

Influencia de distribución del tiempo de ocurrencia entre siniestros en la solvencia de las carteras de seguros no vida (*)

por
MAITE MÁRMOL JIMÉNEZ

y
M. MERCE CLARAMUNT BIELSA

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial.
Universitat de Barcelona

RESUMEN

En este trabajo, partiendo de un modelo Sparre Andersen (1957) modificado con la introducción de una barrera de dividendos constante, realizamos un análisis comparativo de la influencia que ejerce sobre la solvencia de la cartera de seguros no vida la distribución del tiempo de interocurrencia entre siniestros. Como al introducir la barrera de dividendos constante la ruina es segura, analizamos el momento de ruina, τ . Partiendo de la definición de modelos comparables y mediante una aplicación numérica, comprobamos que la distribución

(*) Trabajo financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia y FEDER 2006. MTM2006-13468 y MTM2006-09920.

Los autores quieren agradecer a los evaluadores anónimos sus comentarios y sugerencias que han mejorado este trabajo.

del tiempo de interocurrencia entre los siniestros en dos modelos comparables tiene un gran efecto sobre el momento de ruina. El recargo de seguridad promedio y la función intensidad de ruina nos permiten explicar las diferencias.

Palabras clave: Teoría del riesgo, distribución generalizada Erlang(n), barrera de dividendos constante, momento de ruina, Transformada de Laplace

Clasificación AMS: 91B30, 62P05, 60K05.

1. INTRODUCCIÓN

La solvencia en carteras de seguros no vida es el objeto de estudio de la teoría del riesgo y de la ruina. A partir de la modelización del proceso de las reservas acumuladas hasta un determinado momento se analizan diversas medidas relacionadas con la solvencia como el momento de ruina, la probabilidad de ruina o la cuantía por la que se produce la ruina.

En el modelo clásico de la teoría del riesgo, el nivel de las reservas del asegurador en un determinado momento t , $R(t)$, viene dado por

$$R(t) = u + ct - S(t), \quad t \in [0, \infty), \quad [1]$$

dónde $R(0) = u$ son las reservas iniciales del asegurador y c la intensidad de prima constante. $S(t)$ representa la siniestralidad agregada, es decir el total de siniestros ocurridos hasta el momento t ,

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i,$$

dónde $N(t)$ es el proceso estocástico del número de siniestros ocurridos hasta el momento t , y Z_i es la cuantía individual del i -ésimo siniestro. Por hipótesis, se supone que todas las cuantías individuales de los siniestros siguen la misma distribución, siendo $E[Z]$ la cuantía media de un siniestro cualquiera, y N_t la variable aleatoria número de siniestros ocurridos hasta t .

El total ingresado por primas hasta el momento t es

$$ct = E[Z]E[N_t](1 + \rho_t) , \tag{2}$$

donde ρ_t es el coeficiente de seguridad promedio incluido en la intensidad de prima c . Es decir, el total de las primas cobradas es la siniestralidad media (número medio de siniestros por cuantía media de siniestros) recargada por un coeficiente de seguridad que busca cubrir las posibles desviaciones de la siniestralidad media.

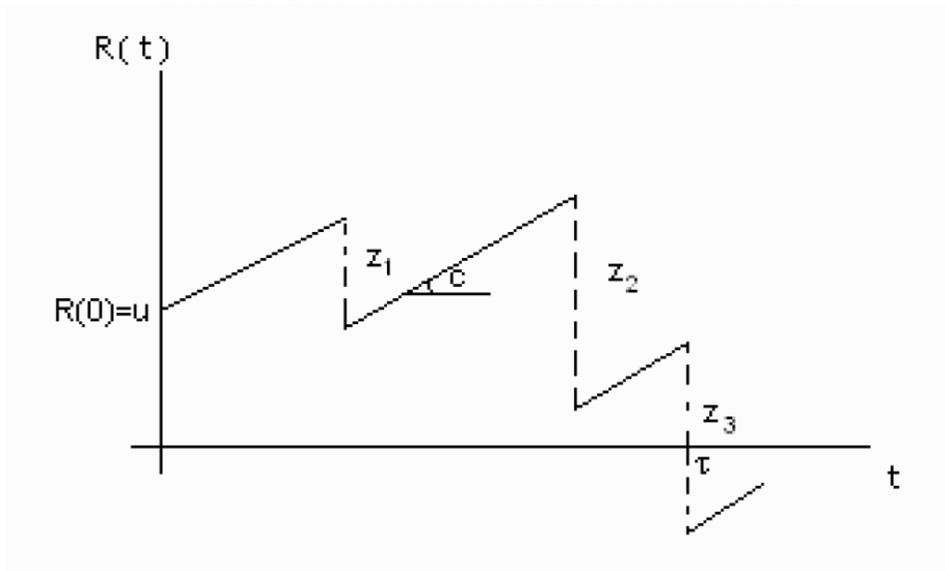
A partir de [2], despejando obtenemos la expresión para el coeficiente de seguridad,

$$\rho_t = \frac{ct}{E[Z]E[N_t]} - 1. \tag{3}$$

En la Figura 1 representamos una trayectoria cualquiera del proceso estocástico $R(t)$,

Figura 1

TRAYECTORIA PARA EL PROCESO DE RESERVAS



Se define el momento de ruina en un horizonte temporal infinito como $\tau = \inf \{t: R(t) < 0\}$, con $\tau = \infty$ si $R(t) \geq 0$ para todo $t > 0$, siendo por tanto el primer instante en el que las reservas toman valores negativos. Denotamos la probabilidad de ruina última con unas reservas iniciales u como $\psi(u) = P[\tau < \infty]$.

En el modelo clásico de la teoría del riesgo el caso más estudiado considera que el número de siniestros, $N(t)$, es un proceso de Poisson, de forma que los tiempos de interocurrencia entre dos siniestros consecutivos, a los que representamos como $T_i, i \geq 1$, se distribuyen según una exponencial de media $1/\lambda$. Algunos trabajos importantes que analizan el momento de ruina en este contexto son Lin y Willmot (2000), Lin et al. (2003), Drekić y Willmot (2003), Dickson y Waters (2002) o Dickson y Waters (2004).

