

Un modelo de ecuaciones estructurales bayesiano: aplicación al rendimiento matemático en PISA 2012*

Andrés Fernández Arauz

Escuela de Estadística. Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica

Resumen

El objetivo de este trabajo es evaluar la hipótesis causal de que el estatus socioeconómico de los estudiantes y la actitud de los estudiantes hacia la matemática son factores que determinan en gran medida los resultados académicos de los estudiantes costarricenses, medido a través del resultado en la prueba de alfabetización matemática de PISA 2012. Para esto, se define un modelo de medida de los constructos latentes y se estima el modelo estructural, tanto desde el enfoque clásico como desde el enfoque Bayesiano, para comparar ambos tipos de estimaciones resaltando las bondades del método Bayesiano para este tipo de modelos.

Palabras clave: análisis factorial confirmatorio, distribución a priori, Monte Carlo de cadenas de Markov.

Clasificación AMS: 62.

A Bayesian Structural Equation Model: An application to the mathematical achievement in PISA 2012

Abstract

The aim of this study is to evaluate the causal hypothesis that the socioeconomic status of students and student attitudes toward mathematics are factors that largely determine the academic performance of Costa Rican students in PISA 2012. A path diagram of the three-factor measurement model is defined and the structural equation model is estimated from both the classical approach and the Bayesian approach to compare both types of estimates, highlighting the benefits of Bayesian method for this type of models.

* Este documento fue elaborado como trabajo final de investigación en el curso de Estadística Bayesiana (SP1626 – I Semestre 2015) del Posgrado de Estadística de la Universidad de Costa Rica y fue presentado en el XXX Foro Internacional de Estadística (Setiembre 2015, Acapulco, México), y en el XX Simposio Internacional de Métodos Matemáticos Aplicados a las Ciencias (Febrero 2016, San José, Costa Rica)

Keywords: confirmatory factor analysis, a priori distribution, Markov Chain Monte Carlo.

AMS Classification: 62.

1. Introducción

En las investigaciones que utilizan análisis estadísticos multivariados es muy común que los datos utilizados no hayan sido generados por el propio investigador a través de un diseño experimental, sino que provengan de encuestas y bases de datos en las cuáles el investigador no tuvo participación. La utilización de datos de este tipo únicamente permite realizar análisis correlacionales, y aunque usualmente el objetivo de las investigaciones es probar hipótesis de causalidad y no de asociación, se utilizan técnicas estadísticas que no permiten al investigador realizar conclusiones en cuanto a dicha causalidad.

La mayoría de las técnicas estadísticas multivariadas únicamente permiten aproximar relaciones de asociación (algunas de mejor manera que otras) entre variables, analizando la estructura de las mismas y permitiendo que estas orienten al investigador en la dirección en la que podría seguir con su investigación.

Sin embargo, existe una técnica estadística que puede ser utilizada con datos observacionales y que puede generar evidencia en favor o en contra de una hipótesis de causalidad: los modelos de ecuaciones estructurales.

El principal aporte que realiza un modelo de ecuaciones estructurales es que permite a los investigadores evaluar modelos teóricos e hipótesis de causalidad, siendo una de las herramientas más potentes para el estudio de relaciones causales sobre datos no experimentales. Aunque teóricamente no prueban la causalidad en un sentido estricto, los modelos de ecuaciones estructurales son la única técnica estadística multivariada que puede dar evidencia sobre una hipótesis de causalidad.

A pesar de ser una herramienta tan potente, estos modelos son poco utilizados en las investigaciones en ciencias sociales. Por lo anterior, el presente trabajo pretende presentar la técnica de ecuaciones estructurales para evaluar la hipótesis causal de que existen dos factores latentes, uno de extracción socioeconómica de los estudiantes, y otro de actitud de los estudiantes hacia las matemáticas que, en conjunto, proveen de un apropiado modelo de medida para explicar, mediante una relación estructural, las diferencias en el rendimiento académico de los estudiantes costarricenses participantes en la prueba de matemáticas de PISA 2012.

Antes de introducir los conceptos teóricos más relevantes de los modelos de ecuaciones estructurales, resulta importante explicar su relación con los análisis de factores y particularmente con el análisis factorial confirmatorio. Esto se expone a continuación.

Análisis factorial

Desde su aparición hace más de un siglo, el análisis factorial se ha convertido en uno de los procedimientos estadísticos multivariantes más utilizados en la investigación aplicada en una gran variedad de campos de aplicación (por ejemplo, la psicología, la educación, la sociología, la salud pública, entre otros). La intención fundamental del análisis factorial es determinar el número y la naturaleza de las variables latentes o factores que explican la variación y covariación entre un conjunto de medidas observadas, comúnmente conocidas como indicadores.

En concreto, un factor (también llamado variable latente o constructo) es una variable no observable que influye en más de una medida observada y que da cuenta de las correlaciones entre estas medidas observadas. En otras palabras, las medidas o variables observadas están interrelacionadas porque comparten un factor causal común (es decir, se encuentran influenciadas por el mismo constructo subyacente). Por lo tanto, el análisis factorial intenta una comprensión más parsimoniosa de la covariación entre un conjunto de indicadores debido a que el número de factores o constructos es menor que el número de variables observadas.

Hay dos tipos principales de análisis de factores: el análisis factorial exploratorio (EFA, por sus siglas en inglés) y el análisis factorial confirmatorio (CFA, por sus siglas en inglés; véase Joreskog 1969). Tanto el EFA como el CFA pretenden reproducir las relaciones observadas entre un grupo de indicadores con un conjunto más pequeño de variables latentes, pero se diferencian fundamentalmente por el número y la naturaleza de las especificaciones a priori y restricciones hechas en el modelo de factores.

El análisis factorial exploratorio es un enfoque impulsado por los datos, de tal manera que no se hacen especificaciones en relación con el número de factores latentes o al patrón de las relaciones entre los factores comunes y los indicadores. Más bien, el investigador emplea el EFA como técnica exploratoria o descriptiva para determinar el número adecuado de factores comunes y de descubrir cuáles variables de medición son indicadores razonables de las diversas dimensiones latentes.

En el análisis factorial confirmatorio, el investigador especifica el número de factores y el patrón de relación entre los indicadores y los factores de antemano, así como especificaciones en algunos otros parámetros. El factor de solución pre-especificado se evalúa en términos de lo bien que este reproduce la matriz de varianzas y covarianzas de la muestra en las variables medidas. Por lo tanto, a diferencia del EFA, el CFA requiere una sólida base empírica o conceptual para guiar la especificación y evaluación del modelo de factores.

Una diferencia crucial entre ambos enfoques es que en el CFA los factores latentes son utilizados ellos mismos (y no puntajes factoriales, como en el EFA) en los análisis, como en el caso de los modelos de ecuaciones estructurales (SEM, por sus siglas en inglés).

Frecuentemente, el análisis factorial confirmatorio es utilizado como precursor para los modelos de ecuaciones estructurales que especifican relaciones estructurales (por

ejemplo, regresiones) entre las variables latentes. Los SEM se pueden separar en dos grandes componentes:

- El modelo de medida, que especifica el número de factores, cómo se relacionan los indicadores con las variables latentes, y las relaciones entre los errores de los indicadores (es decir, el análisis factorial confirmatorio) y,
- El modelo estructural, que especifica cómo se relacionan unas con otras las distintas variables latentes (efectos directos o indirectos, ninguna relación, relaciones espurias).

De esta manera, un modelo de ecuaciones estructurales basa la relación estructural de las variables latentes en los resultados obtenidos del modelo de medida del análisis factorial confirmatorio, por lo que se encuentran estrechamente relacionados, y es claro por qué una solución de un CFA es una antesala muy útil a un modelo de ecuaciones estructurales, que intenta reproducir las relaciones entre variables latentes con un conjunto de parámetros estructurales más parsimonioso (es decir, menos parámetros) que el mismo CFA.

