKOV DISCRETA

3.1 Sobre la hipótesis de homogeneidad de la población.

En un análisis de movilidad, la hipótesis de homogeneidad de la población hace referencia a la naturaleza de los individuos desde dos puntos de vista distintos: primero, entendiendo que los individuos comparten las mismas preferencias en la elección de una localización de destino –su estrategia residencial es idéntica–, y segundo, considerando que los individuos cambian de localización con la misma frecuencia (Spilerman, 1972a, 1972b; Singer y Spilerman, 1974).

La formulación original de las cadenas de Markov, sin ser explícita en esta cuestión, supone que la población es homogénea desde ambos puntos de vista, al considerar una sola matriz de transición y una sola tasa de movilidad. Sin embargo, esta premisa de homogeneidad de la población que sostienen las cadenas de Markov homogéneas no refleja la realidad. Así, en relación a la primera manera de entender la homogeneidad de la población, la localización actual de los individuos no parece ser el único factor que influye en su localización futura; de hecho, observamos que la probabilidad de emigrar está influida por variables como la edad y el tipo de ocupación. Además, y aun no disponiendo de datos precisos, la observación de la realidad también parece apuntar hacia la inconsistencia de la segunda manera de entender la homogeneidad de la población, la relacionada con la tasa de movilidad. En nuestro entorno, nos encontramos con individuos que no han cambiado nunca de municipio de residencia y con otros que han cambiado de residen-

(3) Una amplia recopilación de estas medidas puede encontrarse en Faura y Gómez (2002).

cia una o, incluso, más veces; tenemos, por tanto, que la frecuencia con la que se producen los desplazamientos varía dentro de una población.

En los análisis de movilidad social llevados a cabo a partir de la construcción de matrices de transición, la fase de estimación del modelo debería estar seguida por una fase de evaluación del mismo. Al igual que con otras técnicas de análisis, la evaluación del modelo es importante porque, además de permitir diagnosticar si el modelo estimado proporciona una descripción precisa de los datos, tiene que ser el paso previo a la realización de posteriores análisis, tales como la elaboración de proyecciones, que asuman que el modelo es verdadero (Bartholomew, 1981).

La consistencia del supuesto de homogeneidad de la población que postula una cadena de Markov está estrechamente relacionada con el grado de ajuste del modelo y, por consiguiente, con la calidad de las proyecciones. Las consecuencias que ocasiona la caracterización de una población heterogénea con la misma cadena de Markov en los procesos de estimación y proyección fueron expuestas, por primera vez, en Blumen, Kogan y McCarthy (1955). A partir de datos de movilidad ocupacional desagregados por edad y sexo para Estados Unidos, estos investigadores encontraron diferencias significativas en la estimación de las probabilidades de transición de la población al distinguir, dentro de ésta, grupos de población diferenciados por edad y sexo. Algunos trabajos posteriores en apreciar este fenómeno fueron los de Tarver y Gurley (1965) y Hodge (1966).

A raíz de esta investigación precursora de Blumen, Kogan y McCarthy (1955), aunque fueron diversos los trabajos que resolvieron la ausencia de homogeneidad de la población en la cadena mediante un simple análisis *separado* de cada grupo de población (Tarver y Gurley, 1965; Hodge, 1966), comenzó a madurar una línea de investigación interesada en la búsqueda de fórmulas de relajación de la hipótesis de homogeneidad de la población, que propició, además, un profundo revisionismo metodológico de las cadenas de Markov clásicas. De esta línea arrancaron, a su vez, dos líneas de investigación paralelas, cada una de ellas centrada en uno de los orígenes de la ausencia de homogeneidad de la población. En la primera de estas líneas, la heterogeneidad se asoció a variables sociales y demográficas que motivaban entre los individuos de una población estrategias de localización diferenciadas y, en consecuencia, probabilidades de transición entre pares de estados dependientes de estas características (McFarland, 1970; Bartholomew, 1973; Spilerman, 1972a; Singer y Spilerman, 1974). En una segunda línea de investigación, el origen de la heterogeneidad de la población se atribuyó a la distinta frecuencia con la que los individuos de la población se desplazaban, es decir, en el hecho de que estos individuos poseían tasas de movilidad distintas (Singer y Spilerman, 1974; Spilerman, 1972b; Ginsberg, 1972, 1971). En las dos secciones siguientes se examina por separado el contenido de ambas corrientes.

3.1.1. Relajación del supuesto de homogeneidad de la población en la matriz de transición

El hilo argumental del conjunto de propuestas que se incluyen en esta línea de investigación sostiene que los individuos de una población no se mueven de la misma manera, en la medida en que existen otras características diferentes a su localización actual que influyen en su probabilidad de moverse a una determinada localización.

Dentro de esta corriente de trabajos se ha puesto especial énfasis en la necesidad de trasladar a una cadena de Markov la presencia de este tipo de heterogeneidad, pues su omisión ocasiona tres problemas serios. En primer lugar, las matrices de transición que se definen no poseen propiamente la naturaleza de matrices de transición (McFarland, 1970); la consideración de esta premisa de homogeneidad en una población para la cual no tiene cabida equivale a admitir que "la proporción de población que realiza una determinada transición es una buena aproximación a que cualquiera de sus individuos la realice" (McFarland, 1970). En segundo lugar, no debe perderse de vista la estrecha relación existente entre esta hipótesis y la de dependencia markoviana de orden uno. En tercer lugar está el llamado *efecto clustering*; Blumen, Kogan y McCarthy (1955), tras comparar el resultado de modelizar la dinámica de toda una población como un solo grupo y considerando su descomposición en distintos grupos de edad y sexo, encontraron que los elementos de la diagonal principal de la matriz de transición para la población en más de un paso quedaban subestimados con respecto a su verdadero valor. Según Blumen, Kogan y McCarthy (1955), el hecho de que esta subestimación recaiga, en particular, sobre los elementos de la diagonal principal no es casual, sino que responde al llamado *Principio de Inercia Acumulativa*, que McGinnis enuncia en el año 1968(4): la población que no se mueve de su estado de origen (*stayers*) es, con el paso del tiempo, más reacia a abandonar su estado de residencia por la resistencia que diversos lazos de naturaleza económica y no-económica provocan en la población. Las cadenas de Markov clásicas, al suponer que la población es homogénea y, por tanto, no analizar el comportamiento de este grupo de población por separado, no llegan a capturar esta circunstancia, proporcionando, como consecuencia de esta omisión, una estimación de los elementos de la diagonal principal de la matriz de transición de la población en más de un paso por debajo de la esperada. De manera adicional, en ausencia de homogeneidad temporal, al efecto *clustering* se añade

(4) Este principio constituye el axioma fundamental del Modelo de Cornell formulado por McGinnis (1968), según el cual, "la probabilidad de permanecer en cualquier estado-región de residencia es una función estrictamente monótona de la duración de la residencia en el estado previo".

el efecto que la ausencia de homogeneidad temporal origina en la diagonal principal de la matriz de transición en más de un paso(5).

Las propuestas de solución a esta clase de heterogeneidad, descritas a continuación, surgen del siguiente razonamiento: si se conoce que una población está compuesta por distintos grupos de población independientes que poseen su propia estrategia residencial y, pese a ello, se mantiene la premisa de que la población es homogénea en la matriz de transición, se está proponiendo la representación de todos esos grupos de población con una misma cadena de Markov cuando, en realidad, cada uno de estos grupos debe ser caracterizado a partir de una cadena de Markov propia.