Spare Andersen (1957) propuso una generalización considerando la situación en la que los siniestros ocurren según un proceso de renovación más general. Posteriormente, entre otros, estudian el momento de ruina cuando $T_i, i \geq 1$ sigue una distribución de la familia Erlang, Gerber y Shiu (1998), Dickson y Hipp (2001), Dickson et al. (2003), Li y Garrido (2004) o Albrecher et al. (2005).

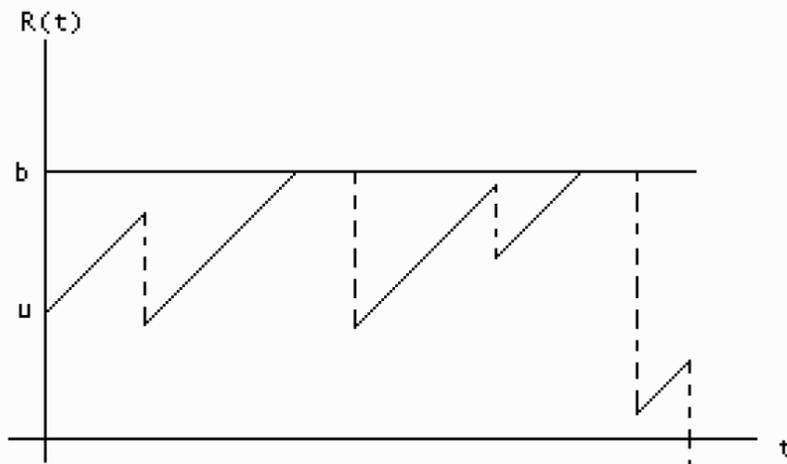
De Finetti (1957) plantea que bajo las hipótesis clásicas del proceso de riesgo, al asumir que el recargo de seguridad es positivo, el nivel de las reservas de aquellas trayectorias que no se arruinan tienden a infinito con probabilidad uno. Evidentemente este hecho genera una disyuntiva entre seguridad y rentabilidad, ya que niveles altos de reservas retrasan la ruina, pero inutilizan una serie de recursos al producirse una acumulación excesiva de reservas. De este hecho surge la necesidad de controlar ese crecimiento ilimitado de reservas, control que se realiza mediante la introducción de barreras de dividendos, que se representan formalmente como $b(t)$.

Encontramos en este contexto la introducción de barreras de dividendos constante, $b(t) = b, 0 \leq u \leq b$ que modifican el proceso de las reservas. Así, cuando las reservas alcanzan el nivel b , los ingresos por primas se reparten a los accionistas en forma de dividendos, y las reservas se mantienen en ese nivel b hasta la ocurrencia del siguiente siniestro. Esta introducción acerca más el proceso teórico de las reservas a la realidad en la gestión técnica de las carteras de seguro.

En este modelo modificado con la introducción del reparto de dividendos, en el cual [1] deja de cumplirse, la probabilidad de ruina es 1, es decir la ruina es segura, por lo cual $\tau < \infty$. En la Figura 2, se representa una trayectoria de las reservas en un modelo modificado con la introducción de una barrera de dividendos constante.

Figura 2

MODELO MODIFICADO CON UNA BARRERA DE DIVIDENDOS CONSTANTE



A lo largo del trabajo, simbolizaremos por MCEXP el modelo clásico con barrera constante y tiempos de interocurrencia distribuidos según una exponencial, y por MCERL al modelo con barrera constante y tiempos de interocurrencia Erlang $(2, \lambda)$.

El presente trabajo contribuye al análisis del momento de ruina última en un modelo con barrera de dividendos constante. Así, en este artículo, en un modelo Sparre Andersen (1957) modificado con la introducción de una barrera de dividendos constante, realizamos un análisis comparativo del efecto que tiene sobre la solvencia de la cartera de seguros no vida la distribución del tiempo de interocurrencia entre los siniestros. Dado que al introducir la barrera de dividendos constante la probabilidad de ruina es uno, analizamos el momento de ruina, τ . A partir de la definición de modelos comparables y mediante una aplicación numérica, comprobamos que la distribución del tiempo de interocurrencia entre los siniestros en dos modelos comparables tiene un gran efecto sobre el momento de ruina. El recargo de seguridad promedio y la función intensidad de ruina nos permiten explicar las diferencias.

El artículo se estructura como sigue: En el apartado 2 planteamos el análisis del momento de ruina τ mediante la obtención de sus momentos calculados a partir de la derivación de su transformada de Laplace. En el apartado 3 nos preguntamos qué modelos podemos comparar, lo que nos permitirá analizar los efectos que

sobre la solvencia de la cartera tiene un cambio en la distribución que modeliza los tiempos de interocurrencia entre siniestros. El apartado 4 del trabajo se centra en el estudio de esos efectos, presentando resultados numéricos y explicaciones sobre las causas de las diferencias obtenidas.

2. ANÁLISIS DEL MOMENTO DE RUINA

En este apartado nos planteamos la obtención de la transformada de Laplace del momento de ruina ($\phi(u)$), si los tiempos de interocurrencia entre dos siniestros consecutivos siguen una distribución Erlang(n) generalizada con parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, y la distribución de la cuantía individual de los siniestros tiene transformada de Laplace racional. Esta expresión general nos permite obtener las correspondientes a los modelos MCEXP y MCERL definidos en la introducción.