Modelos de ecuaciones estructurales

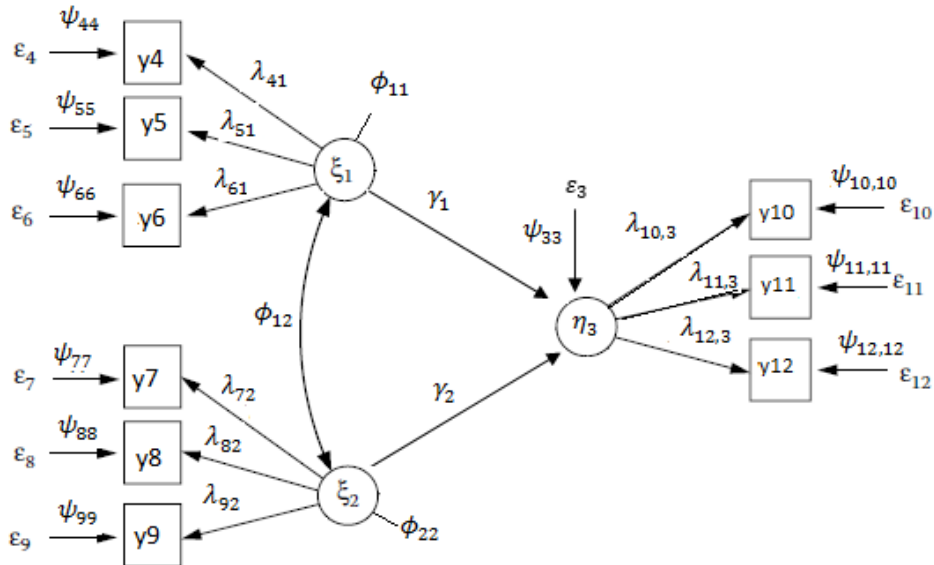
Como fue mencionado en la sección anterior, a diferencia de los análisis estadísticos exploratorios, los modelos de ecuaciones estructurales se centran en probar hipótesis en modelos con ciertas restricciones sobre los parámetros previamente identificadas. El objetivo es probar si el modelo con estas restricciones ajusta bien a los datos con los cuáles se buscará realizar la prueba.

Una prueba de modelos consiste en comparar la matriz de varianzas y covarianzas reproducida por las variables observadas contra la matriz de varianzas y covarianzas observada de los datos. Antes de presentar formalmente las ecuaciones involucradas en este proceso, resulta importante explicar los SEM desde una perspectiva gráfica. Esto se hará para el modelo que será estimado en este trabajo.

El modelo consta de tres factores latentes en el que cada uno será medido por tres variables indicadoras, es decir, se utilizará un total de nueve variables observadas. Los primeros dos factores latentes, llamados ξ_1 y ξ_2 , son factores determinantes del tercer factor, llamado η_3 , es decir, en este modelo hay dos factores latentes exógenos que tienen una relación directa sobre un factor latente endógeno, según se muestra en la figura 1.

Figura 1

Ilustración de un modelo de ecuaciones estructurales de tres factores



Asociado a cada trayectoria causal directa hay un coeficiente estructural que representa en cuánto afecta una unidad de cambio de la variable causal (la del origen de la trayectoria) sobre la variable efecto (la del final de la trayectoria). En este caso, hay dos coeficientes estructurales que van desde los factores latentes exógenos hasta el factor latente endógeno, γ_1 y γ_2 .

Hay además nueve coeficientes de cargas factoriales, que modelan la relación entre cada variable indicadora (y_p) con su factor causal común. Las flechas para estas relaciones salen del factor latente exógeno y llegan hasta su variable indicadora, por lo que estas son también variables endógenas en el modelo. Estos coeficientes se representan con el símbolo λ , donde el primer número del subíndice que acompaña a λ se refiere a la variable y el segundo al factor en el que carga dicha variable.

Con el símbolo ϕ se representan los elementos de la matriz de varianzas y covarianzas de los factores latentes exógenos, mientras que el símbolo ε representa la variable de error de cada variable endógena, sea latente o no.

Por último, con el símbolo ψ se representa a los elementos de la diagonal de la matriz de varianzas y covarianzas de error entre las variables observadas, a lo cual es importante mencionar que todas las covarianzas han sido fijadas como cero para este modelo.

El sistema de ecuaciones completo de este modelo está compuesto por 10 ecuaciones (una para la variable latente endógena y nueve para las variables indicadoras endógenas), y es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \eta_3 &= \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \varepsilon_3 \\
 y_4 &= \lambda_{41} \xi_1 + \varepsilon_4 \\
 y_5 &= \lambda_{51} \xi_1 + \varepsilon_5 \\
 y_6 &= \lambda_{61} \xi_1 + \varepsilon_6 \\
 y_7 &= \lambda_{72} \xi_2 + \varepsilon_7 \\
 y_8 &= \lambda_{82} \xi_2 + \varepsilon_8 \\
 y_9 &= \lambda_{92} \xi_2 + \varepsilon_9 \\
 y_{10} &= \lambda_{10,3} \eta_3 + \varepsilon_{10} \\
 y_{11} &= \lambda_{11,3} \eta_3 + \varepsilon_{11} \\
 y_{12} &= \lambda_{12,3} \eta_3 + \varepsilon_{12}
 \end{aligned}$$

En forma matricial, el modelo es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}_{10 \times 1} = \mathbf{A}_{10 \times 10} \begin{bmatrix} \eta \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}_{10 \times 1} + \mathbf{\Gamma}_{10 \times 2} \boldsymbol{\xi}_{2 \times 1} + \begin{bmatrix} \varepsilon_3 \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}_{10 \times 1}$$

Es importante mencionar que al igual que en el análisis factorial, en SEM el modelo no se ajusta a puntuaciones individuales, sino a la matriz de varianzas y covarianzas de las variables observadas. Las fórmulas para esto son obtenidas mediante la aplicación de las fórmulas generales de varianza para una combinación lineal, y aunque no serán presentadas en este trabajo, se puede estudiar su cálculo en Mulaik (2009).

Por último, es importante mencionar que existen varios algoritmos para estimar estos modelos, siendo el más usual el de máxima verosimilitud, con sus distintas variantes. En este trabajo será presentada la estimación frecuentista vía máxima verosimilitud del modelo expuesto como referencia, pero lo que resta del trabajo se centra en mostrar cómo se podría estimar este modelo desde un enfoque Bayesiano, dadas algunas de sus ventajas sobre la estimación frecuentista, como las siguientes: para modelos más complejos que el que será utilizado en este trabajo, la estimación clásica puede enfrentar problemas de no convergencia, resultados no deseables como la estimación de varianzas negativas y, en el caso de modelos SEM multinivel, estimaciones sesgadas cuando el coeficiente de correlación intraclase es bajo, cuando se dispone de un reducido número de observaciones o cuando se cuenta con un pequeño número de grupos en el nivel superior de la estructura multinivel (véase Depaoli y Clifton, 2015)

2. Metodología

El enfoque Bayesiano

La estimación clásica asume que el vector de parámetros desconocidos no es aleatorio. Por el contrario, en el enfoque Bayesiano el vector de parámetros desconocidos se considera aleatorio con una distribución a priori y una distribución de densidad.

Supongamos que M es un modelo SEM con un vector de parámetros desconocidos θ . El conjunto de datos observados se denota por Y . Sea $p(Y, \theta|M)$ la función de densidad probabilística de la distribución conjunta de Y y θ dado M . El comportamiento de θ dados los datos es descrito completamente por la distribución condicional de θ dado Y . A esta distribución condicional se le llama distribución a posteriori de θ . Sea $p(\theta|Y, M)$ la función de densidad de la distribución a posteriori. Esta función de densidad a posteriori tiene un rol crucial en la teoría Bayesiana.

De acuerdo con el Teorema de Bayes, e introduciendo el modelo SEM (M), la siguiente identidad es cierta:

$$p(Y, \theta|M) = p(Y|\theta, M)p(\theta|M) = p(\theta|Y, M)p(Y|M)$$

Como $p(Y|M)$ no depende de θ se puede tratar como una constante para un Y fijo, y entonces se tiene:

$$\log p(\theta|Y, M) \propto \log p(Y|\theta, M) + \log p(\theta|M)$$

Donde $p(Y|\theta, M)$ es la función de verosimilitud y $p(\theta|M)$ es la función de densidad a priori. La función de densidad a posteriori, $p(\theta|Y, M)$, depende de ambas funciones.

Como la función de verosimilitud depende de los datos y la función de densidad a priori no, cuanto más grande sea el tamaño de la muestra de los datos más se va a acercar la estimación Bayesiana a la estimación frecuentista, dado que la función a priori juega un rol menos importante. Por el contrario, cuanto más pequeño sea el tamaño de muestra la función a priori juega un rol más importante que la función de verosimilitud de los datos. Esta es de hecho una de las ventajas de la estimación Bayesiana sobre la frecuentista, y por lo tanto, la elección de la distribución a priori es un tema fundamental en la teoría Bayesiana.

Integración de los SEM y la estadística Bayesiana

En esta sección se explica la teoría básica de estimación de un modelo de ecuaciones estructurales general desde un enfoque Bayesiano, siguiendo lo expuesto por Lee (2007).