El modelo de McFarland

La propuesta de relajación de la hipótesis de homogeneidad de la población de McFarland (1970) es, sin duda, la más ambiciosa de todas las encontradas en la literatura. En ella se sugiere la reducción de la escala de observación de la heterogeneidad a las matrices de transición de los individuos, buscando una descripción lo más realista posible de un fenómeno sumamente complejo; se trata, pues, de un enfoque *micro* del fenómeno de la heterogeneidad de la población. Su modelo se sintetiza en un proceso estocástico mixto compuesto por un número de cadenas markovianas independientes equivalente al número de individuos que componen la población. Este análisis de la movilidad desde la perspectiva del individuo permite trasladar a la estimación de las probabilidades de transición de la población, de manera implícita, las variables que influyen en sus preferencias de localización. En consecuencia, uno de los beneficios que se obtienen con este planteamiento es el hecho de que el riesgo de que las probabilidades de transición obtenidas para la población queden convertidas en probabilidades de transición promedio desaparece, además de que no es necesario hacer explícitas las variables que influyen en esta heterogeneidad.

Formalmente, supongamos una población compuesta por *q* individuos. Cada individuo, c, se mueve de manera independiente al resto, de acuerdo con una cadena de Markov discreta, finita y homogénea en el tiempo, $\{X_c(t):\ t = 0, 1, \ldots\}$, donde $X_c(t)$ define la posición del individuo c en el instante de tiempo t, con espacio de estados S, que se compone de *r* estados o localizaciones, y con matriz de transición en un solo paso $P_c = \left(p_{ij,c}:\ i, j \in S\right)$, de dimensión $r \times r$, con r núme-

(5) Hodge (1966), tras relajar el supuesto de homogeneidad temporal, observó que la relajación de este supuesto resultaba insuficiente, sugiriendo que, posiblemente, la razón de que sus estimaciones no resultaran ser tan buenas podía estar en el efecto simultáneo de la heterogeneidad de la población.

ro de estados, y regular(6), donde, para todo $i, j \in S$, $p_{ij,c}$ es la probabilidad de transición entre los estados i y j y entre instantes de tiempo consecutivos.

El proceso agregado $\{Y_t : t = 0, 1, \ldots\}$, con mismo espacio de estados, S, que determina la localización de la población en t, se obtiene según el modelo de McFarland (1970) mediante la mixtura de las q cadenas de Markov independientes, con sus probabilidades de transición organizadas en una *matriz de transición en un solo paso esperada para la población*, $\mathbf{D} = \sum_{c=1}^{q} \mathbf{S}_c \cdot \mathbf{P}_c$, donde $S_c = \mathrm{diag}\left(s_{c_i} : i = 1, \ldots, r\right)$, $c = 1, \ldots, q$, siendo s_{c_i} la proporción de la población que ocupa el estado i en el instante inicial(7), $t = 0$, (8) con matriz de transición individual P_c y $\sum_{c=1}^{q} S_c = I$, matriz identidad(9). Suponiendo que las q cadenas de Markov independientes consideradas inicialmente son homogéneas en el tiempo y regulares, *la matriz de transición en* n *pasos esperada para la población* $(n = 1, 2, \ldots)$ es $D(n) = \sum_{c=1}^{q} S_c \cdot [P_c]^n$ (McFarland, 1970).

Teniendo nuevamente en cuenta que las q cadenas de Markov independientes son regulares y homogéneas en el tiempo, cada una de estas cadenas da lugar a una matriz de equilibrio $\prod_c = (\pi_{i,c} : i \in S)$, a partir de las cuales McFarland (1970) define la *matriz de equilibrio esperada para la población*, como $\prod = \sum_{c=1}^{q} S_c \cdot \prod_c$.

A diferencia de la matriz de equilibrio de una cadena de Markov finita, regular y homogénea en tiempo y población, las filas de esta matriz no son iguales, al depender éstas del vector de estados inicial a través de las ponderaciones contenidas en S_c. El inconveniente más notable que plantea esta propuesta es que una escala de análisis tan pequeña supone, además de una importante inversión en tiempo, la

(6) Una cadena finita y homogénea en el tiempo es regular si es irreducible y aperiódica (Parzen, 1962).

(7) Para cada individuo, se tendrá una matriz diagonal con un único elemento distinto de cero e igual a 1/q en el estado en donde se localiza.

(8) El modelo supone que S_c no depende del tiempo y que, por tanto, la localización de los individuos por estados no varía, lo que resta utilidad al modelo.

(9) La notación que aquí se emplea es una adaptación de la de Singer y Spilerman (1974), pues la utilizada por McFarland (1970) resulta algo confusa.

utilización de muestras reducidas que pueden ocasionar un problema de representatividad y, también, una alta probabilidad de que las matrices de transición no sean regulares, como impone el modelo. En cualquier caso, aunque parece más que cuestionable la reproducción de este modelo en la práctica, este procedimiento brinda la posibilidad de aplicar la idea de mixtura con un enfoque distinto, que es suponiendo la población agrupada en un reducido número de grupos de acuerdo con alguna característica demográfica (edad, nacionalidad, ocupación, sexo), esto es, permite la consideración de un modelo más general. Así, si suponemos que la población se agrupa en g grupos de población homogéneos diferenciados por su estrategia residencial, $1 \leq g \leq q$, y que la posición en el tiempo de cada uno de estos grupos de población está gobernada por una cadena de Markov discreta y finita, $\{X_c(t):\ t = 0, 1, \ldots\}$, con espacio de estados S, con r estados o localizaciones, y matriz de transición $P_c = (p_{ij,c} : i, j \in S)$, $c = 1, \ldots, g$, en presencia de homogeneidad temporal se obtiene una matriz de transición esperada para la pobla

ción en n pasos, $D(n) = \sum_{c=1}^{g} S_c \cdot [P_c]^n$, con $S_c = \mathrm{diag}(s_{i,c} : i \in S)$,

$c = 1, \ldots, g$, matriz diagonal que contiene la proporción de población en cada estado que pertenece al grupo c. Así, si $g = q$, tendríamos la propuesta de McFarland (1970) como caso particular.

A partir del modelo de McFarland (1970), Spilerman (1972a) planteó resolver esta clase de heterogeneidad desde una escala de observación opuesta: la matriz de transición observada de la población como punto de partida y el conjunto de matrices de transición estimadas para distintos grupos que componen esa población como punto de llegada, expresando las probabilidades de transición de la población en relación a un conjunto de factores de cambio estructural y otros de cambio demográfico, mediante un sencillo modelo de regresión lineal. Entre los inconvenientes de esta propuesta, sin embargo, se encuentra la ausencia de restricciones en la regresión sobre la naturaleza estocástica de las matrices de transición y, según se ha señalado anteriormente, la dificultad para dar de manera satisfactoria con todas las variables que recogen lo que Spilerman llama “cambio estructural” y “cambio demográfico”.