En aras de una mayor claridad y concisión, en este apartado omitimos las demostraciones que se encuentran desarrolladas en el Anexo I. En la Tabla 1 se presentan de forma resumida los resultados obtenidos para la transformada de Laplace del momento de ruina en ambos modelos cuando la cuantía individual de los siniestros sigue una distribución exponencial, $Z \sim \exp(\gamma)$,

Tabla 1
RESULTADOS OBTENIDOS PARA $\phi(u)$ EN LOS MODELOS MCERL Y MCEXP

Modelo	Transformada de Laplace de τ $\phi(u) = E[e^{-\delta\tau}]$	Sistema para obtener α_i
MCERL $T_i \sim \text{Erlang}(2, \lambda)$	$\phi(u) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e^{s_i u}$ siendo s_i las raíces de $(\delta + \lambda - cs)^2 (\gamma + s) - \lambda^2 \gamma = 0$	$\sum_{i=1}^3 s_i \alpha_i e^{s_i b} = 0$ $\sum_{i=1}^3 s_i^2 \alpha_i e^{s_i b} = 0$ $\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{(s_i + \gamma)} = \frac{1}{\gamma}$
MCEXP $T_i \sim \text{Erlang}(1, \lambda)$	$\phi(u) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i e^{s_i u}$ siendo s_i las raíces de $-cs_i^2 + (\delta + \lambda - c\gamma) s_i + \delta\gamma = 0$	$\sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i}{(s_i + \gamma)} = \frac{1}{\gamma}$ $\sum_{i=1}^2 \alpha_i s_i e^{s_i b} = 0$

A partir de la transformada de Laplace del momento de ruina podemos calcular sus momentos, es decir $E[\tau^n]$, mediante derivación sucesiva y posterior evaluación de las derivadas en $\delta=0$, es decir,

$$E[\tau^n] = (-1)^n \frac{\partial^n \phi(u)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0}$$

3. ¿QUÉ MODELOS PODEMOS COMPARAR?

En este apartado establecemos las condiciones necesarias para poder comparar los resultados obtenidos respecto al momento de ruina en modelos de renovación con tiempos de interocurencia de la familia Erlang(n), y obtenemos, como caso particular, las necesarias para comparar los modelos MCEXP y MCERL.

Por uno de los teoremas límites para los procesos de renovación (Parzen, 1972), se consideran modelos comparables aquellos en los que la función de renovación, $E[N_t]$, tiene asintóticamente el mismo comportamiento promedio, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N_t]}{t} = \frac{1}{E[T_i]} \tag{4}$$

Por tanto, si $E[T_i]$ coincide, la función de renovación $E[N_t]$ tiene el mismo comportamiento promedio cuando $t \rightarrow \infty$, y entonces los modelos analizados son comparables.

Si el objetivo es analizar la influencia sobre la solvencia (y en concreto el momento de ruina) de estos modelos comparables, es necesario conocer, no sólo el comportamiento límite de la función de renovación, $E[N_t]$, sino también su evolución.

Dicha evolución nos permitirá, en el apartado 4.1, explicar las diferencias observadas entre los momentos esperados de ruina en los modelos comparados. Para ello, y siguiendo a Cox (1962), recurrimos a la expresión que, en un proceso de renovación ordinario, relaciona la función de renovación, $E[N_t]$, con T_i ,

$$\tilde{L}(s) = \frac{1}{s} \frac{\tilde{g}_{T_i}(s)}{1 - \tilde{g}_{T_i}(s)} \text{ para } \tilde{g}_{T_i}(s) < 1, \tag{5}$$

siendo $\tilde{L}(s)$ la transformada de Laplace de $E[N_t]$ y $\tilde{g}_{T_i}(s)$ la transformada de Laplace de la función densidad de los tiempos de interocurrencia. Para el caso particular en que $T_i \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$ con $\tilde{g}_{T_i}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^n$, la expresión [5]

toma la forma

$$\tilde{L}(s) = \frac{\lambda^n}{s((\lambda + s)^n - \lambda^n)}, \quad [6]$$

Centramos a continuación nuestro análisis en la comparación entre el modelo MCEXP y el modelo MCERL.

Si, $T_i \sim \text{Erlang}(2, \lambda)$ modelo MCERL, es inmediato obtener, invirtiendo [6] para $n = 2$,

$$E[N_t] = \frac{1}{E[T_i]} t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-\frac{4}{E[T_i]} t} \quad [7]$$

De [6], si $T_i \sim \text{Erlang}(1, \lambda)$, es decir para MCEXP, con $E[T_i] = \frac{1}{\lambda}$, $\tilde{L}(s) = \frac{\lambda}{s^2}$ e invirtiendo, obtenemos

$$E[N_t] = \frac{t}{E[T_i]} \quad [8]$$

4. EFECTOS EN EL MOMENTO DE RUINA DE UN CAMBIO EN LA HIPÓTESIS SOBRE EL TIEMPO DE INTEROCURRENCIA.

Para comparar el momento de ruina obtenido en los modelos MCEXP y MCERL, $E[T_i]$ debe coincidir. Así, los modelos MCERL con $T_i \sim \text{Erlang}(2, 1)$ y MCEXP con $T_i \sim \text{exp}(0, 5)$ son comparables, ya que en ambos $E[T_i] = 2$. Utilizamos estas dos distribuciones concretas de los tiempos de interocurrencia, para la obtención de resultados numéricos.

Para un nivel de la barrera $b=10$, una prima de $c=0,6$ y una distribución de la cuantía del siniestro exponencial, $f(z) = \gamma e^{-\gamma z}$, con $\gamma = 1$, presentamos en la Tabla

2 los resultados para $E[\tau], \sigma[\tau]$, y el coeficiente de variación de τ definido como $cv[\tau] = \frac{100\sigma[\tau]}{E[\tau]}$ en los dos modelos comparables,

Tabla 2

$E[\tau], \sigma[\tau]$ y $cv[\tau]$ PARA $f(z) = e^{-z}$, $b = 10$ y $c = 0.6$

	E [τ]		σ [τ]		cv [τ]	
	Erl (2,1)	Exp (0,5)	Erl (2,1)	Exp (0,5)	Erl (2,1)	Exp (0,5)
u = 0	93,9577	53,5339	217,63	132,155	231,625	246,863
u = 1	157,031	92,3019	265,267	164,57	168,926	178,295
u = 2	205,805	123,583	288,281	181,294	140,075	146,698
u = 3	243,077	148,527	299,847	190,337	123,355	128,15
u = 4	271,099	168,106	305,565	195,18	112,714	116,105
u = 5	291,68	183,145	308,253	197,668	105,682	107,93
u = 6	306,277	194,339	309,411	198,857	101,023	102,325
u = 7	316,06	202,28	309,845	199,362	98,0336	98,5572
u = 8	321,974	207,467	309,973	199,538	96,2727	96,1784
u = 9	324,794	210,322	309,996	199,581	95,4437	94,893
u = 10	325,372	211,203	309,997	199,584	95,2744	94,4987

Podemos observar en la Tabla 2 que tanto la esperanza como la desviación típica del momento de ruina en ambos modelos, para un nivel fijo de la barrera, es creciente respecto al nivel inicial de las reservas, u . En cambio, el coeficiente de variación es decreciente. Esto implica que la variable aleatoria momento de ruina está más concentrada entorno a su esperanza para valores de las reservas iniciales cercanas a la barrera.

