

Sobre estimación insesgada óptima del cuarto momento central poblacional

Mariano Ruiz Espejo

Universidad Católica San Antonio de Murcia

Resumen

En este artículo proporcionamos la expresión del estimador insesgado óptimo, para distribución libre, del cuarto momento central poblacional. Aunque su publicación en una tesis doctoral del autor (1998) fue el primer intento en su obtención, no había sido diseminada en una revista de mayor difusión.

Palabras clave: Estimación insesgada óptima, cuarto momento central poblacional, distribución libre.

Clasificación AMS: 62D05, 62E99, 62Pxx.

On optimum unbiased estimation of the fourth population central moment

Abstract

In this article, we provide the expression of the optimum unbiased estimator for free distribution of the fourth population central moment. Its publication in a doctoral thesis of the author (1998) was the first intent for its obtention, but it was not disseminated in a journal of more diffusion.

Key words: Optimum unbiased estimation, fourth population central moment, free distribution setting.

AMS classification: 62D05, 62E99, 62Pxx.

1. Introducción

El momento central cuarto de una población y su estimación insesgada han sido objeto de estudio en las dos últimas décadas. El primer estimador insesgado óptimo para distribución libre de dicho cuarto momento central poblacional fue publicado en una tesis doctoral (Ruiz Espejo, 1998, pp. 92-93). Su dificultad de obtención fue reconocida posteriormente por Dodge y Rousson (1999), quienes no pudieron abordar su solución. Posteriormente, en un congreso mundial celebrado en Guanajuato (México) en el año 2000 ofrecí las demostraciones paso a paso del resultado inicial (Ruiz Espejo y Singh, 2000).

Durante esos y siguientes años traté de publicar el resultado, y otros relacionados que iban añadiéndose, a sugerencia de diferentes editores de revistas como *Test*, *Annales de l'Institut Henri Poincaré: Probabilités et Statistiques*, y *Communications in Statistics – Theory and Methods*, que desestimaron la publicación si bien ofrecían ideas para abordar o resolver el problema de la estimación insesgada óptima del momento central poblacional de orden cuarto de modos alternativos. Finalmente, se publicaron varios de estos resultados (tres, de las revistas anteriores, dos de ellos tal y como fueron sugeridos por los editores, en *Remark 4.2* según *Test* y en *Remark 4.3* según *CSTM* tras simplificaciones personales mías, es decir, sin incluir los razonamientos o desarrollos explicativos por parte del editor) y uno de ellos corregido por mí (recogido en *Remark 4.1*, respecto al defectuosamente desarrollado que me sugirieron en la revista *AIHPPS*, pero con una idea valiosa y aprovechable para su desarrollo) tal y como aparecen en la revista *Metron*, firmados por los autores Ruiz Espejo *et al.* (2013).

El propósito de este artículo es presentar el estimador original del autor en su tesis (1998, pp. 92-93) ya que éste no ha sido publicado en revista científica alguna, pues en la versión aceptada por la revista *Metron* incluye otro estimador cuya responsabilidad única es del tercer autor y corresponsal del trabajo, Saralees Nadarajah. Este autor cambió, a sugerencia de un evaluador anónimo y con la aprobación del editor de la revista, el estimador original de la versión inicial por otra expresión no simplificada del todo que aparece en el Teorema 4.1 de dicho artículo de Ruiz Espejo *et al.* (2013).

En la sección siguiente vamos a dar dicho estimador original insesgado y óptimo debido a Ruiz Espejo (1998) que aún no había visto la luz en una revista de gran difusión pese a los sucesivos y reiterados intentos para lograrlo, pues creo que tiene un interés estadístico claro del que nos hacemos eco en las conclusiones, además de reflejar las primeras investigaciones sobre este tema. Queda indicar que han sido varias las revistas incluidas en el ranking JCR cuyos editores dijeron en su informe desaprobatorio que había error (en una primera versión así fue, como indicó Wenceslao González Manteiga en *Test* pero sin dar opción a posible corrección, y en las versiones siguientes no había error en mis resultados desarrollados, pero se denegó con razón similar en la revista *Sankhya* tras varios años de revisión editorial) o se adujo que los razonamientos empleados eran simples (María Ángeles Gil, en *Test*; o en *Journal of Statistical Planning and Inference*, que a pesar de reconocer que eran correctos, no los aceptaron para su publicación), por lo que evidentemente se contradecían los juicios ante la exposición ordenada, minuciosa y con claridad del resultado de cierta elaboración, originalidad e interés científico. Hubo dilaciones de los editores de revistas supuestamente superiores en los baremos anglosajones, o en otros casos, como en *Statistical Science*, negándose a reconocer el resultado correcto con argumentos de auto-excusas debidas a la línea editorial seguida y ha sido finalmente esta revista nacional, *Estadística Española*, la que publica el resultado original y a la que felicito por la honestidad de su equipo editorial.