El modelo Mover-Stayer en tiempo discreto de Blumen, Kogan y McCarthy

El modelo siguiente, a pesar de constituir un caso particular del modelo de McFarland (1970), ha sido considerado la piedra angular de todos los estudios dedicados a la relajación del supuesto markoviano de homogeneidad de la población y, de hecho, es el modelo que mayor alcance ha tenido en este campo. Seguramente, el motivo de la gran difusión adquirida por esta propuesta sea que sus artífices, Blumen, Kogan y McCarthy (1955), encontraron explicación a las estimaciones sesgadas ofrecidas por una cadena de Markov convencional de los elementos de la diagonal principal de una matriz de transición estimada para una población en más de un paso: las cadenas de markov homogéneas en población conceden idéntico trato a dos grupos de población sumamente heterogéneos, *stayers* y *movers*.

Este modelo, denominado modelo *Mover-Stayer* en tiempo discreto, parte de dos supuestos. Primero, dado un espacio de estados S, en cada estado de residencia, i, la población se descompone en dos grupos de individuos: los *stayers*, en proporción α_i, son el grupo de la población que permanece indefinidamente en su estado de origen, i; los *movers*, en proporción $1-\alpha_i$, son el grupo de la población que abandona su estado de residencia inicial, i. Según el segundo supuesto, la posición de los *movers* en cada instante de tiempo t está gobernada por una cadena de Markov discreta y homogénea en el tiempo, $\{X(t): t=0,1,\ldots\}$, con espacio de estados S y matriz de transición en un solo paso $M=\left(m_{ij}: i,j\in S\right)$, donde $X(t)$ determina el estado que ocupa un *mover* en el instante t.

De acuerdo con los dos supuestos señalados, el modelo *Mover-Stayer* en tiempo discreto se concreta en la mixtura de dos cadenas de Markov independientes: la primera es una cadena degenerada con matriz de transición la matriz identidad, I, de dimensión $r\times r$, y la segunda es una cadena de Markov discreta homogénea en el tiempo, con matriz de transición $M=\left(m_{ij}: i,j\in S\right)$. El proceso agregado, $\{Y(t): t=0,1,\ldots\}$, que determina la posición de toda la población en cada instante de tiempo t, queda gobernado por una matriz de transición esperada para la población en un solo paso $P=\left(p_{ij}: i,j\in S\right)$, que se obtiene de forma análoga que en el modelo de McFarland (1970), esto es, $P=\alpha+(I-\alpha)\cdot M$, donde $\alpha=\operatorname{diag}\left(\alpha_i: i\in S\right)$. Como puede apreciarse, aunque este supuesto equivale a la descomposición de la población en un grupo de individuos con tasa de movilidad nula y otro grupo con una tasa de movilidad idéntica y positiva, estas dos tasas no desempeñan papel alguno en el desarrollo matemático del modelo, sino que la base de su construcción reside en las matrices de transición de estos dos grupos.

Teniendo en cuenta que la cadena de Markov que caracteriza al grupo de población *mover* es homogénea en el tiempo, la matriz de transición en n pasos esperada para la población se corresponde con la expresión $P(n)=\alpha+(I-\alpha)\cdot M^n$.

La cuestión más debatida del modelo *Mover-Stayer* tiene que ver con la estimación de la proporción de *stayers* correspondiente a cada localización, pues, tal y como Blumen, Kogan y McCarthy (1955) definen a los *stayers* –población que nunca se mueve–, estas proporciones no son directamente observables; el investigador conoce, a lo sumo, la proporción de individuos que no se mueven a lo largo de un periodo de observación dado, pero desconoce qué fracción de ellos se mueve en adelante. Su propuesta de estimación es una *estimación asintótica de la* *proporción de stayers*, justificada por el hecho de que la proporción de *stayers* en cada localización, aunque es una función monótonamente decreciente del tiempo(10), resulta constante a partir de que el sistema alcanza el estado de equilibrio. Su propuesta fue seriamente criticada en trabajos posteriores, arrancando de Goodman (1962) la desaprobación de su procedimiento de estimación de la matriz de parámetros α por razones de inconsistencia, relacionadas con la premisa impuesta por estos investigadores para llegar a esa estimación de que el periodo de observación podía considerarse lo suficientemente largo para que las matrices M y α se estabilizaran al cabo de él. A raíz de esta valoración, Goodman (1962) y Frydman (1984) respondieron a este problema de inconsistencia con sendas alternativas de estimación. Por un lado, Goodman (1962) sugirió prescindir de la hipótesis de que el periodo de observación debía ser lo suficientemente largo y aproximar la proporción de *stayers* con la proporción observada de individuos que permanecen en su estado de localización inicial durante el periodo de observación. Posteriormente, Frydman (1984) llegó a un estimador más general de la matriz de parámetros α mediante máxima-verosimilitud(11).

Una cuestión estrechamente relacionada con el modelo *Mover-Stayer* es el efecto *clustering*, efecto objeto de análisis, además de por Blumen, Kogan y McCarthy (1955), por investigaciones posteriores como las de McFarland (1970), Spilerman (1972a, 1972b), Bartholomew (1973), Singer y Spilerman (1974, 1976) y Singer y Spilerman (1976) ponen de relieve que este efecto no sólo se manifiesta de la manera ya indicada –por la ausencia de distinción entre población *stayer* y *mover*–, sino también por la ausencia de otras características que también influyen en la estrategia de localización de la población –edad, ocupación, etc.–, así como por la presencia de inercia positiva en el modelo, tal y como explica McGinnis (1968).

La clase de modelos para los cuales la constatación empírica del efecto *clustering* ha sido mayor es el modelo *Mover-Stayer*. Un primer procedimiento de evaluación del efecto *clustering* se ha realizado comparando elemento a elemento la diagonal principal de la matriz de transición esperada para la población en un determinado número de pasos obtenida según el procedimiento del modelo *Mover-Stayer* y la obtenida según el procedimiento markoviano; es el caso de Blumen,

(10) Esto es debido a que una parte de la población que no se mueve a lo largo del periodo de observación lo hace en periodos siguientes a éste.

(11) Frydman (1984) demuestra que, cuando el periodo de observación es de longitud infinita, su estimador máximo-verosímil de la proporción de *stayers* coincide con el estimador de la proporción de *stayers* propuesto por Goodman (1961), pues, en tal caso, la proporción de *stayers* coincide con la proporción de población que no se mueve durante el periodo de observación.

Kogan y McCarthy (1955). Una segunda manera de llevar a cabo la evaluación de este efecto, sugerida en Singer y Spilerman (1976), ha consistido en comparar directamente la traza de las dos matrices señaladas, lo que se ha denominado evaluación del efecto *clustering* en sentido débil. Por analogía, el primer procedimiento de evaluación, el utilizado por Blumen, Kogan y McCarthy (1955), podríamos denominarlo *clustering* en sentido fuerte.

3.1.2. Relajación de la hipótesis de homogeneidad de la población en la tasa de movilidad: Generalización del modelo de puntos de decisión homogéneo en población y en el tiempo

Un segundo grupo de propuestas atribuye el origen de la ausencia de homogeneidad de la población a la distinta frecuencia con la que sus individuos cambian de localización. Para ello, se considera que el número de transiciones realizadas es aleatorio y que la heterogeneidad entre los individuos de una población responde al hecho de que su número esperado de transiciones –su tasa de movilidad– no es idéntico.