El comportamiento de la esperanza del momento de ruina respecto a u se debe a que un mayor nivel en las reservas iniciales permite una mayor acumulación de reservas que retrasa el momento de ruina.

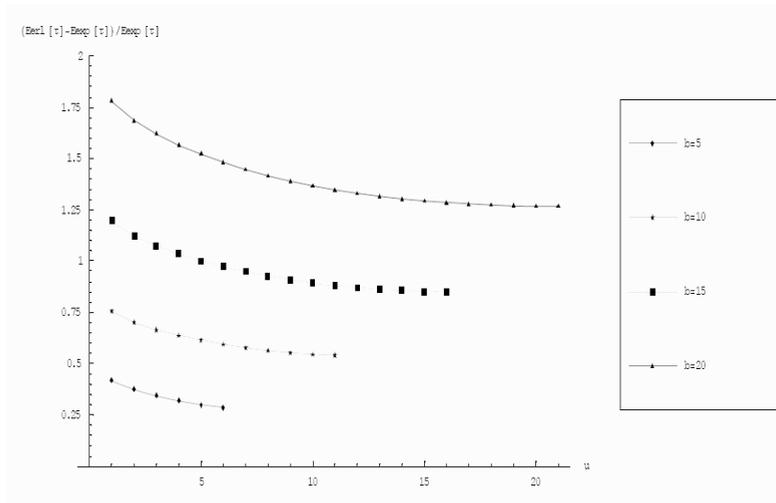
Centrando nuestro análisis en la esperanza del momento de ruina, su comportamiento respecto a u se debe a que un mayor nivel en las reservas iniciales permite una mayor acumulación de reservas que retrasa el momento de ruina. Por otro lado, para cualquier valor de u , observamos que si el tiempo de interocurrencia

sigue una distribución Erlang(2,1) el momento esperado de ruina es sustancialmente superior al obtenido en el modelo exponencial. Este resultado es sorprendente dado que en ambos modelos la esperanza del tiempo de interocurrencia entre dos siniestros consecutivos es la misma, $E[T_i]=2$. En la parte final de este apartado justificaremos estas diferencias.

Los resultados obtenidos en la Tabla 1 corresponden a un nivel de la barrera de $b=10$. Las diferencias entre $E[\tau]$ para el modelo Erlang contemplado (simbolizado por $E_{\text{Erl}}[\tau]$) y para el modelo clásico (simbolizado por $E_{\text{exp}}[\tau]$) se mantienen para diferentes valores de la barrera.

En la Figura 3 representamos el cociente incremental $\frac{E_{\text{Erl}}[\tau] - E_{\text{exp}}[\tau]}{E_{\text{Erl}}[\tau]}$ para diferentes valores de b ,

Figura 3
VALOR DE $\frac{E_{\text{Erl}}[\tau] - E_{\text{exp}}[\tau]}{E_{\text{Erl}}[\tau]}$ PARA $b=5, 10, 15$ y 20 .



Si la barrera es cero, el cociente incremental toma el valor 0 ya que $E_{\text{Erl}}[\tau] = E_{\text{exp}}[\tau]$. La causa es que para $b=0$ la ruina se produce en el momento de ocurrencia del primer siniestro, por tanto $E[\tau] = E[T_i]$, que es la misma en

ambos modelos. Podemos observar además que las diferencias se amplían al incrementar el nivel de la barrera b .

4.1 Explicación de las diferencias obtenidas

Una explicación intuitiva de las diferencias observadas entre los momentos esperados de ruina, $E[\tau]$, en los dos modelos comparados en el epígrafe anterior, que aunque como veremos no explica su magnitud, se basa en el análisis del recargo de seguridad promedio cobrado hasta un determinado momento t, ρ_t .

A partir de la expresión [3], asumiendo $E[Z] = 1$, para el modelo MCEXP y teniendo en cuenta [8], obtenemos que $\rho_t = cE[T_i] - 1 = \rho$, y para el modelo MCERL teniendo

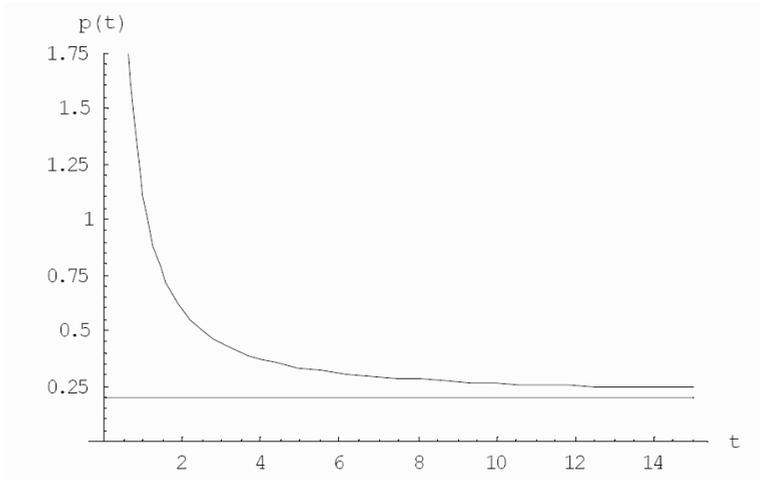
en cuenta [7], sabemos que $\rho_t = \frac{ct}{\frac{1}{E[T_i]}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-\frac{4}{E[T_i]}t}} - 1$.

Observamos así que el recargo de seguridad promedio cobrado hasta un determinado momento t es menor en el modelo MCEXP que en el modelo MCERL, ya que la intensidad de prima constante es la misma en ambos casos y la esperanza del número de siniestros hasta t es superior en el modelo MCEXP.

En la Figura 4 representamos el recargo de seguridad promedio cobrado hasta t para una intensidad de prima constante $c = 0,6$.

