Estadística Española • Volumen 60, número 195 / 2018, pp. 49-59

Un método general de estimación insesgada de la varianza

Mariano Ruiz Espejo
Universidad Católica San Antonio de Murcia

Resumen

Proporcionamos un método general de estimación insesgada de la varianza para aquellas estrategias insesgadas de una función paramétrica de las que dispongamos otra estrategia insesgada de la misma función paramétrica y un estimador insesgado de la varianza de esta última estrategia muestral. Como consecuencia, muchos estimadores clásicos corregidos insesgados tienen a su disposición una variedad de nuevos estimadores insesgados de su varianza respectiva.

Palabras clave: estimación insesgada de la varianza, estimadores clásicos corregidos insesgados, estrategias de muestreo, población finita.

Clasificación AMS: 62D05.

A general method of unbiased variance estimation

Abstract

We provide a general method of unbiased variance estimation for those unbiased strategies of a parametric function from which we dispose of other unbiased strategy for the same parametric function and an unbiased variance estimate of this last sampling strategy. As a consequence, many unbiased corrected classic estimates have to its disposal a variety of new unbiased estimates of its respective variance.

Keywords: unbiased variance estimate, unbiased corrected classic estimates, sampling strategies, finite population.

AMS classification: 62D05.

1 Introducción

En la inferencia estadística objetiva (Ruiz Espejo, 2014a), dos elementos clave para la realización de un estudio por muestreo con el fin de estimar cierta función paramétrica definida sobre la variable de interés a observar, son el estimador insesgado de la función paramétrica y la estimación insesgada de la varianza de dicho estimador.

Algunos métodos clásicos de estimación de la varianza se han demostrado sesgados (Ruiz Espejo y Singh, 2000; Wolter, 1985). Por esto, muchas estrategias de muestreo o pares (diseño muestral p, estimador t) han ido proponiéndose en las últimas décadas como estimadores insesgados de la función paramétrica “media poblacional” (de la variable de interés y en una población finita de tamaño N, siendo y_i el valor de la variable de interés en la unidad i-ésima de la población finita)

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i.$$

O de otras funciones paramétricas más complejas, como la “varianza poblacional”

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2.$$

O bien otras asociadas a la estrategia muestral (p, t), como es principalmente su varianza,

$$V(p,t) = \sum_{d\in D}[t(d) - E(p,t)]^2 p(d).$$

Aquí, hemos denotado por $E(p,t)$ a la esperanza matemática de la estrategia (p,t),

$$E(p,t) = \sum_{d\in D} t(d)p(d).$$

Y la notación $d \in D$ se refiere al dato $d = \{(k, y_k): k \in s\}$, del conjunto de datos D, asociado a la muestra s ya sea ordenada o no ordenada, con componentes o elementos k de la población finita U denotada por

$$U = \{1, 2, \dots, k, \dots, N\}.$$

Para una conceptualización más precisa y detallada, aconsejo los libros de Ruiz Espejo (1996, 2013b, 2017).

Pues bien, en este artículo se expone un método de estimación insesgada de la varianza $V(p,t)$, y que denotaremos por el estimador $\hat{V}(p,t)$, cuya propiedad fundamental es que su esperanza matemática coincide con la varianza de la estrategia (p,t), es decir

$$E[\hat{V}(p,t)] = V(p,t).$$

Así pues formalizaremos la teoría en la siguiente sección, y posteriormente veremos algunos ejemplos de aplicación del método en estrategias insesgadas que hasta ahora parecían huérfanas a la hora de estimar sin sesgo su varianza, pues no se habían descrito soluciones al problema de la estimación sin sesgo de su varianza de modo sencillo y razonable.

2 Método de estimación insesgada de la varianza

La teoría del método que proponemos la recogemos en el siguiente teorema, que es una ampliación de la teoría de estimación insesgada (Ruiz Espejo, 1986, 1988).