Esta interpretación, complementaria del origen de la ausencia de homogeneidad de la población, se inicia en Blumen, Kogan y McCarthy (1955), siendo la base de su planteamiento la identificación de una cadena de Markov homogénea en la población y en el tiempo con lo que Mayer (1975), más tarde, define como un *modelo de puntos de decisión homogéneo en la población y en el tiempo*. Según este modelo, una cadena de Markov homogénea puede concebirse como una estructura formada por dos componentes: la primera componente es una matriz de transición constante, denotada comúnmente en la literatura como M, que gobierna las transiciones entre estados en los denominados “puntos de decisión” o instantes de tiempo en los que se produce una transición (Mayer, 1975), mientras que, para el resto de instantes, la matriz M no desempeña papel alguno, motivo, por el cual, parece apropiado denominar a esta matriz como *matriz de transición de puntos de decisión*; la segunda componente se trata de un proceso de Poisson de parámetro λ, que contabiliza el número de desplazamientos ocurridos en los puntos de decisión, siendo λ el número esperado de desplazamientos o *tasa de movilidad*.

Partiendo de los resultados de Blumen, Kogan y McCarthy (1955), se demuestra la equivalencia que existe entre un modelo de puntos de decisión homogéneo en la población y en el tiempo y una cadena de Markov finita, discreta y homogénea(12).

(12) La definición de este mismo modelo en tiempo continuo puede consultarse en Blumen, Kogan y McCarthy (1955), Spilerman (1972b), Bartholomew (1973), Mayer (1975) y Bartholomew (1981).

Considerando esta interpretación de una cadena de Markov homogénea desde la perspectiva de la contabilización de transiciones, Blumen, Kogan y McKarthy (1955), Spilerman (1972b), Bartholomew (1973), Singer y Spilerman (1974) y Mayer (1975) manifiestan la necesidad de generalizar el modelo de puntos de decisión homogéneo de modo que tenga cabida una situación, en la cual el número esperado de transiciones pueda ser distinto entre los individuos de la población; esta propuesta es conocida como *Generalización del modelo Mover-Stayer*. Sin embargo, parece más apropiada la denominación *Generalización del modelo de puntos de decisión homogéneo en población y en el tiempo*, pues por generalización del modelo *Mover-Stayer* podría entenderse, también, el modelo de McFarland, esto es, por la vía de incorporar uno o más factores que, además del hecho de moverse o no, reflejen preferencias de localización distintas entre los individuos (edad, ocupación, nacionalidad, etc.). El primer apunte matemático de esta propuesta se plantea en Blumen, Kogan y McCarthy (1955), hasta que Spilerman (1972b) decide retomar esta línea de investigación, desarrollarla teóricamente y aplicar, asimismo, sus resultados a datos de una encuesta. Siguiendo los trabajos de Blumen, Kogan y McCarthy (1955) y Spilerman (1972b), la generalización del modelo de puntos de decisión homogéneo en la población y en el tiempo se define a partir de una población compuesta por q clases de población homogéneas en su tasa de movilidad, $\lambda_c > 0$, en proporciones β_c, $c = 1, \dots, q$, todas ellas con matriz de transición de puntos de decisión constante, M. Así, dados q procesos de Poisson de parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, respectivamente, que contabilizan el número de desplazamientos de cada grupo de población homogéneo, si la probabilidad de que un individuo –cualquiera que sea su tasa de movilidad– se desplace un número de veces u al cabo de un instante de tiempo es

$r_u = \text{Prob}\left[U = u\right] = \sum_{c=1}^{q} \beta_c \cdot \frac{(\lambda_c)^u}{u!} \cdot \exp(-\lambda_c)$, $(u = 0, 1, \dots)$, entonces, $P = \sum_{u=0}^{\infty} r_u \cdot M^u$

es la matriz de transición en un solo paso, siendo

$P(n) = \sum_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{c=1}^{q} \beta_c \cdot \frac{(n \cdot \lambda_c)^u}{u!} \cdot \exp(-n \cdot \lambda_c) \right) \cdot M^u$ la matriz de transición en n pasos.

Obsérvese que dichos procesos de Poisson, al ser idénticos para todas las localizaciones, no incorporan el efecto de la localización geográfica, de modo que las diferencias regionales en movilidad se consideran despreciables. De manera adicional, Spilerman (1972b) generaliza la definición anterior, suponiendo, para ello, un número continuo de grupos de población y que la tasa de movilidad se distribuye según una gamma, por la generalidad funcional de esta distribución de probabilidad y su naturaleza unimodal.

3.2 Sobre la hipótesis de homogeneidad temporal

El supuesto de homogeneidad temporal es, de los tres supuestos enumerados, el que mayor eco ha tenido en trabajos y manuales sobre cadenas de Markov(13).

En un sistema de migraciones, este supuesto equivale a asumir que la las reglas que rigen la estrategia residencial de los individuos son siempre las mismas. Para Plane y Rogerson (1994), la extendida utilización de esta hipótesis ha podido estar justificada por el estudio de sistemas poco propensos a experimentar cambios substanciales, o bien, de sistemas en los que existe una elevada incertidumbre sobre la dirección de sus cambios en el futuro. Este primer criterio para dar por válida la presencia de homogeneidad temporal en una cadena no parece estar fundado para nuestro contexto de análisis, porque los movimientos migratorios constituyen un fenómeno de gran complejidad que evoluciona rápidamente al compás de factores y coyunturas muy diversas. En cambio, el segundo criterio es, en correspondencia con lo que se acaba de comentar, aceptable, pues nos invade la ignorancia sobre la ley de probabilidad que gobernará un sistema migratorio en el futuro, sobre todo a medio y largo plazo.

Al igual que cualquier hipótesis, la de probabilidades de transición constantes no debería quedar convertida en un hecho sometido a apreciaciones personales, como las anteriores, sino que debería ser una hipótesis objeto de contraste desde el mismo comienzo de la investigación, lo cual hace imprescindible contemplar la aplicación de algún test de hipótesis de probabilidades de transición constantes, como el de Anderson y Goodman (1957)(14), que es el más extendido en la literatura, u otros similares, como el recogido en Tan y Yilmaz (2002). En cualquier caso, pese a la existencia de esta clase de contrastes, ha sido bastante frecuente la falta de este tipo de análisis estadístico previo. Si bien, hay que precisar que muchos de estos trabajos, al tener como objetivo el estudio de la convergencia, se han visto obligados a convertir la hipótesis de homogeneidad temporal en afirmación forzosa –llegándose a verificar o no–, pues esta condición es la garantía de que una cadena discreta, finita y regular posea distribución de equilibrio. Paralelamente, el criterio de otras investigaciones ha sido el trabajar con la hipótesis de homogenei-

(13) En estrecha relación con el supuesto de homogeneidad temporal, una interesante reflexión sobre los conceptos de *ergodicidad en sentido fuerte* y *ergodicidad en sentido débil* puede encontrarse en Hajnal (1956).