2. Estimador insesgado óptimo

El estimador original insesgado óptimo para distribución libre del momento central poblacional de orden cuatro para un diseño muestral de muestreo aleatorio simple con reemplazamiento de tamaño $n > 3$ propuesto por Ruiz Espejo (1998) es

$$\hat{\mu}_4 = \frac{n^2 - 2n + 3}{n^2 - 5n + 6} \left\{ \frac{n(n-14)}{(n-1)(n-2)} \hat{\alpha}_4 - \frac{4n(n+2)}{(n-1)(n-2)} \hat{\alpha}_3 \hat{\alpha}_1 + \frac{6n^3}{(n-1)(n^2 - 2n + 3)} \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_1^2 + \frac{3n(-2n^2 + 5n - 7)}{(n-1)^2(n^2 - 2n + 3)} \hat{\alpha}_2^2 - \frac{3n^3(n-4)}{(n-1)^2(n^2 - 2n + 3)} \hat{\alpha}_1^4 \right\} = \frac{n}{(n-1)(n-2)(n-3)} \left\{ \frac{(n-14)(n^2 - 2n + 3)}{n-2} \hat{\alpha}_4 - \frac{4(n+2)(n^2 - 2n + 3)}{n-2} \hat{\alpha}_3 \hat{\alpha}_1 + 6n^2 \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_1^2 + \frac{3(-2n^2 + 5n - 7)}{n-1} \hat{\alpha}_2^2 - \frac{3n^2(n-4)}{n-1} \hat{\alpha}_1^4 \right\},$$

donde $\hat{\alpha}_k$ es el momento no central de orden k de la muestra aleatoria simple con reemplazamiento de tamaño fijo n ($k = 1, 2, 3, 4$).

La demostración consiste en sustituir los resultados de los lemas 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 en el resultado del lema 4.1 (Ruiz Espejo *et al.*, 2013), y tras simplificar se obtiene dicha fórmula de $\hat{\mu}_4$. La insesgación es obvia debido al lema 4.1 y los siguientes seis lemas. La optimalidad se debe a Zacks (1971, p. 150), porque el estimador propuesto es invariante para permutaciones de las observaciones de la muestra aleatoria simple con reemplazamiento de tamaño n , al serlo cada uno de los momentos muestrales no centrales.

3. Conclusiones

De este modo quedó resuelto el problema de estimación óptima del cuarto momento central poblacional, y como consecuencia se dotó de un estimador insesgado óptimo para la varianza del estimador “cuasivarianza muestral” que estima sin sesgo a la varianza poblacional en el muestreo aleatorio simple (Ruiz Espejo, 1997b). Este extremo queda explicado en el mismo artículo de Ruiz Espejo *et al.* (2013). Como consecuencia directa, se pudo, se puede y se podrá estimar sin sesgo de modo óptimo la varianza del estimador insesgado de la varianza de la “media muestral” con diseño de muestreo aleatorio simple con reemplazamiento, como estimador insesgado óptimo de la media poblacional (Ruiz Espejo, 1997a). Es decir,

$$\hat{V}(s^2) = \frac{(n-1)\hat{\mu}_4 - (n-3)s^4}{n^2 - 2n + 3}$$

y

$$\hat{v}\{\hat{v}(\hat{\alpha}_1)\} = \frac{(n-1)\hat{\mu}_4 - (n-3)s^4}{n^2(n^2 - 2n + 3)},$$

donde s^4 es el cuadrado de la “cuasivarianza muestral” s^2 (cf. Ruiz Espejo, 2013), y $\hat{\alpha}_1$ es la media muestral, es decir, un estimador insesgado de la media poblacional α_1 .

Referencias

- DODGE, Y. & ROUSSON, V. (1999). «The complications of the fourth central moment». *The American Statistician* **53**, 267-269.
- RUIZ ESPEJO, MARIANO (1997a). «Optimalidad insesgada de la media muestral». *Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza* **52**, 81-82.
- RUIZ ESPEJO, MARIANO (1997b). «Sobre la cuasicovarianza muestral en el muestreo aleatorio simple». *Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza* **52**, 55-57.
- RUIZ ESPEJO, MARIANO (1998). «Renta Familiar Declarada Media por Comunidades Autónomas y España (1988-1992): Estimación y Aplicaciones». Madrid. *Tesis doctoral en Ciencias Económicas y Empresariales por la Universidad Nacional de Educación a Distancia*.
- RUIZ ESPEJO, MARIANO (2013). «Exactitud de la Inferencia en Poblaciones Finitas». Madrid. Bubok.
- RUIZ ESPEJO, MARIANO & SINGH, HOUSILA PRASAD (2000). «Optimal unbiased estimator of the fourth population central moment». *Year 2000. Fifth World Congress of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability and Sixty-third Annual Meeting of the Institute of Mathematical Statistics*, p. 115. Guanajuato (México).
- RUIZ ESPEJO, MARIANO, DELGADO PINEDA, MIGUEL & NADARAJAH, SARALEES (2013). «Optimal unbiased estimation of some population central moments». *Metron* **71**, 39-62.
- ZACKS, S. (1971). «The Theory of Statistical Inference». Nueva York. Wiley.