Figura 4

RECARGOS DE SEGURIDAD PARA $c = 0,6$ CON $T_i \sim \text{Erlang}(2, 1)$ Y.
 $T_i \sim \text{Exp}(0, 5)$



Por tanto, en el modelo MCERL la ruina se producirá más tarde ya que el recar-go de seguridad es mayor que en el modelo MCEXP y las primas ingresadas las mismas.

Con el objetivo de medir la influencia que las diferencias analizadas en el recar-go de seguridad tienen en el momento de ruina, planteamos una hipótesis distinta que consiste en que el recar-go de seguridad promedio cobrado hasta t es constante en los dos modelos, de forma que la intensidad de prima, $c(t)$, deja de ser constante. Por tanto, en este modelo, la hipótesis [2] queda sustituida por,

$$\int_0^t c(s) ds = E[Z]E[N_t](1 + \rho), \quad [9]$$

ya que $E[N_0] = 0$. Para el caso de interocurrencia exponencial [9] no representa ningún cambio, ya que resolviéndola se obtiene que $c(t) = c$, mientras que para $T_i \sim \text{Erlang}(2, \lambda)$ y teniendo en cuenta [7], la intensidad de prima es

$$c(t) = \frac{1}{E[T_i]} \left(1 + e^{-\frac{4t}{E[T_i]}} \right) E[Z](1 + \rho).$$

La esperanza del momento de ruina calculada por simulación con la nueva hipótesis [9], $b=10$, $\rho =0,2$ y cuantía del siniestro exponencial $f(z) = e^{-z}$, se recoge en la Tabla 3,

Tabla 3

$E[\tau]$ para $f(z)=e^{-z}$, $b = 10$ y $c = 0,6$.

	$T_i \sim \text{Erl}(2,1)$		$T_i \sim \text{Exp}(0,5)$
	$c = 0,6$ ρ_t	$c = (t)$ $\rho = 0,2$	$c = 0.6$ $\rho = 0,2$
$u = 0$	93,9577	77,5085	53,5339
$u = 1$	157,031	147,498	92,3019
$u = 2$	205,805	200,885	123,583
$u = 3$	243,077	242,779	148,527
$u = 4$	271,099	273,812	168,106
$u = 5$	291,68	296,262	183,145
$u = 6$	306,277	312,161	194,339
$u = 7$	316,06	322,885	202,28
$u = 8$	321,974	330,014	207,467
$u' = 9$	324,794	333,024	210,322
$u = 10$	325,372	334,706	211,203

Podemos observar como las diferencias entre los dos modelos con $\rho =0.2$, siguen siendo sustanciales e incluso se acentúan para valores de las reservas iniciales cercanos a la barrera. Por lo tanto esta primera explicación basada en las diferencias del recargo de seguridad, aunque intuitiva, no es suficiente.

Una explicación más sólida de las diferencias podemos encontrarla en la función de intensidad de ruina, $\zeta_b(r)$ (utilizada en un modelo sin barrera por De Vylder y Goovaerts (1998)). Esta función indica, partiendo de unas reservas acumuladas r tras la ocurrencia de un siniestro, la probabilidad de que se produzca la ruina en la ocurrencia del siguiente siniestro, $\zeta_b(r) = P[Z > r + ct]$.

Teniendo en cuenta que si no ocurre ningún otro siniestro, las reservas alcanzarían por primera vez la barrera b cuando $r + ct^* = b, \zeta_b(r)$ es

$$\zeta_b(r) = \int_0^{t^*} k(t) \int_{r+ct}^{\infty} f(z) dz dt + \int_{t^*}^{\infty} k(t) \int_b^{\infty} f(z) dz dt .$$

Para una cuantía de los siniestros exponencial de parámetro γ ,

$$\zeta_b(r) = e^{-r\gamma} \int_0^{t^*} k(t) e^{-ct\gamma} dt + e^{-b\gamma} (1 - F_{t^*}(t^*)) ,$$

siendo $F_t(t^*) = \int_0^{t^*} k(t) dt$.

En MCEXP $T_i \sim \exp(\lambda)$, resolviendo la integral, obtenemos

$$\zeta_{b,\text{exp}}(r) = \frac{\lambda}{\lambda + c\gamma} e^{-r\gamma} + \frac{c\lambda}{\lambda + c\gamma} e^{-(b\gamma + \lambda t^*)} .$$

En MCERL con $T_i \sim \text{Erlang}(2, \lambda)$, obtenemos

$$\zeta_{b,\text{erlang}}(r) = e^{-r\gamma} \lambda^2 \left(\frac{1}{(\lambda + c\gamma)^2} - e^{-(\lambda + c\gamma)t^*} \left(t^* - \frac{1}{(\lambda + c\gamma)^2} \right) \right) + e^{-b\gamma} e^{-\lambda t^*} (1 + \lambda t^*) .$$

Los resultados de $\zeta_{b,\text{exp}}(r)$ para $T_i \sim \exp(0,5)$ y $\zeta_{b,\text{erlang}}(r)$ para $T_i \sim \text{Erlang}(2,1)$ con $b=10$, $c=0.6$ y $f(z) = e^{-z}$ se recogen en la Tabla 4.

La función intensidad de ruina no está definida para $r = b$ debido a que es imposible que tras la ocurrencia de un siniestro las reservas estén en el nivel de la barrera.