(14) La aplicación de este contraste de hipótesis puede verse en Kesavan (1982), Betancourt (1999) y Hierro (2006a).

dad temporal por la simple razón de que, de esta forma, la obtención de proyecciones es inmediata, criterio que comparten Tarver y Gurley (1965) y Pfeifer y Carraway (2000). La diferencia entre estos trabajos y aquellos que utilizan cadenas de Markov para el estudio de la convergencia es que la hipótesis de homogeneidad temporal no constituye una condición necesaria para el objetivo que se persigue. Esta última forma de enfocar la utilización de una cadena de Markov sin verificar, primero, la hipótesis de homogeneidad temporal y plantear, si fuera necesario, otra técnica de proyección adecuada, supone hacer un uso deliberado de una premisa básica como ésta y exponerse al riesgo de obtener un pronóstico incierto; en esta situación, y de la misma manera que sucede con el resto de supuestos de una cadena de Markov, el coste de oportunidad de valorar la hipótesis de homogeneidad temporal como cierta en una situación en la cual tal hipótesis no se verifica, es la renuncia a una mayor calidad en las proyecciones que deriven.

3.2.1. Estrategias de estimación de probabilidades de transición dependientes y no dependientes del tiempo

Cuando se dispone de una secuencia temporal de matrices de transición, el estudio de la dinámica de un sistema y la elaboración de proyecciones pueden enfocarse de dos maneras. Una primera posibilidad es adoptar un planteamiento estático, caracterizando toda esa secuencia histórica de matrices de transición a partir de una matriz de transición constante, planteamiento denominado por Gale (1972) como *local stationarity*. Una segunda posibilidad es inclinarse por un planteamiento dinámico, buscando un patrón de estimación que proporcione probabilidades de transición dependientes del tiempo, siendo las predicciones de la prolongación de este patrón dinámico en instantes de tiempo futuros. Teniendo en cuenta este doble enfoque, las técnicas de estimación de probabilidades de transición de una cadena de Markov pueden clasificarse, con carácter general, en *estáticas* y *dinámicas*.

Técnicas de estimación estáticas

Bajo la hipótesis de homogeneidad temporal, tres son las técnicas más conocidas de estimación de las probabilidades de transición de una cadena de Markov discreta: el *procedimiento markoviano*, el *método de matriz homogénea* (Anderson y Goodman, 1957) y el *método de matriz promedio* (Collins, 1972). Estos tres métodos obtienen una matriz de transición estimada de la matriz de transición teórica que caracteriza la cadena, y, además, por ser esta matriz constante, también proporcionan una proyección de la matriz de transición para instantes de tiempo consecutivos.

Dada una secuencia temporal de matrices de flujos migratorios, $\{N(t, t+1) : t = 0, 1, \dots, k-1\}$, donde k es la etapa más reciente de la que hay observaciones, con elemento genérico $N(t, t+1) = \left(n_{ij}(t, t+1) : i, j \in S\right)$, donde $n_{ij}(t, t+1)$ es el flujo migratorio entre las localizaciones i y j entre t y t+1, el procedimiento markoviano consiste en tomar la matriz de flujos más reciente y obtener la correspondiente matriz de transición por máxima verosimilitud, con elemento genérico $\hat{p}_{ij} = n_{ij}(k-1, k) / n_{i.}(k-1, k)$, para todo $i, j \in S$, con $n_{i.}(k-1, k) = \sum_{j=1}^{r} n_{ij}(k-1, k)$. Esta matriz, además de ser la estimación de la matriz de transición teórica de la cadena, sirve de proyección de la matriz de transición en instantes de tiempo siguientes. En realidad, este procedimiento no persigue caracterizar la dinámica de la cadena, sino, más bien, realizar proyecciones bajo el supuesto de que la información más reciente es la más adecuada para predecir (Faura y Gómez, 2001) y de que, además, no se van a producir en el futuro variaciones en estas probabilidades de transición.

Mediante el método de matriz homogénea, se obtiene una única matriz de transición estimada, $\hat{P}$, cuyo elemento genérico, $\hat{p}_{ij} = \sum_{t=0}^{k-1} n_{ij}(t, t+1) \Big/ \sum_{t=0}^{k-1} n_{i.}(t, t+1)$, $(i, j \in S)$, es la estimación máximo-verosímil de las probabilidades de transición correspondientes al periodo de observación considerado.

Como puede apreciarse, la estimación anterior es el resultado de considerar globalmente los flujos migratorios entre cada par de estados que tienen lugar a lo largo del periodo de observación, con lo cual, se corre el riesgo de no reflejar la posible existencia de cambios imprevistos, rupturas o probabilidades de transición anómalas. En este sentido, cuanto más amplio sea el periodo de observación y más compleja su dinámica, menor será la capacidad de esta técnica para interpretar lo sucedido en el sistema que se analiza.

El tercer método, el método de matriz promedio, comparte con los procedimientos anteriores el hecho de proporcionar una única estimación de cada probabilidad de transición entre instantes de tiempo consecutivos. Dada una secuencia temporal de matrices de flujos migratorios, para cada par de estados, la estimación de la correspondiente probabilidad de transición homogénea es la media aritmética de los flujos migratorios entre los distintos instantes de tiempo consecutivos que abarca el periodo de observación, expresados en relación al total de salidas desde cada localización de procedencia. Esto es, $\hat{p}_{ij} = \left(\sum_{t=0}^{k-1} n_{ij}(t, t+1) / n_{i.}(t, t+1) \right) \Big/ k$, para todo $i, j \in S$.

Este procedimiento tiene el inconveniente de que, al apoyar sus estimaciones en un promedio que, además, abarca todo el periodo de observación, resulta ser inapropiado en sistemas que experimentan variaciones bruscas.

Cualquiera de los tres métodos de estimación anteriores es perfectamente válido en una situación caracterizada por probabilidades de transición constantes. Sin embargo, a la hora de modelizar un fenómeno como el migratorio, uno se cuestiona el sentido de esta hipótesis; fundamentalmente, porque las pautas seguidas por la movilidad de una población reciben la constante influencia de factores muy numerosos y diversos, que ni tan siquiera conocemos en profundidad. Si aplicamos, por tanto, las técnicas descritas hasta ahora al contexto que nos ocupa, correremos el riesgo de no modelizar la realidad. La manera de resolver esta situación es dando una alternativa de estimación *dinámica* que permita obtener probabilidades de transición dependientes del tiempo.

Técnicas de estimación dinámicas

En caso de que el resultado de los procedimientos de contraste confirmara la ausencia de homogeneidad temporal en la cadena, sería necesario, entonces, buscar la manera de caracterizar la dinámica de la cadena con alguna técnica de estimación de probabilidades de transición alternativa a las habituales de tipo *estático*: nos referimos a técnicas de tipo *dinámico*, que expresen las probabilidades de transición de la cadena en función del tiempo(15). El estudio de esquemas de estimación y proyección de probabilidades de transición dependientes del tiempo es una línea de investigación que no ha recibido la atención y profundidad que se merece, al quedar eclipsada por los procedimientos de estimación estáticos (Faura y Gómez, 2001). Es por ello que esta línea de trabajo debería seguir siendo desarrollada, pues sería importante disponer de procedimientos con los cuales caracterizar la dinámica de sistemas en los que quedara contrastada la ausencia de homogeneidad temporal.

Gale (1972) y Rogerson (1979) clasifican estas técnicas de estimación dinámicas en *funcionales* y *diferenciales*. Las estrategias de naturaleza funcional estiman las probabilidades de transición de una cadena de Markov a partir de una selección

(15) La utilización de procedimientos de estimación dinámicos tienen la ventaja de que permiten capturar cambios que afectan a las probabilidades de transición, tales como los cambios de coyuntura económica.

de variables explicativas y considerando, a su vez, que éstas varían en el tiempo. Dentro de esta corriente se ubica el *modelo de ponderación de la población en el destino* (*DPW*), desarrollado por Plane (1982), ampliado por Rogerson (1981) y, más tarde, generalizado por Isserman et al. (1985) mediante el *modelo generalizado de ponderación en el destino* (*GDW*)(16).