Teorema. *Sean dos estrategias insesgadas de la misma función paramétrica $f(y_1, y_2, \dots, y_N)$, que denotamos por (p_1, t_1) y (p_2, t_2), siendo p_1 y p_2 dos diseños muestrales, y t_1 y t_2 dos estimadores asociados a sus diseños respectivos. Si la estrategia muestral (p_1, t_1) dispone de un estimador insesgado de su varianza, denotémosle por $\hat{V}(p_1, t_1)$, entonces:*

La estrategia insesgada (p_2, t_2) dispone de un estimador insesgado de su varianza cuya expresión es

$$\hat{V}(p_2, t_2) = t_2^2 - t_1^2 + \hat{V}(p_1, t_1).$$

Demostración. Para ello, partimos de que por ser estrategias insesgadas

$$E(p_1, t_1) = E(p_2, t_2) = f(y_1, y_2, \dots, y_N).$$

Además,

$$V(p_1, t_1) = E(p_1, t_1^2) - [f(y_1, y_2, \dots, y_N)]^2.$$

Y

$$V(p_2, t_2) = E(p_2, t_2^2) - [f(y_1, y_2, \dots, y_N)]^2.$$

Por tanto,

$$V(p_2, t_2) = E(p_2, t_2^2) - E(p_1, t_1^2) + V(p_1, t_1).$$

De donde sustituyendo las funciones paramétricas del segundo miembro de esta última ecuación por sus respectivos estimadores insesgados, obtenemos el estimador insesgado $\hat{V}(p_2, t_2)$ de la varianza $V(p_2, t_2)$. En concreto,

$$\hat{V}(p_2, t_2) = t_2^2 - t_1^2 + \hat{V}(p_1, t_1).$$

El estimador t_1 depende del dato seleccionado con el diseño muestral p_1, el estimador t_2 depende del dato seleccionado con el diseño muestral p_2, y el estimador $\hat{V}(p_1, t_1)$ depende del dato seleccionado con el diseño muestral p_1. ■

Una observación a tener en cuenta es que si los diseños muestrales p_1 y p_2 no son coincidentes, entonces se tienen que seleccionar dos muestras, independientes o no, cada una de ellas de acuerdo con su diseño muestral. Si fueran coincidentes, solo sería necesario seleccionar una muestra de acuerdo con el diseño muestral común.

Este método de estimación insesgada de la varianza completa los estudiados por Wolter (1985, 2007) y por Ruiz Espejo (2013b).

3 Algunos ejemplos de aplicación del método

El estimador de razón. Es bien conocido que el estimador de razón se define como

$$t_R = \bar{y}_s \frac{\bar{x}}{\bar{x}_s}.$$

Este estimador es sesgado en general para diseño de muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento de tamaño efectivo fijo $n \geq 1$, que asigna probabilidad igual a toda muestra no ordenada o conjunto de cardinal n, concretamente

$$\frac{1}{\binom{N}{n}}.$$

Hemos denotado por $\bar{y}_s$ y por $\bar{x}_s$ a las medias muestrales para la muestra conjunto o no ordenada s, de las variables de interés y, y auxiliar no negativa $x > 0$, respectivamente. También, $\bar{x}$ es la media poblacional de la variable auxiliar x.

El estimador de razón t_R es insesgado para la media poblacional $\bar{y}$ con el siguiente diseño muestral p, de tamaño efectivo fijo n, que asigna probabilidad positiva a toda muestra $s \subset U$ con n elementos o unidades, es decir con $\text{card}(s) = n$, de manera que

$$p(s) = \frac{\bar{x}_s}{\bar{x}\binom{N}{n}} = C \sum_{i \in s} x_i \propto \sum_{i \in s} x_i.$$

La constante de proporcionalidad $C > 0$ es

$$C = \frac{1}{\bar{x}n\binom{N}{n}}.$$

Lahiri (1951), Midzuno (1951) y Sen (1953) estudiaron desde diversos puntos de vista esta estrategia insesgada. La varianza $V(p, t_R)$ no es fácilmente estimable sin sesgo para $n \geq 2$, pero si tenemos una muestra piloto s^* en la que por muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento de tamaño efectivo fijo $m \geq 2$ estimamos la media poblacional con la estrategia $(p_1, \bar{y}_{s^*})$, como ésta es también insesgada para la media poblacional y además su varianza puede expresarse como

$$V(p_1, \bar{y}_{s^*}) = \frac{N-m}{N-1}\frac{\sigma^2}{m}.$$

Un estimador insesgado de esta varianza es

$$\hat{V}(p_1, \bar{y}_{s^*}) = \frac{N-m}{(N-1)m(m-1)} \sum_{i \in s^*} (y_i - \bar{y}_{s^*})^2.$$