Tabla 4

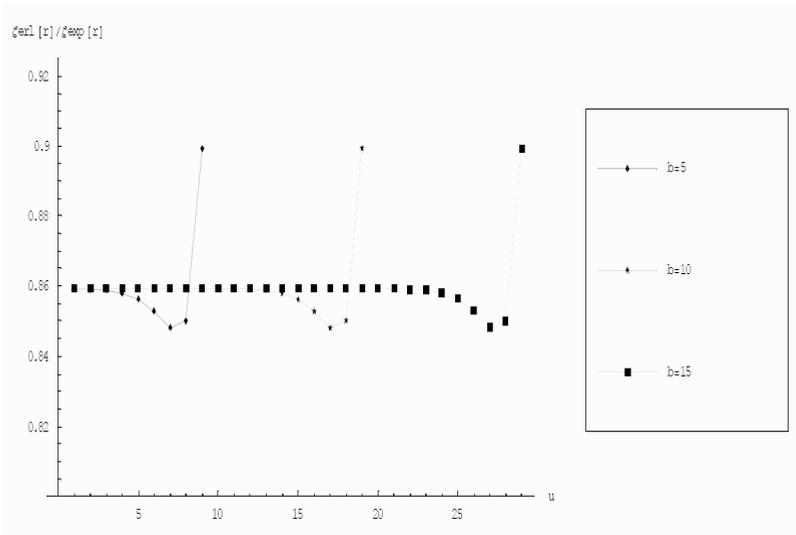
$$\zeta_{b, \text{exp}}(r), \zeta_{b, \text{erlang}}(r) \text{ y } \frac{\zeta_{b, \text{erlang}}(r)}{\zeta_{b, \text{exp}}(r)} \text{ para } f(z) = e^{-z}, b = 10 \text{ y } c = 0,6.$$

	$\zeta_{b, \text{exp}}(r)$	$\zeta_{b, \text{erlang}}(r)$	$\frac{\zeta_{b, \text{erlang}}(r)}{\zeta_{b, \text{exp}}(r)}$
$r = 0$	0,454545	0,390625	0,86
$r = 1$	0,167218	0,143703	0,86
$r = 2$	0,0615161	0,0528653	0,86
$r = 3$	0,226306	0,0194481	0,86
$r = 4$	0,00832546	0,00715455	0,86
$r = 5$	0,00306309	0,00263203	0,86
$r = 6$	0,00112759	0,000968343	0,86
$r = 7$	0,000416525	0,000356629	0,86
$r = 8$	0,00015716	0,000133292	0,85
$r = 9$	0,000668576	0,0000601315	0,90

Podemos observar que la probabilidad de arruinarnos en el siguiente siniestro partiendo de unas reservas r es entre un 10% y un 14% inferior en MCERL con $T_i \sim \text{Erlang}(2,1)$, respecto al modelo MCEXP con $T_i \sim \text{exp}(0,5)$. En la figura 5 podemos observar como, para otros valores de la barrera, la probabilidad en el modelo Erlang es siempre inferior.

Figura 5

$$\frac{\zeta_{b, \text{erlang}}(r)}{\zeta_{b, \text{exp}}(r)} \text{ para } f(z) = e^{-z}, c = 0,6 \text{ y } b = 5, 10, 15.$$



Esta relación entre las probabilidades de arruinarnos en el siguiente siniestro explica que la esperanza del momento de ruina sea muy superior en MCERL con $T_i \sim \text{Erlang}(2,1)$, respecto de MCEXP con $T_i \sim \text{exp}(0,5)$.

CONCLUSIONES

La distribución que determina el tiempo transcurrido entre dos siniestros consecutivos tiene una gran influencia sobre el momento de ruina en una cartera de seguros no vida. El concepto de modelos comparables nos permite comparar modelos siempre que tengan la misma $E[T_i]$. Las diferencias en los momentos de la variable aleatoria momento de ruina entre modelos comparables son muy remarquables.

En el trabajo se demuestra como el recargo de seguridad promedio no nos proporciona una explicación suficiente de las diferencias. En cambio, la función intensidad de ruina, definida como la probabilidad de que tras la ocurrencia de un siniestro

tro partiendo de unas reservas r se produzca la ruina en la ocurrencia del siguiente siniestro, da una explicación sólida de las mismas.

ANEXO I

Asumimos que los tiempos de interocurrencia $T_i, i=1,2 \dots$ siguen una distribución Erlang(n) generalizada, es decir, que cada T_i es la suma de n variables aleatorias independientes exponenciales con parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ cada uno, causando un "sub-siniestro" de cuantía 0, ocurriendo un siniestro con función distribución F en la ocurrencia del n -ésimo siniestro. Consideramos n estados del proceso del riesgo (empezando en el momento 0 en el estado 1) , donde cada subsiniestro produce una transición al siguiente estado y en el momento de ocurrencia del n -ésimo siniestro salta al estado 1 otra vez (ver Albrecher et al. (2005)).

Definimos $\phi^j(u)$ como la transformada de Laplace del momento de ruina del proceso de riesgo en el estado $j=1, \dots, n$.

Teorema 1. Si los tiempos de interocurrencia $T_i, i=1,2 \dots$ siguen una distribución Erlang(n) generalizada con parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, la ecuación íntegro diferencial para $\phi(u)$ es,

$$\left(\prod_{j=1}^n \left(\delta + \lambda_j - c \frac{\partial}{\partial u} \right) \right) \phi(u) - \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_0^u \phi(u-z) dF(z) - \prod_{j=1}^n \lambda_j [1 - F(u)] = 0, \tag{10}$$

con las siguientes condiciones de contorno,

$$\prod_{j=1}^{k-1} \left(\frac{\delta + \lambda_j - c \frac{\partial}{\partial u}}{\lambda_j} \right) \frac{\partial \phi(u)}{\partial u} \Big|_{u=b} = 0, \quad K = 1, \dots, n \tag{11}$$

Demostración. Para $0 \leq u < b$, por un argumento diferencial, recordando que $(1 - \lambda_j dt)$ es la probabilidad de que no ocurra siniestro en un dt , para $j=1, \dots, n-1$ obtenemos

$$\phi^j(u) = (1 - \lambda_j dt) \phi^j(u + cdt) e^{-\delta dt} + \lambda_j dt \phi^{j+1}(u + cdt) e^{-\delta dt} + \theta(dt), \tag{12}$$

y para $j=n$

$$\begin{aligned} \phi^n(u) &= (1 - \lambda_n dt) \phi^n(u + cdt) e^{-\delta dt} + \lambda_n dt \int_0^{u+cdt} \phi^1(u + cdt - z) dF(z) e^{-\delta dt} + \\ & \lambda_n dt e^{-\delta dt} \int_{u+cdt}^{\infty} dF(z) + \theta(dt) \end{aligned} \quad [13]$$