Las estrategias de naturaleza diferencial, por su parte, en lugar de prestar atención a la componente causal, enfocan la ausencia de homogeneidad temporal como una cuestión puramente dinámica; esta línea de propuestas es plenamente coherente con la idea introducida anteriormente de la necesidad de reflejar en el modelo teórico el desconocimiento sobre la estructura causal que determina los movimientos migratorios y la importancia de la componente tiempo en la evolución de la estrategia residencial. Se conocen diversas técnicas de este tipo. Plane y Rogerson (1984) señalan, entre ellas, la *técnica de tendencia lineal constante*, la *técnica de ratio de probabilidades constante* y el *método de matrices causativas constantes*. La estimación de las probabilidades de transición de una cadena de Markov discreta que proporciona cada uno de estos procedimientos es, para $i, j \in S$

y $t = 0, 1, \ldots,\ \hat{p}_{ij}(t, t+1) = \hat{a}_{ij} + \hat{b}_{ij} \cdot t,\ \hat{p}_{ij}(t, t+1) = \hat{k}_{ij} \cdot \hat{p}_{ij}(t-1, t)$

y $\hat{p}_{ij}(t, t+1) = \sum_{k \in S} \hat{p}_{ik}(t-1, t) \cdot \hat{c}^{D}_{kj} = \sum_{k \in S} \hat{c}^{I}_{ik} \cdot \hat{p}_{kj}(t-1, t)$, respectivamente(17).

El método de tendencia lineal constante considera que las probabilidades de transición entre pares de localizaciones, i y j, son una función lineal del tiempo, mientras que el método de ratio de probabilidades constante supone que esta probabilidad de transición es el resultado de multiplicar la del periodo inmediatamente anterior por una constante Por su parte, el método de matrices causativas constantes estima la probabilidad de transición entre pares de localizaciones, i y j, de dos formas equivalentes. La primera, mediante la combinación lineal de las probabilidades de transición en el instante inmediatamente anterior desde una localización de origen, i, hacia otra localización de destino, j, así como hacia cualquiera de las localizaciones competitivas de esta última, k, recogiendo los pesos de la combinación lineal, $\hat{c}^{D}_{kj}$, la influencia que han ejercido las distintas localizaciones

(16) Para una revisión bibliográfica de esta línea de trabajos, véase Faura y Gómez (2001).

(17) $\hat{a}_{ij}$ y $\hat{b}_{ij}$ son los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados. Por otro lado, el procedimiento habitual de estimación de probabilidades de transición es el de máxima-verosimilitud. Para el caso del método de matrices causativas, una vez estimadas las probabilidades de transición, se obtiene la estimación de los elementos de las matrices causativas por la derecha y por la izquierda.

competitivas de destino en el cambio que ha sufrido la probabilidad de transición que está siendo estimada respecto al instante inmediatamente anterior; la combinación lineal queda determinada por los elementos de la denominada *matriz causativa constante por la derecha*, $C^D = \left(c_{ij}^D : i, j \in S\right)$. La segunda forma de estimar las probabilidades de transición se realiza mediante la combinación lineal de las probabilidades de transición hacia una localización de destino, j, en el instante de tiempo inmediatamente anterior desde una región de origen, i, así como desde cualquiera de las localizaciones competitivas de esta última, k, recogiendo los pesos de la combinación lineal, $\hat{c}_{ik}^I$, la influencia que han tenido las distintas localizaciones competitivas de origen en el cambio que ha sufrido la probabilidad de transición que está siendo estimada respecto al instante inmediatamente anterior; la combinación lineal utilizada en este caso viene definida por los elementos de la *matriz causativa constante por la izquierda*, $C^I = \left(c_{ij}^I : i, j \in S\right)$.

Frente a la hipótesis de ratio de probabilidades constante, de la que no se conoce aplicación(18), la hipótesis de tendencia lineal constante ha dado resultados satisfactorios en Rogerson (1979) y Gómez (1997)(19). En cualquier caso, el método de matrices causativas constantes de Lispstein (1965) ha sido el que ha alcanzado una mayor difusión (Harary, Norman y Cartwright, 1965; Pullman y Styan, 1973; Dent, 1973; Rogerson, 1979; Plane y Rogerson, 1984, 1986, 1994), debido al importante avance que supone este método respecto a los anteriores(20). En primer lugar, se trata de un modelo de competencia en origen y destino, que incorpora en la estimación de las probabilidades de transición entre pares de estados o localizaciones la influencia ejercida por las restantes localizaciones competitivas. En segundo lugar, esta técnica ofrece una amplia información sobre la dinámica de un sistema, como, por ejemplo, el grado de estabilidad del sistema y la categoriza-

(18) En relación al procedimiento de ratio de probabilidades constante, Plane y Rogerson (1984) apuntan que, pese a poder resultar adecuado en sistemas que tienden a experimentar cambios bruscos, este método puede ser limitado, de igual manera que los otros dos procedimientos, a la hora de ofrecer proyecciones de largo plazo, pues éstas pueden quedar fuera del intervalo (0,1), y, fundamentalmente, porque atribuye la variación en la probabilidad de desplazarse de una región a otra región única y exclusivamente a ambas regiones, ignorándose, por completo, la influencia del resto de regiones en ese cambio.

(19) Rogerson (1979) demuestra como propiedad destacable de este procedimiento que todas las matrices de transición estimadas poseen filas cuya suma es igual a 1. En cualquier caso, la presencia de *turnarounds* o cambios apreciables de estrategia migratoria puede que requiriera una relación funcional no lineal para las probabilidades de transición. Asimismo, este método de estimación está expuesto al riesgo de ofrecer proyecciones de largo plazo de las probabilidades de transición cuyo valor caiga fuera del intervalo (0,1).

(20) Rogerson (1979) y Plane y Rogerson (1984) reparan, sin embargo, en que el método de matrices causativas constantes posee algunos inconvenientes como, por ejemplo, que no captura cambios no lineales y que comparte con el resto de métodos que sus proyecciones de largo plazo pueden quedar fuera del intervalo (0,1) (Plane y Rogerson, 1984).

ción de los estados según el grado de movilidad de la población que se encuentra en ellos. Tercero, tiene una gran capacidad para capturar cambios rápidos y sin continuidad a medio y largo plazo. Por último, consideramos que otro de sus potenciales es que sienta las bases hacia la elaboración de un modelo más general que incorpore la relajación de otras hipótesis, lo que actualmente deja abierta una amplia línea de investigación.