Un modelo de ecuaciones estructurales se compone, según fue explicado, de un modelo de medida y una ecuación estructural. El modelo de medida se define de la siguiente manera:

$$y_i = \Lambda \omega_i + \epsilon_i$$

Donde para $i = 1, \dots, n$ y_i es un vector aleatorio de los valores observados, Λ es una matriz de cargas factoriales, ω_i es un vector de puntuaciones factoriales y ϵ_i es un vector aleatorio de errores de medición independiente de ω_i . Se asume que ϵ_i se distribuye $N[\mathbf{0}, \Psi_\epsilon]$ donde Ψ_ϵ es una matriz diagonal.

Sea $\omega_i = (\eta_i^T, \xi_i^T)^T$ una partición de ω_i en $q_1 \times 1$ vectores latentes dependientes de η_i y en $q_2 \times 1$ vectores latentes independientes de ξ_i . La ecuación estructural para evaluar la relación entre η_i y ξ_i está dada por:

$$\eta_i = A\eta_i + \Gamma\xi_i + \delta_i$$

Donde A y Γ son matrices de parámetros desconocidos de los coeficientes de regresión y δ_i es un vector aleatorio de errores de medición. Al igual que en el análisis factorial, se asume que ξ_i se distribuye como $N[0, \Phi]$ y que δ_i se distribuye como $N[0, \Psi_\delta]$, donde Ψ_δ es una matriz diagonal y, ξ_i y δ_i son independientes.

Ahora, haciendo $Y = (y_1, \dots, y_n)$ y $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, y definiendo a θ como el vector de parámetros desconocidos en $\Lambda, \Psi_\epsilon, A, \Gamma, \Phi$ y Ψ_δ , para la estimación Bayesiana, se replican los datos observados Y con la matriz de variables latentes Ω considerando la distribución posterior conjunta $[\theta, \Omega|Y]$. Un número suficientemente grande de observaciones de esta distribución a posteriori es obtenido mediante *muestreo de Gibbs*¹, que en la iteración $(j+1)$ realiza lo siguiente:

- Generar $\Omega^{(j+1)}$ de $p(\Omega|\theta^{(j)}, Y)$,
- Generar $\theta^{(j+1)}$ de $p(\theta|\Omega^{(j+1)}, Y)$

La derivación de la distribución condicional $p(\Omega|\theta, Y)$ (punto “a” del proceso anterior) está basado en la definición del modelo y de las propiedades de distribución de los vectores aleatorios y_i y ω_i . Para $i = 1, \dots, n$, los ω_i son mutuamente independientes y los y_i también son mutuamente independientes dados (ω_i, θ) . Entonces, se tiene la siguiente ecuación para la distribución condicional $p(\Omega|\theta, Y)$:

$$p(\Omega|\theta, Y) = \prod_{i=1}^n p(\omega_i|y_i, \theta) \propto \prod_{i=1}^n p(\omega_i|\theta) p(y_i|\omega_i, \theta)$$

Lee Sik-Yum (2007) muestra que la distribución condicional de ω_i dados (y_i, θ) es Normal con los siguientes parámetros:

$$(\omega_i|y_i, \theta) \sim N \left[(\Sigma_\omega^{-1} + \Lambda^T \Psi_\epsilon^{-1} \Lambda)^{-1} \Lambda^T \Psi_\epsilon^{-1} y_i, (\Sigma_\omega^{-1} + \Lambda^T \Psi_\epsilon^{-1})^{-1} \right]$$

Con

$$\Sigma_\omega = \begin{bmatrix} A_0^{-1}(\Gamma\Phi\Gamma^T + \Psi_\delta)A_0^{-T} & A_0^{-1}\Gamma\Phi \\ \Phi\Gamma^T A_0^{-1} & \Phi \end{bmatrix}$$

Por otra parte, la distribución condicional de θ dados (Ω, Y) para la iteración señalada en el punto “b”, es proporcional a $p(\theta)p(Y, \Omega|\theta)$, por lo que resulta necesario establecer la distribución a priori $p(\theta)$ de los parámetros desconocidos incluidos en θ ($\Lambda, \Psi_\epsilon, A, \Gamma, \Phi$ y Ψ_δ).

Definiendo θ_y como los parámetros desconocidos en Λ y en Ψ_ϵ que se asocian con el modelo de medida, y definiendo θ_ω como los parámetros desconocidos en A, Γ, Φ y Ψ_δ asociados con el modelo estructural que relaciona las variables latentes, es normal

¹ Es un caso especial del algoritmo de Metropolis-Hastings con un componente donde se usa como densidad propuesta la distribución a posteriori condicional completa.



asumir que las distribuciones a priori de cada vector de parámetros son independientes, es decir, $p(\theta) = p(\theta_y)p(\theta_\omega)$. Combinando esta información con otros resultados (Lee, 2007), se tiene que:

$$p(\theta_y, \theta_\omega | Y, \Omega) \propto [p(Y | \Omega, \theta_y)p(\theta_y)][p(\Omega | \theta_\omega)p(\theta_\omega)]$$

Donde ambos términos multiplicativos pueden ser tratados separadamente como las distribuciones marginales condicionales de θ_y y θ_ω .

La distribución marginal condicionada de θ_y es $p(\Lambda, \Psi_\epsilon | Y, \Omega)$ a la cual se le asigna las siguientes distribuciones a priori: sean $\psi_{\epsilon k}$ y Λ_k el elemento de la diagonal “k” de Ψ_ϵ y la k-ésima fila de Λ respectivamente:

$$\begin{aligned} \psi_{\epsilon k}^{-1} &\sim \text{Gamma}(\alpha_{0\epsilon k}, \beta_{0\epsilon k}) \\ [\Lambda_k | \psi_{\epsilon k}] &\sim N[\Lambda_{0k}, \psi_{\epsilon k} H_{0yk}] \end{aligned}$$

Con H_{0yk} siendo una matriz definida positiva. Más adelante en la especificación del modelo que será ajustado con los datos se explicará la elección de los hiperparámetros para todas las distribuciones a priori.

Por otra parte, la distribución marginal condicionada de θ_ω es proporcional a $p(\Omega | \theta_\omega)p(\theta_\omega)$, para el cual se puede demostrar (Lee, 2007) que la distribución marginal condicional es:

$$p(\Omega | \theta_\omega)p(\theta_\omega) = [p(\Omega_1 | \Omega_2, A, \Gamma, \Psi_\delta)p(A, \Gamma, \Psi_\delta)][p(\Omega_2 | \Phi)p(\Phi)]$$

Donde las distribuciones condicionales de (A, Γ, Ψ_δ) y de Φ pueden ser tratadas separadamente.

La distribución a priori para Φ será tal que

$$\Phi^{-1} \sim \text{Wishart}[R_0, \rho_0]$$

Con R_0 siendo una matriz definida positiva.

Por último, siguiendo una lógica similar para la elección de las distribuciones a priori para Λ_k y $\psi_{\epsilon k}$, y haciendo $\Lambda_\omega = (A, \Gamma)$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \psi_{\delta k}^{-1} &\sim \text{Gamma}(\alpha_{0\delta k}, \beta_{0\delta k}) \\ [\Lambda_{\omega k} | \psi_{\delta k}] &\sim N[\Lambda_{0\omega k}, \psi_{\delta k} H_{0\delta k}] \end{aligned}$$

En la siguiente sección se explicará cuál es la hipótesis causal que intenta ser modelada vía SEM, los datos que serán utilizados, y posterior a esto será explicado el modelo que será estimado mediante OpenBugs².

² OpenBugs (Bayesian inference Using Gibbs Sampling) es un software computacional para el análisis bayesiano de modelos estadísticos utilizando métodos de Monte Carlo de cadenas de Markov (MCMC).

Datos

El modelo causal que intenta ser probado trata de la influencia de dos factores latentes sobre el rendimiento educativo, para lo que se utilizarán datos provenientes de una muestra de estudiantes costarricenses participantes en la prueba PISA 2012.

El Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA- Programme for International Student Assessment) es un esfuerzo conjunto entre los países miembros de la OCDE que busca medir la capacidad que tienen los estudiantes en edad de 15 años y que se acercan a concluir el ciclo de escolaridad obligatoria, para afrontar los retos de la sociedad actual.

La evaluación tiene una visión a futuro: en lugar de centrarse en evaluar conocimientos específicos de acuerdo con los currículos o planes de estudio de cada centro educativo, se evalúa la capacidad que tienen los estudiantes para utilizar su conocimiento y habilidades para afrontar retos de la vida real.