Entonces, por aproximación lineal, dividiendo entre dt , y haciendo $dt \rightarrow \infty$, a partir de [12] y [13] obtenemos,

$$c \frac{\partial \phi^j(u)}{\partial u} - (\delta + \lambda_j) \phi^j(u) + \lambda_j \phi^{j+1}(u) = 0, \text{ para } j = 1, \dots, n-1 \quad [14]$$

$$c \frac{\partial \phi^n(u)}{\partial u} - (\delta + \lambda_n) \phi^n(u) + \lambda_n \int_0^u \phi^1(u-z) dF(z) + \lambda_n [1 - F(u)] = 0, \text{ para } j = n \quad [15]$$

A partir de [14], despejando y siguiendo un proceso recursivo,

$$\phi^n(u) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{(\delta + \lambda_j) - c \frac{\partial}{\partial u}}{\lambda_j} \right) \phi^1(u) \quad [16]$$

Podemos escribir [15] como,

$$\left((\delta + \lambda_n) - c \frac{\partial}{\partial u} \right) \phi^n(u) - \lambda_n \int_0^u \phi^1(u-z) dF(z) - \lambda_n [1 - F(u)] = 0 \quad [17]$$

Sustituyendo [16] en [17], obtenemos [10]

Para $u = b$ usando un proceso análogo para $j = 1, \dots, n-1$

$$\lambda_j \phi^{j+1}(b) - (\delta + \lambda_j) \phi^j(b) = 0$$

y comparando con [14]

$$\frac{\partial \phi^j(u)}{\partial u} \Big|_{u=b} = 0 \quad [18]$$

y para $j = n$,

$$\lambda_n \int_0^b \phi(b-z) dF(z) + \lambda_n \int_b^\infty dF(z) - (\delta + \lambda_n) \phi^n(b) = 0$$

y comparando con [15]

$$\frac{\partial \phi^n(u)}{\partial u} \Big|_{u=b} = 0 \tag{19}$$

A partir de [18] [19] y [16] obtenemos la condición de contorno [11].

Usando un método alternativo, Li y Garrido (2004) obtienen una ecuación integro-diferencial equivalente para la función de Gerber-Shiu.

Aplicando transformadas de Laplace a [10], obtenemos,

$$\vartheta(s) \tilde{\phi}(s) + L_{n-1}(s) - \prod_{j=1}^n \lambda_j \left(\tilde{\phi}(s) \tilde{f}(s) - \frac{1 - \tilde{f}(s)}{s} \right) = 0, \tag{20}$$

siendo $\tilde{\phi}(s)$ la transformada de Laplace de $\phi(u)$ y $\tilde{f}(s)$ la transformada de Laplace de la función densidad de la cuantía del siniestro $\tilde{f}(z)$.

$L_{n-1}(s)$ representa el polinomio de grado $n-1$ cuyos coeficientes incluyen las cuantías $\frac{\partial \phi^{(j)}(u)}{\partial u} \Big|_{u=0}$, $j = 0, \dots, n-1$, y $\vartheta(s)$ es el polinomio de grado n ,

$$\vartheta(s) = \prod_{j=1}^n (\delta + \lambda_j - cs)$$

A partir de [20] obtenemos $\tilde{\phi}(s)$,

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{\prod_{j=1}^n \left(\lambda_j \left(\frac{1 - \tilde{f}(s)}{s} \right) - L_{n-1}(s) \right)}{\vartheta(s) - \prod_{j=1}^n \lambda_j \tilde{f}(s)} \tag{21}$$

Restringimos a continuación el análisis al caso en que la función densidad de la cuantía de los siniestros tiene una transformada de Laplace racional, es decir

$$\tilde{f}(s) = \frac{Q_{r-1}(s)}{P_r(s)} \text{ donde } P_r(s) \text{ y } Q_{r-1}(s) \text{ son polinomios de grado } r \text{ y (al menos) } r-1 \text{ res-}$$

pectivamente sin ceros comunes. Para este tipo de distribución para la cuantía de los siniestros, el denominador de [21] tiene $n+r$ ceros, a los que denominaremos s_1, \dots, s_{n+r} , y asumimos que las raíces son reales y distintas. De lo comentado, concluimos que r de estos ceros se localizan en el semiplano negativo. Entonces, usando fracciones parciales obtenemos,

$$\phi(u) = \prod_{i=1}^{n+r} \alpha_i(b) e^{s_i u} \quad [22]$$

Observemos que los coeficientes $\alpha_i(b)$ son función de b , pero por comodidad escribiremos α_i . Los coeficientes α_i se determinan a partir de un sistema de $n+r$ ecuaciones, teniendo en cuenta que las primeras n ecuaciones se obtienen a partir de [11], y las r restantes sustituyendo la estructura de solución [22] y la transformada de Laplace de la cuantía de un siniestro en la ecuación integro-diferencial inicial.

Asumiendo el caso de un modelo Sparre Andersen con tiempos de interocurrencias Erlang(2, λ) es decir ($n=2$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) la ecuación íntegro-diferencial para $\phi(u)$ es

$$\left(\delta + \lambda - c \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 \phi(u) - \lambda^2 \int_0^u \phi(u-z) dF(z) - \lambda^2 [1 - F(u)] = 0, \quad [23]$$

A partir de [21], es fácil obtener

$$\phi(s) = \frac{\lambda^2 \left(\frac{1 - \tilde{f}(s)}{s} \right) + c^2 \phi(0) + (c^2 s - 2c(\delta + \lambda)) \phi(0)}{(\delta + \lambda - cs)^2 - \lambda^2 \tilde{f}(s)} \quad [24]$$

y asumiendo una distribución de la cuantía del siniestro con transformada de Laplace racional, obtenemos

$$\tilde{\phi}(u) = \prod_{i=1}^{2+r} \alpha_i(b) e^{2s_i u}. \quad [25]$$

A continuación analizamos que sucede cuando la cuantía individual de los siniestros sigue una distribución exponencial. Asumiendo que $f(z) = \gamma e^{-\gamma z}$, entonces