Por lo que un estimador insesgado de la varianza $V(p, t_R)$ resulta ser

$$\hat{V}(p, t_R) = t_R^2 - \bar{y}_{s^*}^2 + \hat{V}(p_1, \bar{y}_{s^*}) =$$

$$\bar{y}_s^2 \frac{\bar{x}^2}{\bar{x}_s^2} - \bar{y}_{s^*}^2 + \frac{N-m}{(N-1)m(m-1)} \sum_{i \in s^*} (y_i - \bar{y}_{s^*})^2.$$

Este estimador insesgado de la varianza de la estrategia (p, t_R) no es el único posible, sino que habría tantos como estrategias insesgadas de la media poblacional con varianza estimable sin sesgo. En los libros de Ruiz Espejo (2013b, 2017) se presentan una amplia variedad de tales casos con sus expresiones concretas.

Otros ejemplos similares. *Estimadores media-de-razones insesgados.* Han sido estudiados en Ruiz Espejo (2015b). En este artículo se proporcionaron una variedad de estrategias insesgadas para la media poblacional, y en dos casos de ellos se dieron fórmulas explícitas para estimar sin sesgo la varianza del estimador insesgado basado en el estimador media-de-razones. En los demás casos el estimador insesgado de su varianza puede obtenerse por los medios propuestos en este artículo, incluso aprovechando el diseño de muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento ya seleccionada la muestra, y cambiando en la estrategia el estimador de la media poblacional, siempre que conozcamos un estimador insesgado de su varianza (un ejemplo válido es el realizado en el caso del estimador de razón, con la tradicional media muestral con diseño de muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento de tamaño efectivo fijo $m \geq 2$).

Estimadores de regresión lineal corregidos insesgados con muestreo irrestricto aleatorio de tamaño $n \geq 2$ (Ruiz Espejo, 2013a, 2016a):

$$t_{ur} = \bar{y}_s + \frac{\frac{1}{n}\sum_{i \in s} y_i (x_i - \bar{x})}{M_{02}} (\bar{x} - \bar{x}_s) + \frac{\frac{N-n}{(N-1)n^2} \sum_{i \in s} y_i (x_i - \bar{x})^2}{M_{02}}.$$

Y (Ruiz Espejo, 2016c):

$$t_{ur}^* = a_{10} + \frac{(N-1)n}{N(n-1)M_{02}} [2a_{11}A_{01} + a_{10}a_{01}^2 - a_{11}a_{01}$$

$$\left. -a_{10}a_{01}A_{01} - \frac{2(N-1)n}{N(n-1)} a_{11}a_{10} + \frac{2N-n-1}{N(n-1)} a_{21} \right]$$

Estimadores de producto corregidos insesgados con muestreo irrestricto aleatorio de tamaño muestral efectivo $n \geq 2$ (Ruiz Espejo, 2016c):

$$t_{up} = \frac{a_{10}a_{01}}{A_{01}} - \frac{N-n}{N(n-1)A_{01}} m_{11}.$$

Y

$$t_{up}^{*} = \frac{a_{10}a_{01}}{A_{01}} - \frac{N-n}{(N-1)nA_{01}}(a_{11} - a_{10}A_{01}).$$

Estimador media-de-productos corregido insesgado con muestreo irrestricto aleatorio de tamaño muestral efectivo $n \geq 2$ (Ruiz Espejo, 2016c):

$$t_{ump} = \frac{a_{11}}{A_{01}} - \frac{(N-1)n}{N(n-1)A_{01}}m_{11}.$$

Todos ellos han sido obtenidos recientemente para estimar insesgadamente la media poblacional. En todos se pueden obtener estimadores insesgados de las varianzas de tales estrategias insesgadas, por ejemplo apoyándose en las propiedades de la media muestral a_{10} con el mismo diseño muestral y muestra seleccionada. También pueden obtenerse estimadores insesgados de la varianza para los estimadores producto generalizados corregidos insesgados de modo más sencillo al ya conocido y expuesto en Ruiz Espejo (2016b).