Las encuestas y evaluaciones de PISA se realizan cada tres años y aunque todas miden habilidades y conocimientos en lectura, ciencias y matemáticas, cada evaluación enfatiza en una de estas tres áreas, dedicando cerca del 60% de los ítems a la evaluación del área en la que se enfoca la prueba. Costa Rica participó por segunda vez en esta prueba en el año 2012. En ese año el énfasis de la evaluación fue en matemáticas, por lo que el modelo será evaluado para el rendimiento educativo en alfabetización matemática.

Además de la medición de habilidades y conocimientos de los estudiantes mediante una prueba escrita, PISA también aplica cuestionarios a los estudiantes y directores de colegios para recolectar información que permita analizar y contextualizar adecuadamente los resultados de las pruebas.

La muestra de PISA está diseñada sobre una población de estudiantes con edades entre los 15 años y tres meses y 16 años y dos meses que asisten a las instituciones educativas oficiales y se encuentran cursando un grado equivalente al séptimo o superior para todos los países participantes.

Las bases de datos de una evaluación internacional como la prueba PISA contienen más de 300 variables a disposición, pero para el presente trabajo se trabajará únicamente con nueve variables, que serán testeadas en el modelo.

Producto de la evidencia empírica previa, se probará la validez de un modelo del rendimiento educativo de los estudiantes en la prueba de matemáticas de la evaluación PISA 2012. Por lo tanto, la hipótesis de partida es que existen *dos constructos latentes inobservables* (ξ_1 y ξ_2 en la figura 1) que dan buena cuenta de la explicación de la *variable latente de rendimiento educativo*³ (η_3 en la figura 1). La medición de las dos variables latentes exógenas se explica a continuación:

³ PISA provee cinco valores plausibles del rendimiento de los estudiantes en lugar de una única medida de resultado para cada una de las áreas evaluadas, es decir, cinco valores plausibles para lectura, cinco valores plausibles para matemática y cinco valores plausibles para ciencias (Teoría de Respuesta al Ítem). En esta investigación únicamente fueron utilizados tres de los cinco valores plausibles de la evaluación de matemáticas (PV1, PV3 y PV5).

Extracción socioeconómica (ξ_1)

En diversos países ha sido ampliamente probada la hipótesis de que un mayor estatus socioeconómico del estudiante se asocia con un mejor rendimiento educativo. En muchos países, los centros educativos que compiten por los estudiantes tienden a tener un mayor rendimiento, pero esto es a menudo explicado por el mayor nivel socioeconómico de los estudiantes que asisten a estos centros. Esto sucede porque los padres con un nivel socio económico alto, al momento de elegir a cuál centro enviar a sus hijos, tienden a considerar más el rendimiento académico de los centros educativos que los padres de un nivel socioeconómico bajo (Montero, 2012).

Si bien la base de datos de PISA incluye una variable latente denominada Índice de Estatus Económico, Social y Cultural que fue ampliamente evaluada a la luz de la teoría y de los datos para todos los países en dicha evaluación, dicha variable contiene las puntuaciones factoriales de un análisis factorial exploratorio, por lo que no será ingresada de esta forma en el modelo de medida, sino que se utilizarán sus tres principales variables observadas para la construcción de la variable latente.

Estas tres variables son en realidad índices previamente calculados por PISA: El índice posesiones del hogar (HOMEPOS), el índice de estatus ocupacional más alto de los padres (HISEI), y el índice del nivel educativo más alto de los padres (PARED). Una explicación de la construcción de estos índices se muestra en el anexo 1.

Actitud hacia las matemáticas (ξ_2)

Esta sería una variable latente que intenta capturar la actitud propia de los estudiantes hacia el aprendizaje y la utilización de las matemáticas. Este factor será medido mediante la utilización de tres variables indicadoras diseñadas en PISA para este efecto. Estas variables son Confianza en la realización de problemas matemáticos, Ansiedad a la hora de enfrentarse a problemas que involucren la utilización de matemáticas y el Autoconcepto, que mide qué tan bueno o malo se considera el estudiante a sí mismo para las matemáticas. Las preguntas del cuestionario con las que fueron creadas estas variables se muestran en el anexo 1.

Para efectos de estimación, todas las variables fueron estandarizadas para tener valor mínimo de 0 y máximo de 1⁴. Se cuenta con un total de 1314 observaciones con información completa en las nueve variables seleccionadas para ajustar el modelo⁵.

⁴ No se realizó la estandarización de la variable con media cero y desviación estándar de uno, aunque en el anexo 2 se muestra la solución completamente estandarizada.

⁵ El cuestionario de contexto aplicado a los estudiantes en PISA 2012 tuvo la particularidad de que tuvo un diseño con rotación, en el cual, para poder abarcar la mayor cantidad de temas posibles, ningún estudiante tuvo que responder a la batería completa de ítems, sino que aleatoriamente fueron asignados tres tipos de cuestionarios a los estudiantes, cada uno con 25 ítems compartidos y con preguntas diferenciadas, lo que hace que cada estudiante haya contestado sólo al 66% de los ítems totales. Este es uno de los pocos casos en los que es correcto asumir que los valores perdidos en las bases de datos siguen un proceso completamente aleatorio.

El modelo SEM estimado

Antes de detallar las distribuciones a priori del modelo, es importante considerar que para asignarles los valores a los hiperparámetros de las distribuciones a priori se debe tomar en cuenta el grado de conocimiento que se tenga acerca de la distribución del parámetro, que si es un buen grado de conocimiento, lo recomendado es asignar varianzas pequeñas a la distribución a priori correspondiente.

En este caso, algunas distribuciones a priori se tomarán con medias semejantes a las cargas factoriales obtenidas de la estimación del modelo vía máxima verosimilitud (cuyos resultados se muestran en la sección de Resultados), y debido a que se espera que los valores no se alejen mucho de estos resultados, se escogen distribuciones para las precisiones que tengan poca variabilidad en la varianza.

Una de estas precisiones que será usada es la distribución *Gamma* con parámetros $\alpha = 9$ y $\beta = 4$. La *Gamma* inversa con estos parámetros tiene como media 0.5 y como varianza 1/28, por lo que se estaría estableciendo a priori que el hiperparámetro que se establezca como media de la distribución *Normal* tendría una varianza pequeña (definida por la *Gamma*). Lo mismo sucede con la distribución *Wishart*, al establecer por ejemplo como matriz definida positiva a la identidad ($R_0=I$) y como $\rho_0=5$.

El modelo de medida es definido mediante las nueve variables manifiestas $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{i9})$ y las tres variables latentes $\omega_i = (\eta_i, \xi_{i1}, \xi_{i2})^T$ de la siguiente manera:

$$y_{ij} = \alpha_j + \lambda_{j1}\eta_i + \epsilon_{ij} \quad , \text{ para } j = 1, 2 \text{ y } 3$$

$$y_{ij} = \alpha_j + \lambda_{j2}\xi_{i1} + \epsilon_{ij} \quad , \text{ para } j = 4, 5 \text{ y } 6$$

$$y_{ij} = \alpha_j + \lambda_{j3}\xi_{i2} + \epsilon_{ij} \quad , \text{ para } j = 7, 8 \text{ y } 9$$

Como es usual en el análisis factorial confirmatorio, para obtener la solución no estandarizada del modelo debe fijarse la carga factorial de un parámetro en cada factor latente. En este caso, se fijan $\lambda_{11} = \lambda_{42} = \lambda_{73} = 1$, por lo que son parámetros fijos que por ende no deben ser estimados.

En el lenguaje de OpenBugs, lo que corresponde es indicar que cada y_{ij} se distribuye como una normal: $y_{ij} \sim N[\mu_{ij}, \psi_{ij}]$ (se asume que $\epsilon_{ij} \sim N[0, \psi_{\epsilon j}]$), donde cada μ_{ij} adopta la forma de las ecuaciones anteriores.

La distribución a priori para α_j , que es la ordenada en el origen de la ecuación, se establece como una normal estándar: $\alpha_j \sim N[0, 1]$.

Para cada parámetro de carga factorial, se parte de los resultados de la estimación vía máxima verosimilitud, estableciendo para todos una media común de 0.8 y una precisión de $\psi_{\epsilon j}$: $\lambda_j \sim N[0.8, \psi_{\epsilon j}]$. Donde $\psi_{\epsilon j}$ se distribuye como una *gamma*: $\psi_{\epsilon j} \sim \text{Gamma}(9, 4)$ para $j=1, \dots, 9$. La priori para la precisión de y_{ij} se establece también como $\psi_{ij} \sim \text{Gamma}(9, 4)$.