Guijarro y Hierro (2005) dan muestra de la aplicación del método de matrices causativas en el estudio de la dinámica de las migraciones interregionales en España para 1986-2001, relajando, además, la hipótesis de homogeneidad de la población. Los datos utilizados corresponden a las matrices de flujos migratorios para cada uno de esos años, que se recogen en la *Estadística de Variaciones Residenciales* (INE). Como estados, se seleccionan las 17 regiones españolas, y se delimitan cuatro periodos de tiempo cuatrienales, 1986-1989, 1990-1993, 1994-1997 y 1998-2001, con el fin de evaluar si las pautas de comportamiento migratorio se ven afectadas por cambios de ciclo económico. Con los datos anteriores, se estiman por máxima verosimilitud cuatro matrices de transición, a partir de las cuales, se obtiene la estimación de seis matrices causativas (tres por la derecha y tres por la izquierda). El estudio de los autovalores de las matrices causativas, de los elementos de las matrices de adjuntos asociadas a las matrices de transición y de los elementos de las matrices causativas, procedimiento que se detalla en el trabajo, permite extraer diversas conclusiones. Entre ellas se señalan, en primer lugar, la inestabilidad que padece el sistema migratorio en esos periodos; en segundo lugar que, teniendo en cuenta la distribución interna de las migraciones interiores, Castilla-La Mancha y Extremadura son las CC.AA. con menos poder de expulsión de población y Cataluña la de menor poder emisor; y, en tercer lugar, la influencia del ciclo económico en la dinámica de las migraciones y, en concreto, que la llegada de un periodo de recuperación económica parece desalentar a los emigrantes procedentes de las tradicionales regiones emisoras a abandonar su territorio hacia otras regiones.

REFERENCIAS

ABELLÁN, C. (1998): «La ganancia salarial esperada como determinante de la decisión individual de emigrar», *Investigaciones Económicas* XXII, 1, 93-117.

AMPLATZ, C. (2003): «The Economic Convergence Performance of Central and Eastern European Countries», *Economics of Planning* 36, 273-295.

ANDERSON, T.W. Y GOODMAN, L.A. (1957): «Statistical Inference about Markov Chains», *Annals of Mathematical Statistics* 28, 89-109.

ANTOLÍN, P. Y BOVER, O. (1997):«Regional Migration in Spain: The Effect of Personal Characteristics and of Unemployment, Wage and House Price Differentials using Pooled Cross-Sections», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 59, 215-235.

BARTHOLOMEW, D.J. (1973): *Stochastic Models for Social Processes*. John Wiley and Sons: Londres.

(1981): *Mathematical Methods in Social Science*. John Wiley and Sons: Londres.

(1996): The Statistical Approach to Social Measurement. Academic Press: Londres.

BESHERS, J.M. Y LAUMANN, E.O. (1967): «Social Distance: A Network Approach»; *American Sociological Review* 32, 225-236.

BETANCOURT, L. (1999): «Using Markov Chains to Estimate Losses from a Porfolio of Mortgages», *Review of Quantitive Finance Accounting* 12 (3), 303-317.

BIBBY, J. (1975): «Methods of Measuring Mobility», *Quality and Quantity* 9, 107-136.

BLUMEN, I., KOGAN, M. Y MCCARTHY, P.J. (1955): «The Industrial Mobility of Labour as a Probability Process». *Cornell Studies of Industrial and Labour Relations,* Vol. VI. Cornell University: Itaca.

BROWN, L.A. (1970): «On the Use of Markov Chains in Movement Research», *Economic Geography* 46, 393-403.

BROWN, L.A. Y HORTON, F.E. (1970): «Functional Distance: An Operational Approach», *Geographical Analysis* 2, 76-83.

DE LA FUENTE, A. (1999): «La dinámica territorial de la población española: un panorama y algunos resultados provisionales», *Revista de Economía Aplicada* 20, 53-108.

DENT, W. (1973): «A Note of Lipstein's Model of Consumer Behavior», *Journal of Operations Research Society of America* 21, 650-652.

DEVILLANOVA, C. Y GARCÍA-FONTES, W. (2004): «Migration across Spanish provinces: evidence from de Social Security records (1978-1992)», *Investigaciones Económicas* 28, 461-487.

DEZZANI, R.J. (2002): «Measuring Transition and Mobility in the Hierarchical Word-Economy», *Journal of Regional Science* 42 (3), 595-626.

DOMÍNGUEZ, J. (2004): «Análisis dinámico de la pobreza y la estructura de los hogares». Tesis doctoral, Granada.

EZCURRA, R., PASCUAL, P. Y RAPÚN, M. (2003): «Movilidad y desigualdad regional en la Unión Europea» *Investigaciones Regionales*, 2, 5-30.

FAURA, U.; GÓMEZ, J. Y ARANDA, J. (2000): «Estudio de la migración interregional en España, a través de la Ecuación Master» *Estudios de Economía Aplicada* 16, 63-92.

FAURA, U. Y GÓMEZ, J. (2001): «Modelos migratorios: una revisión» *Revista Asturiana de Economía* 21, 209-235.

(2002):«¿Cómo medir los flujos migratorios?», *Revista de Sociología*, 66, 15-44.

FRYDMAN, H. (1984): «Maximum Likelihood Estimation in the Mover-Stayer Model», *Journal of the American Statistical Association* 79 (387), 632-638.

GALE, S. (1972): Stochastic Stationary and the Analysis of Geographical Mobility. Toronto Press: Montreal.

GÁMEZ, C. Y GARCÍA, J.I. (2003): «Flujos migratorios de trabajadores andaluces (1979-1997): un análisis económico con datos individuales», *Investigaciones Regionales* 2, 59-83.

GARDEAZABAL, J. (1996): «Provincial Income Distribution Dynamics: Spain 1967-1991», *Investigaciones Económicas* 20 (2), 263-269.

GIL, L.A. Y JIMENO, J.F. (1993): «The Determinants of Labour Mobility in Spain: Who are the Migrants?», *Documento de Trabajo* 93-05, Fedea.

GINSBERG, R. (1971):«Semi-Markov Processes and Mobility», *Journal of Mathematical Sociology* 1, 233-262.

(1972): «Critique of Probabilistic Models: Application of the Semi-Markov Model to Migration» *Journal of Mathematical Sociology* 2, 63-82.

GÓMEZ, J.M. (1997): «Movimientos migratorios intermunicipales en la Comunidad Autónoma de Murcia: Un enfoque markoviano», *Cuadernos de Economía Murciana*, 12.

GOODMAN, L.A. (1962): «Statistical Methods for Analysing Processes of Change», *American Journal of Sociology* 68, 57-78.

GUIJARRO, M. Y HIERRO, M. (2005): «Un análisis de la dinámica de los movimientos migratorios interregionales en España (1986-2001). Una aplicación del método MCC», *Investigaciones Regionales* 6, 125-140.

HAJNAL, J. (1956): «The Ergodic Properties of Non-Homogeneous Finite Markov Chains», *Preceedings of the Cambridge Philosophical Society* 52, 67-77.

HARARY, F., NORMAN, R. Y CARTWRIGHT, D. (1965): Structural Models: «An Introduction the Theory of Directed Graphs». Wiley: Nueva York.

HIERRO, M. (2003): «Principales transformaciones estructurales de la movilidad interior en España tras la crisis económica 1975-1985», *Documento de Trabajo* DT 2003-1, *Centro de Estudios sobre la Despoblación y Desarrollo de Áreas Rurales* (*CEDDAR*).

- (2006): «Movilidad y dispersión espacial en las regiones españolas, 1986-2003», *Investigaciones Regionales* 8, 163-170.

HODGE, R.W. (1966): «Occupational Mobility as a Probability Process», *Demography* 3, 19-34.