Estimador postestratificado de la media poblacional (Cochran, 1977), ya sea con diseño de muestreo aleatorio simple con o sin reemplazamiento, cuya expresión es

$$t_{ps} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h.$$

Su varianza ha podido ser estimada sin sesgo (Ruiz Espejo y Delgado Pineda, 1997), pero con nuestro método es posible hacerlo, por ejemplo, considerando la estrategia insesgada con el mismo diseño de selección de unidades, y sin postestratificar, considerando el estimador media muestral asociada, cuya varianza es tradicionalmente estimable sin sesgo por estimadores bien conocidos. Entonces, en el muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento de tamaño efectivo fijo n como estrategia alternativa tenemos

$$\hat{V}(t_{ps}) = t_{ps}^2 - \bar{y}_s^2 + \hat{V}(\bar{y}_s) = t_{ps}^2 - \bar{y}_s^2 + \frac{N-n}{Nn}s^2.$$

Donde $\bar{y}_s$ es la media muestral, su subíndice es la muestra aleatoria simple sin reemplazamiento o muestra no ordenada o conjunto s de cardinal n, y s^2 es la cuasivarianza muestral

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i \in s}(y_i - \bar{y}_s)^2.$$

Estimador media muestral corregida en muestreo sistemático de arranque simple. Completando, si fuera necesario, el número de unidades poblacionales con unidades ficticias cuya variable de interés sea por definición cero, y corrigiendo el estimador media muestral para obtener estimaciones insesgadas de la media poblacional, es posible obtener con nuestro método estimadores insesgados de la varianza del estimador insesgado sugerido de la media poblacional en muestreo sistemático de arranque simple. Es un ejercicio práctico fácilmente realizable, basándose por ejemplo en otra muestra irrestricta aleatoria piloto de la misma población finita junto con la media muestral, sin completar la población con unidades ficticias. Esta sería una alternativa al método de Rana y Singh (Ruiz Espejo, 1997b). Este resultado es sorprendente si tenemos en cuenta que Cassel *et al.* (1977) y Ruiz Espejo (1987) justificaron que con la muestra obtenida con un diseño muestral sistemático de arranque simple, como es un diseño muestral por conglomerados unietápico con muestras de un solo conglomerado, no admite estimador insesgado de la varianza del estimador Horvitz-Thompson (1952), único estimador lineal homogéneo insesgado para la media poblacional, al existir unidades de la población finita con probabilidad nula de inclusión simultánea en la muestra.

Estimador insesgado de la media poblacional en muestreo sistemático de arranque doble. Es un caso similar al anterior, y que fue resuelto para la misma muestra y diseño muestral por Ruiz Espejo (2014b). Con el nuevo método que hemos propuesto, de estimación insesgada de la varianza, es posible obtener otros estimadores insesgados alternativos de la varianza del estimador de la media poblacional.

Otros estimadores insesgados de interés son los de la varianza poblacional. Del mismo modo puede obtenerse estimadores insesgados de sus varianzas a partir de otra estrategia insesgada de la varianza poblacional y de su estimador insesgado de su varianza. Ejemplos para ello pueden encontrarse en Ruiz Espejo *et al.* (2013) y en su corrección de Ruiz Espejo (2015c). Por ejemplo, basándonos en que con diseño de muestreo aleatorio simple con reemplazamiento de tamaño muestral fijo $n \geq 4$ un estimador insesgado de la varianza poblacional σ^2 es la cuasivarianza muestral s^2, y que un estimador insesgado de su varianza es

$$\hat{V}(s^2) = \frac{(n-1)\hat{\mu}_4 - (n-3)s^4}{n^2 - 2n + 3}.$$

Donde

$$\hat{\mu}_4 = \left(1 - \frac{3}{cn}\right)^{-1} \left[\frac{n}{n-1} m_4 + 3\left(\frac{n-1}{n} - \frac{1}{c}\right) s^4\right].$$

Aquí, la constante c es

$$c = \frac{n^2 - 2n + 3}{n(n-1)}.$$

Y m_4 es el momento central muestral de cuarto orden. Con todo ello, si tenemos otro estimador insesgado de la varianza poblacional, entonces es posible proponer otro estimador insesgado de su varianza, realizando un muestreo piloto con diseño de muestreo aleatorio simple con reemplazamiento de tamaño fijo $n \geq 4$. Estas consideraciones resuelven el problema de estimación sesgada de la varianza que aparece en la teoría clásica (Ruiz Espejo y Singh, 2000).