En el caso del modelo estructural, este se expresa de la siguiente manera:

$$\eta_i = \gamma_1 \xi_{i1} + \gamma_2 \xi_{i2} + \delta_i = \Gamma \xi_i + \delta_i$$

Donde $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2})^T \sim MN[\mathbf{0}, \Phi]$ donde $\Phi \sim Wishart \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 5 \right]$

La carga factorial de ξ_{i1} y ξ_{i2} se distribuye, según los resultados de la estimación frecuentista, como una normal con una media en la carga factorial de 0.5 y precisión $\psi_\delta: \Gamma \sim N[0.5, \psi_\delta]$ en donde $\psi_\delta \sim Gamma(9,4)$.

Por último, $\eta_i \sim N[v_i, \psi]$ donde cada v_i adopta la forma de la ecuación respectiva para el modelo estructural, y cuya precisión se distribuye *gamma*: $\psi^{-1} \sim Gamma(9,4)$.

La estimación vía máxima verosimilitud se realizó mediante el uso del software **LISREL** (*LI*near *Str*uctural *REL*ations) mientras que la estimación bayesiana se realiza en **OpenBugs** pero desde R mediante la utilización de la librería **R2OpenBugs** disponible en el repositorio CRAN.

3. Resultados

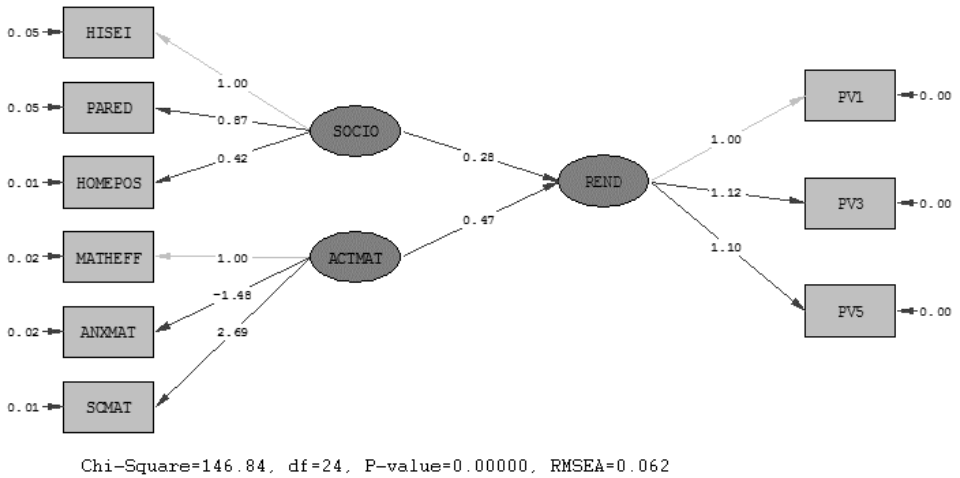
Enfoque Frecuentista

El software LISREL es uno de los más utilizados para realizar la modelación de ecuaciones estructurales, debido a la simplicidad gráfica con que muestra los resultados. La Figura 2 muestra los resultados obtenidos de la estimación vía máxima verosimilitud del modelo descrito en la sección anterior.

Como fue especificado en el modelo, los parámetros que definen la ecuación entre HISEI y SOCIO, MATHEFF y ACTMAT y entre PV1 y REND fueron restringidos a ser igual a uno. Los demás parámetros eran desconocidos y debían ser estimados, obteniendo resultados de una relación muy alta entre las variables indicadoras y las variables latentes, aunque es importante aclarar que estas cargas factoriales sólo se pueden interpretar de la siguiente manera: cuánto cambia la variable latente ante el cambio en una unidad de la variable indicadora, pero con la variable latente siendo medida de la misma forma que la variable manifiesta a la cual se le fijó la carga como 1 (uno).

Figura 2

Parámetros estimados mediante Máxima Verosimilitud



En el anexo 2 se muestra la solución completamente estandarizada como referencia que permita una interpretación directa de las cargas factoriales, aunque esta solución no fue estimada mediante el enfoque Bayesiano.

Uno de los índices para evaluar la bondad de ajuste es el de la raíz de error cuadrático medio de la aproximación (RMSEA, por sus siglas en inglés). Es un índice que evalúa el “error de aproximación” porque evalúa lo bien que se ajusta el modelo a la población. Por lo tanto, un valor de cero indica un ajuste perfecto, mientras que valores alejados del cero para este índice muestran un ajuste menor. En la práctica, el valor óptimo ideal para la medida RMSEA es 0,05 o menos (Kaplan, 2009; Mulaik, 2009). Según se muestra en la Figura 2, el RMSEA=0,06 que muestra un ajuste aceptable los datos.

El test de la Chi cuadrado sale significativo debido a la gran sensibilidad de dicho test al tamaño muestral, que es muy grande con los datos que se utilizan en esta investigación. Si bien hay otras medidas de bondad de ajuste, estas no serán presentadas en este artículo ya que no es el interés central del mismo.

Enfoque Bayesiano

Para la estimación del modelo SEM Bayesiano, no se fijaron valores iniciales para el inicio de las cadenas, sino que se permitió que el algoritmo de *OpenBugs* los escogiera. Para la estimación se realizaron tres cadenas, cada una de 5000 iteraciones.

En el anexo 3 se muestra la convergencia de los parámetros, mediante su media ergódica. Visualmente se aprecia que las tres cadenas alcanzan su estado estacionario cerca de la iteración 2000, por lo que las primeras 2000 iteraciones serán descartadas en todas las cadenas para efectos de estimación de los parámetros.

Además, debido a que la cadena 3 tarda en alcanzar su convergencia más allá de la iteración 2000 en unos pocos casos, las estimaciones serán realizadas únicamente utilizando las primeras dos cadenas, es decir, para cada estimación se contará con 6000 iteraciones (3000 para cada una de las dos cadenas).

El Cuadro 1 muestra los resultados obtenidos mediante la estimación Bayesiana y lo compara con la estimación vía máxima verosimilitud. Para guiar visualmente el parámetro correspondiente se utiliza la nomenclatura mostrada en la Figura 1.

Cuadro 1

Resultados de la estimación del modelo SEM frecuentista y bayesiano

Matriz o Vector	Parámetro	Máxima		Estimación Bayesiana				
		Verosimilitud		Media	Desviación Estándar	Intervalo de Credibilidad		
		Estimación	(ee)			2,5%	Mediana	97,5%
Parámetros de regresión de variables indicadoras con su variable latente	$\lambda_{11,3}$	1,1228	(0,0181)	0,9060	0,0274	0,8544	0,9055	0,9599
	$\lambda_{12,3}$	1,1024	(0,0185)	0,8956	0,0270	0,8425	0,8957	0,9480
	$\lambda_{5,1}$	0,8667	(0,0483)	0,8750	0,0523	0,7751	0,8750	0,9788
	$\lambda_{6,1}$	0,4224	(0,0223)	0,3504	0,0224	0,3080	0,3502	0,3966
	$\lambda_{8,2}$	-1,4848	(0,0935)	-0,8131	0,0578	-0,9271	-0,8117	-0,7007
	$\lambda_{9,2}$	2,6916	(0,1847)	1,4536	0,0672	1,3220	1,4540	1,5870
Parámetros estructurales	γ_1	0,2786	(0,0188)	0,2537	0,0247	0,2057	0,2537	0,3031
	γ_2	0,4713	(0,0492)	0,4086	0,0481	0,3144	0,4085	0,5033
Matriz diagonal de varianzas y covarianzas de los errores de las variables indicadoras	ϵ_{10}	0,1300	(0,0213)	0,4441	0,0053	0,4338	0,4440	0,4546
	ϵ_{11}	0,1300	(0,0197)	0,4147	0,0049	0,4048	0,4147	0,4243
	ϵ_{12}	0,1500	(0,0134)	0,3993	0,0049	0,3896	0,3993	0,4089
	ϵ_4	0,5000	(0,0431)	0,4177	0,0088	0,3999	0,4177	0,4348
	ϵ_5	0,6000	(0,0388)	0,7151	0,0084	0,6989	0,7152	0,7314
	ϵ_6	0,4700	(0,0254)	0,4428	0,0041	0,4349	0,4428	0,4507
	ϵ_7	0,7300	(0,0185)	0,5750	0,0049	0,5655	0,5749	0,5850
	ϵ_8	0,6200	(0,0228)	0,5740	0,0054	0,5636	0,5740	0,5848
	ϵ_9	0,1700	(0,0294)	0,5226	0,0065	0,5097	0,5227	0,5353
Matriz diagonal de varianzas y covarianzas de errores en las variables latentes endógenas	$\psi_{3,3}$	0,0094	(0,0005)	0,0192	0,0009	0,0174	0,0192	0,0212
	$\psi_{10,10}$	0,0022	(0,0001)	0,0111	0,0005	0,0102	0,0111	0,0121
	$\psi_{11,11}$	0,0027	(0,0002)	0,0116	0,0005	0,0106	0,0116	0,0126
	$\psi_{12,12}$	0,0032	(0,0002)	0,0117	0,0005	0,0108	0,0117	0,0128
	$\psi_{4,4}$	0,0456	(0,0027)	0,0502	0,0029	0,0445	0,0502	0,0559
	$\psi_{5,5}$	0,0513	(0,0026)	0,0553	0,0028	0,0499	0,0553	0,0610
	$\psi_{6,6}$	0,0072	(0,0005)	0,0160	0,0007	0,0148	0,0160	0,0174
	$\psi_{7,7}$	0,0151	(0,0007)	0,0204	0,0009	0,0186	0,0204	0,0222
	$\psi_{8,8}$	0,0201	(0,0010)	0,0309	0,0013	0,0284	0,0308	0,0337
Matriz de varianzas y covarianzas de las Latentes Exógenas	$\phi_{1,1}$	0,0463	(0,0037)	0,0480	0,0039	0,0410	0,0479	0,0559
	$\phi_{1,2}$	0,0016	(0,0006)	0,0037	0,0010	0,0018	0,0037	0,0056
	$\phi_{2,1}$	0,0006	(0,0006)	0,0117	0,0008	0,0101	0,0116	0,0134