$\tilde{f}(s) = \frac{\gamma}{\gamma + s}$. Obtenemos las raíces $s_i, i = 1, 2, 3$, a partir de

$$(\delta + \lambda - cs)^2 (\gamma + s) - \lambda^2 \gamma = 0 \tag{26}$$

Entonces la solución de $\phi(u)$ toma la forma,

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e^{s_i u} . \tag{27}$$

Las dos primeras ecuaciones obtenidas a partir de [11] son

$$\sum_{i=1}^3 s_i \alpha_i e^{s_i b} = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^3 s_i^2 \alpha_i e^{s_i b} = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 s_i \alpha_i e^{s_i b} = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^3 s_i^2 \alpha_i e^{s_i b} = 0.$$

Para encontrar la tercera ecuación, sustituimos [27] y $f(z) = \gamma e^{-\gamma z}$ en la ecuación integro-diferencial [23], y resolviendo la integral, y teniendo en cuenta [26], obtenemos entonces la tercera ecuación,

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{(s_i + \gamma)} = \frac{1}{\gamma} .$$

Obtenemos entonces un sistema de tres ecuaciones que podemos resolver usando el Mathematica para la obtención de $\alpha_i, i = 1, 2, 3$.

Si los tiempos de interocurrencia $T_i, i \geq 1$, siguen una distribución exponencial, modelo MCEXP, es decir según una distribución Erlang $(1, \lambda)$ podemos obtener la expresión a partir del Teorema 1 como caso particular de la distribución generalizada Erlang(n). Así a partir de [10], para $n=1$, obtenemos la ecuación integro-diferencial para la Transformada de Laplace del momento de ruina en el MCEXP, con su condición de contorno

$$\begin{aligned}
 &(\delta + \lambda)\phi(u) - c\phi'(u) - \lambda \int_0^u \phi(u-z) dF(z) - \lambda [1 - F(u)] = 0 \\
 &\frac{\partial \phi(u)}{\partial u} \Big|_{u=b} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Esta ecuación se puede obtener también a partir de la ecuación [2.5] en Lin et al (2003) para la función Gerber-Shiu function. (Ver también Dickson and Waters (2004)).

Para obtener el sistema que nos permite hallar los coeficientes, a partir de [21], asumiendo que $f(z) = \gamma e^{-\gamma z}$, las raíces se obtienen a partir de $-cs^2 + (\delta + \lambda - c\gamma)s + \delta\gamma = 0$. Entonces $\phi(u) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i e^{s_i u}$. Para calcular α_i , sustituyendo $\phi(u) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i e^{s_i u}$ y $f(z) = \gamma e^{-\gamma z}$ en [28] obtenemos $\sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i}{(s_i + \gamma)} = \frac{1}{\gamma}$. Así tenemos ya las dos ecuaciones para obtener los α_i .

REFERENCIAS

- ALBRECHER, H., CLARAMUNT, M.M AND MARMOL, M. (2005). «On the distribution of dividend payments in a Sparre Andersen model with generalized Erlang(n) interclaim time». *Insurance: Mathematics & Economics*, 37:324-334.
- Cox, D.R. (1962). «Renewal theory». *Chapman and Hall*. London.
- DE FINNETTI, B. (1957). «Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio». *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries II*, 433--443.
- DICKSON, D.C.M AND HIPPE, C. (2001). «On the time to ruin for Erlang(2) risk processes». *Insurance: Mathematics & Economics*, 29: 333-334.
- DICKSON, D.C.M, HUGHES, B. AND ZHANG, L. (2003). «The density of the time to ruin for a Sparre Andersen process with Erlang arrivals and exponential claims». *Centre for Actuarial Studies Research Paper Series N° 111*. University of Melbourne.
- DE VYLDER, F.E. Y GOOVAERTS, M.J. (1998). (1998) «On a class of renewal risk processes». *Discussion del artículo DICKSON, D.C.M. North American Actuarial Journal 2: pp.60-73*

- DICKSON, D.C.M AND WATERS, H.R. (2002). «The distribution of the time to ruin in the classical risk model». *ASTIN Bulletin*, 32: 299-313.
- DICKSON, D.C.M AND WATERS, H.R. (2004). «Some optimal dividend problems» *ASTIN Bulletin*, 34: 49-74.
- DREKIC, S. AND WILLMOT, G.E. (2003). «On the density and moments of the time to ruin with exponential claims». *ASTIN Bulletin*, 32: 11-21.
- GERBER, H.U. AND SHIU, E.S.W. (1998). «On the time value of ruin». *North American Actuarial Journal*, 2, No 1: 48-78.
- LI, S. AND GARRIDO, J. (2004). «On a class of renewal risk models with a constant dividend barrier». *Insurance: Mathematics & Economics*, 35: 691-701.
- Lin, S.X And Willmot, G. E. (2000). «The moments of time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin». *Insurance: Mathematics & Economics*, 27: 19--44.
- LIN, S.X, WILLMOT, G. E. AND DREKIC, S. (2003). «The classical risk model with a constant dividend barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function». *Insurance: Mathematics & Economics*, 33: 551-566.
- PARZEN, E. (1972). «Procesos Estocásticos». Paraninfo. Madrid.
- REN, J. (2005). «The expected value of the time of ruin and the moments of the discounted deficit at ruin in the perturbed classical risk process». *Insurance: Mathematics & Economics*, 37: 505-521.
- SPARRE ANDERSEN, E., (1957). «On the collective theory of risk in the case of contagion between the claims». *Transactions XVth Int. Congress of Actuaries II*, New York, 219-229.

THE INFLUENCE OF INTEROCURRENCE TIMES IN THE SOLVENCY OF NON-LIFE INSURANCE PORTFOLIOS

ABSTRACT

In this paper, departing from a Sparre Andersen (1957) model modified with the introduction of a constant dividend barrier, we analyze the influence of interoccurrence times in the solvency of the non-life insurance portfolios. With the introduction of a constant dividend barrier the occurrence of ruin is sure. Therefore, we analyze the time of ruin, τ . In addition, we take into account the definition of comparable models and, through a numerical application, we show that the distribution of the interoccurrence times between claims in two comparable models has a great influence on the time of ruin. The average security loading and the ruin intensity function allow us to explain the difference.

Key words: risk theory, generalized Erlang(n) distribution, constant dividend barrier, time of ruin, Laplace transform.

AMS Classification: 91B30, 62P05, 60K05.