4 Conclusiones

Hemos visto un método original de estimación insesgada de la varianza en determinadas condiciones. Un ejemplo particular es el de cualquier estrategia de muestreo (p, t_2), siendo p un diseño muestral y t_2 un estimador, siempre que dispongamos de otro estimador t_1 que con el mismo diseño muestral p tenga la misma esperanza matemática que t_2, y además dispongamos un estimador insesgado de la varianza de la estrategia (p, t_1) denotado por $\hat{V}(p, t_1)$. El estimador insesgado de la varianza de (p, t_2) propuesto es

$$\hat{V}(p, t_2) = t_2^2 - t_1^2 + \hat{V}(p, t_1).$$

Aunque el problema de la *estimación insesgada de la varianza* queda resuelto con tal de encontrar otra estrategia con la misma esperanza matemática y con varianza estimable insesgadamente, conviene indicar que este *estimador* propuesto podría tomar valores negativos en algún caso concreto, es decir, la estimación concreta para una muestra particular podría ser $\hat{V}(p, t_2) < 0$, especialmente cuando el estimador t_1^2 tomase valores grandes. Es evidente que en esos casos concretos la estimación insesgada de la varianza del estimador t_2 sería de poca ayuda a efectos inferenciales ya que tal estimación $\hat{V}(p, t_2)$ de la función paramétrica $V(p, t_2)$ no aporta nada al sustituir esta última por la anterior haciendo uso de la desigualdad de Chebychev con el objeto de obtener estimaciones por intervalo aproximados de la función paramétrica $E(p, t_2)$ usando la estrategia de muestreo (p, t_2). Esto se debe a que la información proporcionada resultante sería la afirmación de que una probabilidad es aproximadamente mayor que un número mayor que uno, lo que no informa de nada aprovechable inferencialmente en la práctica para dicha muestra concreta. Lo mismo se puede decir en el caso general similar de dos estrategias muestrales con diseños muestrales diferentes.

De este modo, hemos completado un procedimiento general de estimación insesgada de la varianza de ciertos estimadores insesgados, además de los métodos tradicionales expuestos en los trabajos de Ruiz Espejo (1993, 1997a, 1997b, 2011, 2013b, 2013c, 2013d, 2014b, 2015a, 2015b, 2015c, 2016a, 2016b, 2017), Ruiz Espejo y Delgado Pineda (1997, 2008), Ruiz Espejo *et al.* (2006, 2013, 2016), y por otros autores como Cochran (1977), Rao y Lanke (1984), Sen (1953), Sengupta y Kundu (1991), Thompson (2012), Wolter (1985, 2007), y Yates y Grundy (1953).

La mejor evidencia de la utilidad de este artículo está en que se han propuesto estimadores insesgados de la varianza de estrategias de muestreo que hasta ahora se desconocía o podría desconocerse que hubiera tales estimadores insesgados de la varianza. Un posible objetivo futuro puede ser llegar a obtener estimadores de la varianza que sean precisos y deseablemente no negativos.

Referencias

CASSEL, CLAES-MAGNUS; SÄRNDAL, CARL-ERIK; & WRETMAN, JAN HAKAN (1977). «*Foundations of Inference in Survey Sampling*». Nueva York, NY: Wiley.

COCHRAN, WILLIAM G. (1977). «*Sampling Techniques*» (3ª edición). Nueva York, NY: Wiley.

HORVITZ, D.G.; & THOMPSON, D.J. (1952). «A generalisation of sampling without replacement from a finite universe». *Journal of the American Statistical Association* 47, 663-685.

LAHIRI, D.B. (1951). «A method for sample selection providing unbiased ratio estimates». *Bulletin of the International Statistical Institute* 33 (2), 133-140.

MIDZUNO, H. (1951). «On the sampling system with probability proportionate to sum of sizes». *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 2, 99-108.