Fuente: elaboración propia con datos de PISA 2012
 ee: error estándar

En general, donde se encuentran mayores diferencias entre ambos enfoques es en el modelo de medida, ya que los parámetros de regresión (λ) son considerablemente mayores en el caso de la estimación frecuentista, y por ende las correlaciones entre los errores aleatorios de las variables indicadoras (ε) son también diferentes, particularmente para la variable latente endógena de Rendimiento.

Sin embargo, es importante recordar que en este trabajo se muestra la solución no estandarizada del modelo de medida, que es más compleja de explicar que la solución estandarizada, y por esta razón sería recomendable evaluar las diferencias en el modelo de medida pero desde la solución completamente estandarizada.

Por el contrario, en el caso del modelo estructural las estimaciones son muy semejantes. De hecho, el intervalo de credibilidad de la estimación Bayesiana de los parámetros estructurales (γ) incluye a la estimación puntual de la estimación mediante máxima verosimilitud.

Lo mismo sucede con la matriz de varianzas y covarianzas de estos parámetros estructurales, ya que los parámetros obtenidos vía máxima verosimilitud se encuentran contenidos en el intervalo de credibilidad de la estimación Bayesiana.

Desde el punto de vista del modelo que se pretendía ajustar, los resultados muestran que el modelo de medida se encuentra establecido con un ajuste aceptable, es decir, que las variables indicadoras son buenas medidas de las variables latentes de estatus socioeconómico y de actitud hacia las matemáticas.

Además, las estimaciones obtenidas del modelo estructural están en concordancia con la hipótesis de causalidad: el estatus socioeconómico y la actitud personal del estudiante hacia las matemáticas son determinantes del rendimiento educativo de los estudiantes costarricenses en esta materia, medido a través de los resultados de la prueba de alfabetización matemática de PISA 2012.

Sin embargo, es importante resaltar que este es un modelo sencillo para tratar de medir una realidad social muy compleja, y por lo tanto es probable que existan otras variables latentes que puedan tener un efecto directo o indirecto sobre el rendimiento educativo de los estudiantes.

4. Conclusiones

En esta investigación se evaluó la hipótesis de que existen dos constructos latentes que pueden tener un efecto importante sobre el rendimiento educativo de los estudiantes en matemáticas: el estatus socioeconómico de los estudiantes y la actitud de los estudiantes hacia esta materia.

Para comprobar esta hipótesis, se ajusta un modelo de ecuaciones estructurales dentro del cual, para poder medir los constructos latentes que son inobservables, se utilizan variables observadas de la base de datos de PISA 2012.

Los resultados muestran que el modelo de medida ajusta de una manera aceptable y que la relación estructural entre las variables latentes soporta evidencia en favor de la hipótesis causal que pretendía ser evaluada.

Desde el punto de vista sustantivo, un reto para futuras investigaciones es el establecimiento de un modelo causal más elaborado, que involucre un mayor número de factores latentes y que se aproxime más al complejo marco de relaciones sociales y de contexto que pueden influir en el rendimiento académico de los jóvenes estudiantes costarricenses. Otras investigaciones han incorporado el factor de capital cultural, inteligencia fluida, entre otros, e incluso de relaciones entre factores del centro educativo, como calidad docente, infraestructura, computadoras, con al rendimiento de los estudiantes (Montero 2012, Montero 2013, Fernández 2014).

Desde el punto de vista teórico, se identifican varios aspectos que pueden ayudar a evaluar de una mejor manera la estimación Bayesiana.

El primero de estos es el planteamiento de un modelo a través del cual se obtenga la solución completamente estandarizada del modelo, para de esta forma poder evaluar de una manera directa los resultados y patrones de las cargas factoriales del modelo de medida.

En segundo lugar, es probable que parte del hecho de que el modelo de medida ajuste de una manera un poco distinta en ambos enfoques se deba a que, en el caso de la estimación Bayesiana, fueron establecidas distribuciones a priori muy informativas, producto de la información previa del ajuste del modelo frecuentista. Un análisis de sensibilidad del modelo ante distintos tipos de distribuciones a priori, incluyendo no informativas, podría ayudar a esclarecer este aspecto.

Por último, resulta una tarea aún mayor el intentar la modelación con una estructura multinivel, para poder incorporar al modelo variables del centro educativo. Algunos paquetes estadísticos como LISREL permiten la estimación de un modelo SEM en dos niveles, pero con ciertas restricciones, como un gran número de grupos, un elevado tamaño de muestra y para variables continuas, debido a los problemas de convergencia del modelo si estas no se cumplen. Las ventajas de la estimación Bayesiana bajo estos escenarios son ampliamente reconocidas (Depaoli & Clifton, 2015; Lee 2007).

Anexo 1

Descripción de las variables utilizadas en el modelo

Para medir el estatus socioeconómico, se recurre a tres índices calculados previamente y presentes en las bases de datos de PISA: El índice posesiones del hogar (HOMEPOS), el índice de estatus ocupacional más alto de los padres (HISEI), y el índice del nivel educativo más alto de los padres (PARED).

El primero de estos índices, el índice de posesiones familiares o del hogar es a su vez un índice que incorpora la utilización de otros tres índices: El índice de bienestar familiar que incorpora dentro de su cálculo artículos como habitación propia, internet, computadores, televisores, automóviles, entre otros. El índice de posesiones culturales que incluye literatura clásica, libros de poesía, obras de arte presentes en el hogar, entre otros y el índice de recursos educativos del hogar que incluye escritorio y lugar tranquilo para estudiar, computadora con software educativo, libros y diccionarios.

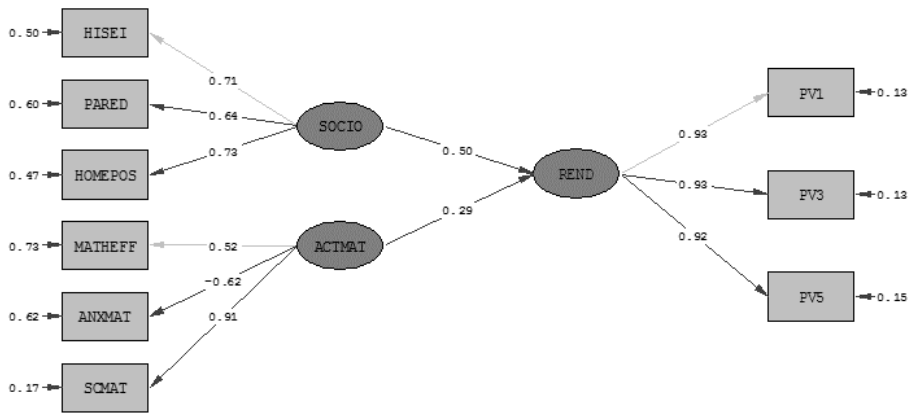
El segundo índice da cuenta del estatus ocupacional más alto de alguno de los padres o tutores de los estudiantes. El estatus ocupacional es medido mediante el Índice ISEI (International Socio-Economic Index of Occupational Status). En el caso del nivel educativo, este es medido mediante años de educación de acuerdo con el ISCED (International Standard Classification of Education), y también da cuenta del nivel educativo más alto de los padres o tutores de los estudiantes.