HOWARD, R. (1971): «Semi-Markov and Decision Processes». Dynamic Probabilistic Systems. Volume II. John Wiley and Sons: Nueva York.

ISSERMAN, A.M, PLANE, D.A., ROGERSON, P.A. Y BEAUMONT, P.M. (1985): «Forecasting Interstate Migration with Limited Data: A Demographic-Economic Approach», *Jorunal of the American Statistical Association* 80, 277-285.

JANSEN, J. Y MANCA, R. (2001):«Numerical Solution of Non-Homogeneous Semi-Markov Processes in Transient Case» *Methodology and Computing in Applied Probability* 3, 271-294.

JUÁREZ, J.P. (2000): «Analysis of Interregional Labour Migration in Spain Using Gross Flows» *Journal of Regional Science* 40 (2), 377-399.

KESAVAN, P.D. (1982): «An Empirical Test of the Causative Markov Model of Consumer Behaviour», *Academy of Marketing Science Journal* 4, 438-456.

LIPSTEIN, B. (1965): «A Mathematical Model of Consumer Behavior", *Journal of Marketing Research* 2, 259-265.

MAGRINI, S. (1999): «The Evolution of Income Disparities among the Regions of the European Union», *Regional Science and Urban Economics* 29, 257-281.

MARTORI, J.C., HOBERG, K., SURIÑACH, J. (2004): «Población Inmigrante y Espacio. Los Índices de Segregación Residencial. El Caso de Barcelona y su Región Metropolitana» *XXX Reunión de Estudios Regionales*, Barcelona.

MAYER, T.F. (1975): «Models of Intragenerational Mobility» en *Sociological Theories in Progress*, J. Berger y Zelditch, Boston.

MAZA, A. Y VILLAVERDE, J. (2004): «Interregional Migration in Spain: a Semi-parametric Analysis», *The Review of Regional Studies*, 34, 2, 156-171.

MCFARLAND, D. (1970): «Intragenerational social mobility as a Markov Process: including a time-stationary markovian model that explains observed declines in mobility rates over time», *American Sociological Review* 35, 463-475.

MCGINNIS, R. (1968): «A Stochastic Model of Social Mobility», *American Sociological Review* 33 (5), 712-721.

PARZEN, E. (1962): *Stochastic Processes*. Paraninfo: Madrid.

PFEIFER, P.E. Y CARRAWAY, R.L. (2000): «Modeling Customer Relationships as Markov Chains», *Journal of Interactive Marketing* 14 (2), 43-55.

PLANE, D.A. (1982): «An Information Theoretic Approach to the Estimation of Migration Flows» *Journal of the Regional Science* 22 (4), 441-456.

(1984): «Migration Space: Doubly Constrained Gravity Model Mapping of Relative Interstate Separation», *Annals of the Association of American Geographers* 74, 244-256.

PLANE, D.A. Y ROGERSON, P.A. (1984): «Modeling Temporal Change in Flow Matrices», *Papers of the Regional Science Association* 54, 147-164.

(1986): «Dynamic Flow Modeling with Interregional Dependency Effects: An Application to Structural Change in the US. Migration System», *Demography* 23 (1), 91-104.

(1994): The Geographical Analysis of Population with Applications to Planning and Business. John Wiley and Sons: Londres.

PUGA, D. (2004): «El comportamiento residencial de los mayores. Análisis biográfico de la movilidad en la vejez», *Revista Española de Investigaciones Sociológicas* 105, 79-102.

PUJADAS, I., GARCÍA, A. Y PUGA, M.D. (1994): «Los índices de efectividad migratoria y la evolución de las migraciones interiores en España (1971-1990)", en *Perfiles actuales de la geografía cuantitativa en España*, Málaga, AGE, 265-284.

PULLMAN, N.J. Y STYAN, G.P.H. (1973): «The Convergence of Markov Chains with Non-Stationary transition Probabilities and Constant Causative Matrix», *Stochastic Processes and their Applications* 1, 279-285.

QUAH, D. (1996): «Empirics for Economic Growth and Convergence», *European Economic Review* 40, 1353-1375.

RÓDENAS, C. (1994): «Migraciones interregionales en España (1960-1989): Cambios y barreras», *Revista de Economía Aplicada* 4, 5-36.

RÓDENAS, C. Y MARTÍ, M. (1997): «¿Son bajos los flujos migratorios en España», *Revista de Economía Aplicada* 15, 155-171.

(2005): «El nuevo mapa de las migraciones interiores en España: los cambios en el patrón migratorio», *Investigaciones Regionales* 6, 21-39.

ROGERS, A. (1966): «A Markovian Policy Model of Interregional Migration», *Papers of the Regional Science Association* 17, 205-224.

ROGERSON, P.A. (1979): «Prediction: A Modified Markov Chain Approach», *Journal of Regional Science* 19 (4), 469-478.

(1981):«Job Turnover and Interregional Migration», ASA/Census WP-5, Institute for Urban and Regional Research, Universidad de Iowa.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, J. (1999): «Evolución de la dinámica espacial de la población andaluza», *Revista de Estudios Regionales* 54, 359-380.

SHORROCKS, A.F. (1978): «The Measurement of Mobility», *Econometrica* 46, 1013-1024.

SINGER, B. Y SPILERMAN, S. (1974): «Social Mobility Models for Heterogeneous Populations» en *Sociological Methodology 1973-1974*, Jossey-Bass Behavioral Science Series: San Francisco, 356-401.

(1976): «The Representation of Social Processes by Markov Models», *American Journal of Sociology* 82, 1-54.

SOMMERS, P.M. Y CONLISK, J. (1978): «Eigenvalue Inmobility Measures for Markov Chains», *Journal of Mathematical Sociology* 6, 253-276.

SORENSEN, A.B. (1975): «The Structure of Intragenerational Mobility», *American Sociological Review* 40, 456-471.

SPILERMAN, S. (1972a): «The Analysis of Mobility Processes by the Introduction of Independent Variables into a Markov Chain», *American Sociological Review* 37, 277-294.

(1972b): «Extensions of the Mover-Stayer Model", *American Journal of Sociology* 78, 599-627.

TAN, B. Y YILMAZ, K. (2002): «Markov Chain Test for Time Dependence and Homogeneity", *European Journal of Operational Research* 137, 524-543.

TARVER, J.D. Y GURLEY, W.R. (1965): «A Stochastic Analysis of Geographical Mobility and Population Projections of the Census Divisions in the United States», *Demography* 2, 134-139.

TELSER, L.G. (1962): «The Demand for Branded Goods as Estimated from Consumer Panel Data», *Review of Economics and Statistics* 44, 300-324.

A REVIEW ABOUT THE USE OF DISCRETE-TIME MARKOV CHAINS IN THE ANALYSIS OF GEOGRAPHICAL ANALYSIS

ABSTRACT

After a complete review of the fundaments about the use of Markov Chains in the analysis of mobility, this paper goes into the contents of the hypotheses of population homogeneity and temporal stationarity in a Discrete-Time Markov Chain, first considering their possible weakness in a particular framework of social analysis, like geographical analysis, and afterwards pointing out and revising the main solutions suggested in the literature to relax these two hypotheses from a critical point of view.

Key words: Markov Chains, population homogeneity, temporal stationarity.

AMS Classification: 60J10, 60J20