RAO, JOHN N.K.; & LANKE, JAN (1984). «Simplified unbiased variance estimation for multistage designs». *Biometrika* 71, 387-395.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (1986). «Funciones paramétricas estimables en teoría de muestras». *Estadística Española* 28 (112-113), 69-73.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (1987). «Sobre estimadores UMV y UMECM en poblaciones finitas». *Estadística Española* 29 (115), 105-111.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (1988). «Estimación insesgada generalizada en poblaciones finitas». *Qüestiió* 12, 315-321.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (1993). «Nuevos estimadores de la varianza en poblaciones finitas». *Qüestiió* 17, 203-219.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (1996). «*Muestreo Básico para Ciencias Aplicadas*». Zaragoza: Monografías de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales, 8.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (1997a). «Una metodología para el control por muestreo de cuentas económicas». *Estudios de Economía Aplicada* 7, 159-180.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (1997b). «Uniqueness of the Zinger strategy with estimable variance: Rana-Singh estimator». *Sankhya: The Indian Journal of Statistics Series B* 59, 76-83.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2011). «An objective solution to the problem of unbiased estimation with nonresponse». *Statistical Reports* 13, 1-2.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2013a). «Estimador de regresión lineal corregido insesgado». *Statistical Reports* 19, 1-4.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2013b). «*Exactitud de la Inferencia en Poblaciones Finitas*». Madrid: Bubok.

ESTADÍSTICA ESPAÑOLA Vol. 60. Núm. 195 / 2018

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2013c). «Objective unbiased variance estimation with nonresponse: a review». *Statistical Reports* 18, 1-10.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2013d). «Una demostración del estimador insesgado de la varianza en presencia de no respuesta». *Statistical Reports* 17, 1-5.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2014a). «*Fundamentos de la Inferencia Estadística Objetiva*» (3ª edición). Raleigh, NC: Lulu Press.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2014b). «Objective unbiased variance estimation for systematic sampling of double start». *Statistical Reports* 20, 1-13.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2015a). «Estimación insesgada objetiva para no respuesta». *Estadística Española* 57 (186), 29-37.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2015b). «Sampling schemes providing unbiased mean-of-the-ratios estimates: a review». *Estadística Española* 57 (187), 133-139.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2015c). «Sobre estimación insesgada óptima del cuarto momento central poblacional». *Estadística Española* 57 (188), 287-290.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2016a). «Estimación de regresión multivariante insesgada». *Estadística Española* 58 (190), 123-131.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2016b). «Estimadores producto generalizados corregidos insesgados». *Statistical Reports* 23, 1-12.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2016c). «Unbiased corrected classic estimates». *Estadística Española* 58 (189), 43-56.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2017). «*Ciencia del Muestreo*». Madrid: Bubok.

RUIZ ESPEJO, MARIANO; & DELGADO PINEDA, MIGUEL (1997). «On variance estimation for poststratification: a review». *Metron* 55, 209-220.

RUIZ ESPEJO, MARIANO; & DELGADO PINEDA, MIGUEL (2008). «Analysis of variance experimental designs with checkable hypothesis: a reflection». *Statistical Reports* 4, 1-21.

RUIZ ESPEJO, MARIANO; & SINGH, HOUSILA PRASAD (2000). «Biasedness of the jackknife variance estimator of sample mean square». *Revista de la Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Zaragoza (2)* 55, 79-86.

RUIZ ESPEJO, MARIANO; DELGADO PINEDA, MIGUEL; & NADARAJAH, SARALEES (2013). «Optimal unbiased estimation of some population central moments». *Metron* 71, 39-62.

RUIZ ESPEJO, MARIANO; DELGADO PINEDA, MIGUEL; & NADARAJAH, SARALEES (2016). «Optimal unbiased estimation of some population central moments». *Metron* 74, 139.

RUIZ ESPEJO, MARIANO; DELGADO PINEDA, MIGUEL; & SINGH, HOUSILA PRASAD (2006). «Postgrouped sampling method of estimation». *Test* 15, 209-226.

SEN, A.R. (1953). «On the estimate of variance in sampling with varying probabilities». *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics* 5, 119-127.

SENGUPTA, SAMINDRANATH; & KUNDU, D. (1991). «Admissible unbiased variance estimation in finite population sampling under randomized response». *Metrika* 38, 71-82.

THOMPSON, STEVEN K. (2012). «*Sampling*» (3ª edición). Hoboken, NJ: Wiley.

WOLTER, KIRK M. (1985). «*Introduction to Variance Estimation*». Nueva York, NY: Springer-Verlag.

WOLTER, KIRK M. (2007). «*Introduction to Variance Estimation*» (2ª edición). Nueva York, NY: Springer.

YATES, FRANK; & GRUNDY, P.M. (1953). «Selection without replacement from within strata with probability proportional to size». *Journal of the Royal Statistical Society Series B* 15, 235-261.