En el caso de la variable latente de actitud hacia las matemáticas, las variables indicadoras utilizadas son también latentes, y se desprenden de las siguientes preguntas del cuestionario:

Confianza propia en matemáticas (MATHEFF)	Ansiedad en matemáticas (ANXMAT)
<i>¿Qué tan seguro(a) se siente al tener que realizar las siguientes actividades matemáticas?</i>	<i>Piense lo que le pasa cuando estudia Matemática, ¿qué tan de acuerdo o en desacuerdo está con las siguientes afirmaciones?</i>
Opciones:	Opciones:
<i>()Muy seguro ()Seguro ()No muy seguro ()Nada seguro</i>	<i>()Totalmente de acuerdo ()De acuerdo ()En desacuerdo ()Totalmente en desacuerdo</i>
<ul style="list-style-type: none"> a) Deducir cuánto tiempo toma trasladarse de un lugar a otro, al utilizar los horarios de autobuses b) Calcular cuánto más barato vale un televisor con un 30% de descuento. c) Calcular cuántos metros cuadrados de mosaico se necesitan para cubrir un piso. d) Entender los gráficos que aparecen en los periódicos. e) Encontrar la distancia real entre dos puntos en un mapa con una escala de 1:10 000 f) Resolver una ecuación como esta: $3x + 5 = 17$ g) Resolver una ecuación como esta: $2(x + 3) = (x + 3)(x - 3)$ h) Calcular el consumo de gasolina de un carro. 	<ul style="list-style-type: none"> a) Me pongo muy nervioso(a) cuando me enfrento a un problema matemático b) Me siento perdido(a) cuando me enfrento a un problema matemático. c) Frecuentemente me preocupa que la lección de Matemática sea difícil para mí. d) Me preocupa sacar bajas notas en Matemática. e) Me pongo muy tenso(a) cuando tengo que hacer la tarea de Matemática
	Auto concepto en matemáticas (SCMAT)
	<ul style="list-style-type: none"> a) Sencillamente, no soy bueno(a) en Matemática b) Saco buenas notas en Matemática. c) Aprendo matemática rápido. d) Siempre he pensado que la Matemática es una de mis asignaturas preferidas e) En mi lección de Matemática entiendo hasta el procedimiento más difícil.

Anexo 2

Diagrama de trayectoria de la solución completamente estandarizada del modelo LISREL (versión 9.2)

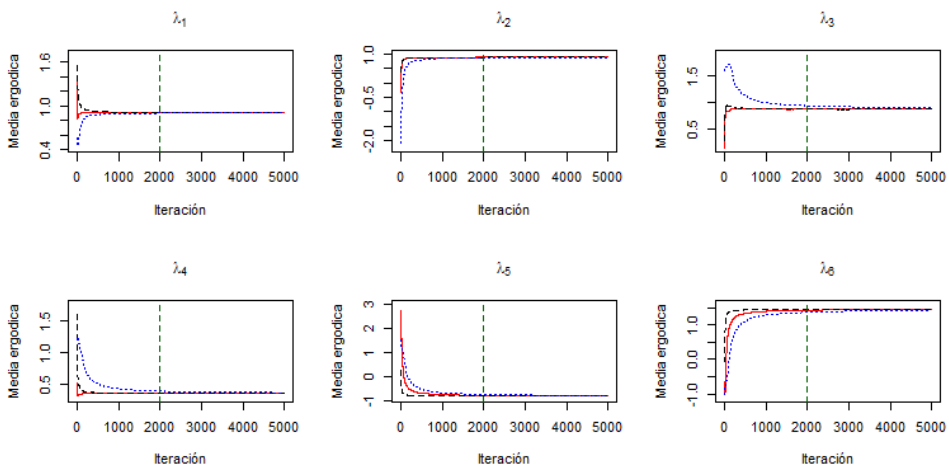


Chi-Square=146.84, df=24, P-value=0.00000, RMSEA=0.062

Anexo 3

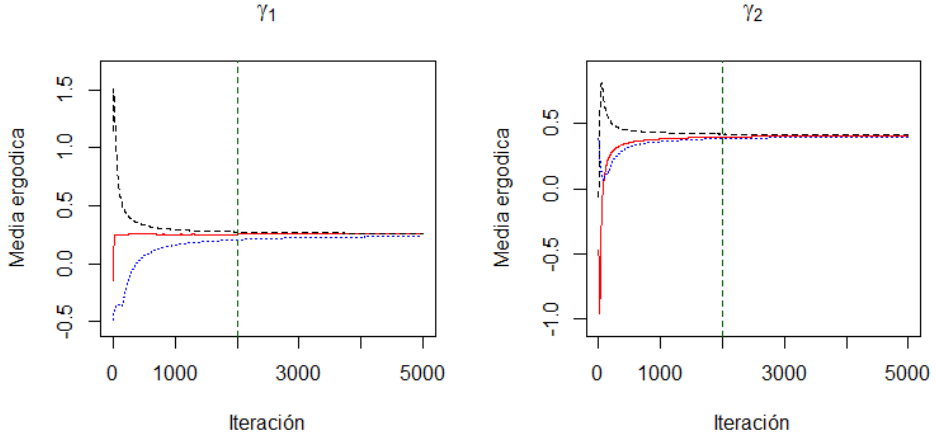
Media ergódica de los parámetros estimados en el modelo SEM

Lambda: Parámetros de regresión del modelo de medida



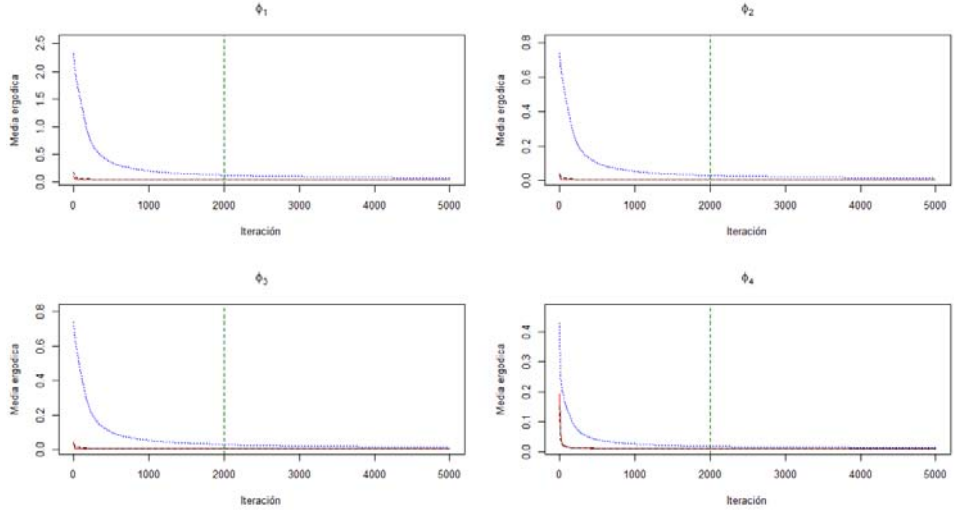
Nota: Los subíndices de cada parámetro se encuentran en el orden de la estimación y no con la nomenclatura del cuadro 1, aunque mantiene el mismo orden de presentación del cuadro 1.

Gamma: Parámetros de regresión de la relación estructural



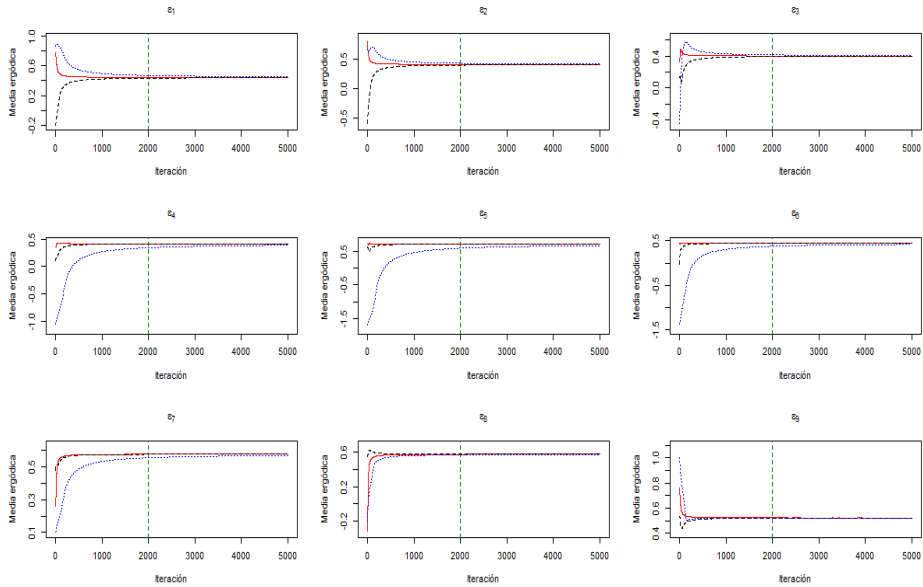
Nota: los subíndices de cada parámetro se encuentran en el orden de la estimación y no con la nomenclatura del cuadro 1, aunque mantiene el mismo orden de presentación del cuadro 1.

Phi: Varianzas y covarianzas de las variables latentes exógenas



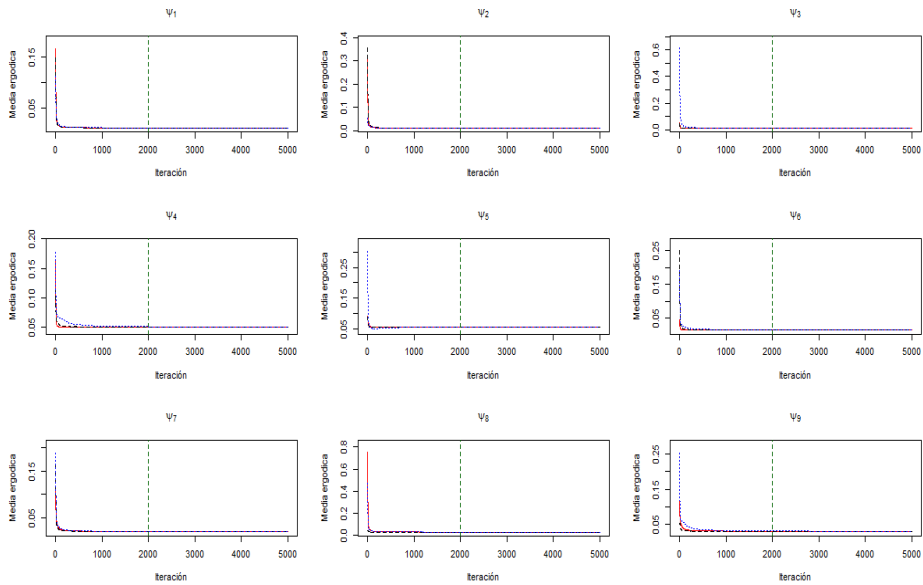
Nota: los subíndices de cada parámetro se encuentran en el orden de la estimación y no con la nomenclatura del cuadro 1, aunque mantiene el mismo orden de presentación del cuadro 1.

Epsilon: Error de medición de la variable indicadora



Nota: los subíndices de cada parámetro se encuentran en el orden de la estimación y no con la nomenclatura del cuadro 1, aunque mantiene el mismo orden de presentación del cuadro 1.

Psi: Varianzas entre las variables latentes endógenas



Nota: los subíndices de cada parámetro se encuentran en el orden de la estimación y no con la nomenclatura del cuadro 1, aunque mantiene el mismo orden de presentación del cuadro 1.

Anexo 4**Matriz de varianzas y covarianzas observada (muestral) y estimada**

OBSERVADA									
	PV1	PV3	PV5	HISEI	PARED	HOMEPOS	MATHEFF	ANXMAT	SCMAT
PV1	0,0168								
PV3	0,0164	0,0212							
PV5	0,0162	0,0181	0,0210						
HISEI	0,0132	0,0151	0,0144	0,0919					
PARED	0,0099	0,0110	0,0105	0,0433	0,0861				
HOMEPOS	0,0066	0,0074	0,0070	0,0188	0,0167	0,0155			
MATHEFF	0,0041	0,0050	0,0048	0,0051	0,0039	0,0033	0,0207		
ANXMAT	-0,0071	-0,0085	-0,0080	-0,0034	-0,0022	-0,0015	-0,0061	0,0324	
SCMAT	0,0071	0,0087	0,0082	0,0033	0,0023	0,0016	0,0155	-0,0225	0,0491

ESTIMADA									
	PV1	PV3	PV5	HISEI	PARED	HOMEPOS	MATHEFF	ANXMAT	SCMAT
PV1	0,0168								
PV3	0,0165	0,0212							
PV5	0,0162	0,0181	0,0210						
HISEI	0,0137	0,0154	0,0151	0,0919					
PARED	0,0119	0,0133	0,0131	0,0402	0,0861				
HOMEPOS	0,0058	0,0065	0,0064	0,0196	0,0170	0,0155			
MATHEFF	0,0031	0,0035	0,0034	0,0016	0,0014	0,0007	0,0207		
ANXMAT	-0,0046	-0,0052	-0,0051	-0,0024	-0,0021	-0,0010	-0,0083	0,0324	
SCMAT	0,0083	0,0092	0,0092	0,0044	0,0038	0,0019	0,0151	-0,0224	0,0491

Estimaciones mediante máxima verosimilitud en LISREL

Referencias

- ALBERT, J. (2009). «Bayesian computation with R». *Springer*. Second edition. doi:10.1007/978-0-387-92298-0.
- BROWN, T. (2006). «Confirmatory factor analysis for applied research». *New York: Guilford Press*. doi:10.1198/tas.2008.s98.
- BYRNE, B. (1998). «Structural equation modeling with LISREL, PRELIS, and SIMPLIS: Basic concepts, applications, and programming». Mahwah, NJ: Erlbaum. doi:10.1207/S15328007SEM0704_8.
- Depaoli, S., & Clifton, J. (2015). «A bayesian approach to Multilevel Structural Equation Modeling with Continuous and Dichotomous Outcomes». *Structural Equation Modeling: A multidisciplinary Journal*. doi:10.1080/10705511.2014.937849.

- FERNÁNDEZ, A. (2013). «Análisis de la Resiliencia Educativa de los Estudiantes Costarricenses con datos de la Prueba de Lectura de la Evaluación PISA 2009». *Revista de Ciencias Económicas* Vol 31 N°2. ISSN: 0252-9521. Universidad de Costa Rica.
- FERNÁNDEZ, A. (2014). «La influencia del acceso al uso de computadoras en edad temprana sobre el rendimiento en matemáticas». *Revista de Ciencias Económicas* 32-No.2: 2014 / 113-125 / ISSN: 0252-9521. Universidad de Costa Rica. doi:<http://dx.doi.org/10.15517/rce.v32i2.17261>.
- JORESKOG, K. (1969). «A general approach to confirmatory maximum likelihood factor analysis». *Psychometrika*, 34, 183-202.
- JORESKOG, K. (1971). «Statistical analysis of sets of congeneric tests». *Psychometrika*, 36, 109-133.
- KAPLAN, D. (2009). «Structural equation modeling: foundations and extensions». Segunda edición. Thousand Oaks, CA: Sage. doi:10.4135/9781452226576.
- LEE, S.-Y. (2007). «Structural Equation Modeling: A Bayesian Approach». *Wiley Series in probability and statistics*. doi:10.1002/9780470024737.
- MONTERO, E. (2012). «Los modelos de ecuaciones estructurales como herramienta para explorar posibles relaciones causales en investigación educativa: Una ilustración con datos de PISA 2009 en Costa Rica». *Aporte Especial. Cuatro Informe del Estado de la Educación. Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible*.
- MONTERO, E., ROJAS, S., ZAMORA, E., & RODINO, A. (2013). «Costa Rica en las pruebas PISA 2009 de Competencia Lectora y Alfabetización Matemática». *Cuarto Informe del Estado de la Educación: Programa Estado de La Nación en Desarrollo Humano Sostenible*.
- MULAİK, S. A. (2009). «Linear causal modeling with structural equations». New York: CRC Press Taylor & Francis Group. doi:10.1080/10705511.2012.713284.
- ORGANIZACIÓN PARA LA COOPERACIÓN Y EL DESARROLLO ECONÓMICO. (2011). «Against the Odds: Disadvantaged students who succeed in school». OECD Publishing. doi:10.1787/9789264090873-en.
- PRESS, S. J. (2003). «Subjective and objective bayesian statistics. Wiley Series in Probabilily and Statistics». Second edition. doi:10.1002/9780470317105.oth1.
- SPEARMAN, C. (1904). «General Intelligence, objectively determined and measured». *American Journal of Psychology*, 15, 201-293.
- SPEARMAN, C. (1927). «The abilities of man». New York: Macmillan.
- THURSTONE, L. (1947). «Multiple-factor analysis». Chicago: University of Chicago. Press.